Pruebas de Acceso a Estudios de Grado para Mayores de 25 Años (Convocatoria de 2020)

UCLM
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

SOLUCIONES DEL EXAMEN DE MATEMÁTICAS

PROPUESTA A

A1.a) **[1 punto]** Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, se tiene que: $Det(A^tA) = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \boxed{0}$.

Cálculo de A^tA: 0,5 *puntos. Resolución del determinante :* 0,25 *puntos. Resultado final correcto:* 0,25 *puntos.*

A1.b) **[1,5 puntos]** Dada $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, se tiene que $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Como $BX = AA^t \Longrightarrow X = B^{-1}AA^t$, entonces: $X = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 7 & 5 & -3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 9 & 6 & -3 \end{pmatrix}}$.

Despejar X en la ecuación matricial: $0,5$ *puntos. Obtención de* $(B)^{-1}$: $0,5$ *puntos. Realización de la operación* $B^{-1}AA^t$: $0,25$ *puntos. Resultado final correcto:* $0,25$ *puntos.*

A.2a) **[1,25 puntos]** El rango de la matriz de coeficientes es 3 y el de la matriz ampliada también, por lo tanto, es un $\boxed{\text{sistema compatible determinado}}$.

Planteamiento del problema: $0,25$ *puntos. Proceso de resolución:* 0,75. *Discusión razonada en este caso:* $0,25$ *puntos.*

A2.b) **[1,25 puntos]** La solución del sistema es $\boxed{x = 1,\ y = 2 \text{ y } z = -5.}$

Explicación del método de resolución: 0,25. Proceso de resolución del problema: 0,75. Solución correcta: 0,25.

A3.a) **[1,25 puntos]** Los vectores $\overrightarrow{u} = (1, a, 0)$, $\overrightarrow{v} = (a, 1, a)$ y $\overrightarrow{w} = (0, 1, 0)$ serán linealmente dependientes cuando el determinante $\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -a$ sea igual a 0, es decir, cuando $\boxed{a = 0.}$

Explicación razonada: 0,5 *puntos. Resolución del problema:* 0,5 *puntos. Resultado final correcto:* 0,25 *puntos.*

A3.b) **[1,25 puntos]** El vector normal al plano $-2x + 5y - z + 3 = 0$ es $\overrightarrow{n} = (-2, 5, -1)$. La ecuación continua de la recta que pasa por $A(0, 2, 1)$ y es perpendicular a dicho plano es: $\dfrac{x}{-2} = \dfrac{y-2}{5} = \dfrac{z-1}{-1}$, pasando a implícitas: $\boxed{r \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} 5x + 2y & = & 4 \\ 2z - x & = & 2 \end{array} \right. .}$

Explicar razonadamente el procedimiento: $0,25$ *puntos. Obtener el vector normal al plano:* $0,25$ *puntos. Escribir la ecuación en forma continua:* $0,25$ *puntos. Escribir la ecuación en forma implícita:* $0,5$ *puntos.*

A4.a) **[1,25 puntos]** $\displaystyle\int_0^1 \frac{-4x-1}{x^2-x-2}\,dx = \int_0^1 \frac{-3}{x-2}\,dx + \int_0^1 \frac{-1}{x+1}\,dx = -3\ln(x-2)\Big|_0^1 - \ln(x+1)\Big|_0^1 = -3\ln(-1) + 3\ln(-2) - \ln(2) + \ln(1) = \boxed{2\ln(2)}$.

Calcular las raíces del denominador: $0,25$ *puntos. Descomposición en fracciones: 0,5. Integrales indefinidas:* $0,25$ *puntos. Regla de Barrow y resultado final correcto:* $0,25$ *puntos.*

A4.b) **[1,25 puntos]** $\int_0^1 xe^{(x-1)}\,dx$. Considerando, $\begin{cases} u = x, & dv = e^{(x-1)}dx \\ du = dx, & v = e^{(x-1)} \end{cases}$, e integrando por partes,

$$\int_0^1 xe^{(x-1)}\,dx = xe^{(x-1)}\Big|_0^1 - \int_0^1 e^{(x-1)}\,dx = 1 - \left(e^{(x-1)}\right)\Big|_0^1 = 1 - 1 + e^{(-1)} = \boxed{\frac{1}{e}}.$$

Plantear partes y explicar: $0,5$ *puntos. Proceso de resolución:* $0,5$ *puntos. Regla de Barrow y resultado final correcto:* $0,25$ *puntos.*

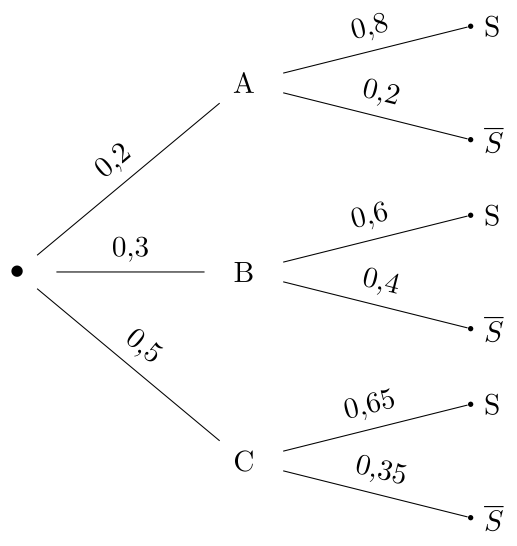
A5.a) **[1,25 puntos]** Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 3}$, por ser cociente de funciones continuas está definida en todo $\mathbb{R}$ excepto cuando se anula el denominador. Por tanto, $\boxed{\text{el dominio es todo } \mathbb{R} \text{ excepto } x = 3.}$ Para calcular los puntos de corte con el eje de abscisas, como $f(x) = 0 \Longrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Longrightarrow x = 2$ y -1, entonces son $\boxed{(2,0) \text{ y } (-1,0).}$ Y con el eje de ordenadas, si $x = 0 \Longrightarrow y = \dfrac{2}{3}$, entonces es el punto $\boxed{\left(0, \dfrac{2}{3}\right).}$

Justificar razonadamente el dominio: $0,5$ *puntos. Cálculo de los cortes de las funciones con el eje de abscisas:* $0,5$ *puntos. Cálculo de los cortes de las funciones con el eje de ordenadas* $0,25$ *puntos.*

A5.b) **[1,25 puntos]** Como $f'(x) = \dfrac{(2x-1)(x-3) - (x^2 - x - 2)}{(x-3)^2} = \dfrac{x^2 - 6x + 5}{(x-3)^2} = 0 \Longrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Longrightarrow$, $x = 1$ y 5. Como $f(1) = 1$ y $f(5) = 9$, entonces $f(x)$ tiene extremos relativos en los puntos $\boxed{(1,1) \text{ y } (5,9).}$

Cálculo de la derivada: $0,5$ *puntos. Obtención de los puntos en los que se anula:* $0,25$ *puntos cada uno. Obtención de las coordenadas:* $0,25$ *puntos.*

A6.a) Probabilidad de que sea un estudiante alemán (A), español (B) u holandés (C), respectivamente, P(A)=0,2, P(B)=0,3 y P(C)=0,5. La probabilidad de que cada uno apruebe estrategias comunes (S) es, 0,8, 0,6 y 0,65, respectivamente.



a.1) $[0,5$ **puntos**$]$ La probabilidad de que no se aprueben estrategias comunes de evaluación es: $P(\overline{S}) = P(A) * P(\overline{S}/A) + P(B) * P(\overline{S}/B) + P(C) * P(\overline{S}/C) = 0{,}2 * 0{,}2 + 0{,}3 * 0{,}4 + 0{,}5 * 0{,}35 = \boxed{0{,}335}$.

Explicación y planteamiento: $0,25$ *puntos. Resultado correcto:* $0,25$ *puntos.*

a.2) $[0,75$ **puntos**$]$ La probabilidad de que sea español si es partidario de estrategias comunes de evaluación es, aplicando el Teorema de Bayes:

$$P(B/S) = \frac{P(S/B)P(B)}{P(S/A)P(A) + P(S/B)P(B) + P(S/C)P(C)} = \frac{0{,}6 * 0{,}3}{1 - 0{,}335} = \frac{0{,}18}{0{,}665} = \boxed{0{,}2707}.$$

Explicación y planteamiento: $0,25$ *puntos. Cálculo de probabilidades auxiliares:* $0,25$ *puntos. Resultado correcto:* $0,25$ *puntos.*

A6.b) b.1) $[0,5$ **puntos**$]$ El tiempo que tarda en hacer el recorrido, X, es una variable aleatoria normal de media $\mu = 18$ y desviación típica $\sigma = 2{,}5$. Luego, $P(X \geq 19) = 1 - P(X \leq 19) = 1 - P\left(Z \leq \dfrac{19-18}{2{,}5}\right) = 1 - P(Z \leq 0{,}4) = 1 - 0{,}6554 = \boxed{0{,}3446}$.

Definición de la variable, planteamiento del problema y tipificación: $0,25$ *puntos. Resolución:* $0,25$ *puntos.*

b.2) $[0,75$ **puntos**$]$ Como $P(X \leq 20) = P\left(Z \leq \dfrac{20-18}{2{,}5}\right) = P(Z \leq 0{,}8) = 0{,}7881$ entonces $P(19 \leq X \leq 20) = P(X \leq 520) - P(X \leq 19) = 0{,}7881 - 0{,}6554 = \boxed{0{,}1327}$.

Planteamiento del problema: $0,25$ *puntos. Resolución:* $0,25$ *puntos. Obtención del resultado final:* $0,25$ *puntos.*

PROPUESTA B

B1.a) **[1 punto]** La inversa de A calculada por el método elegido es $\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$.

Explicación del método del cálculo de la matriz inversa: $0,25$ *puntos. Proceso de resolución:* $0,5$ *puntos. Resultado final:* $0,25$ *puntos.*

B1.b) **[1,5 puntos]** Despejando, $AX + A = B^t \Longrightarrow X = A^{-1}(B^t - A) =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right] = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}.$$

Despejar X *en la ecuación matricial:* $0,5$ *puntos. Obtención de* $B^t - A$: $0,25$ *puntos. Obtención del producto de las matrices:* $0,5$ *puntos. Resultado final correcto:* $0,25$ *puntos.*

B.2a) **[1.25 puntos]** El rango de la matriz de coeficientes del sistema es 2 y el de la matriz ampliada también, por lo tanto, es un sistema compatible indeterminado.

Planteamiento del problema: $0,25$ *puntos. Proceso de resolución:* 0,75. *Discusión razonada en este caso:* $0,25$ *puntos.*

B2.b) **[1.25 puntos]** La solución del sistema es $\boxed{x = -\lambda,\ y = 2 - 2\lambda \text{ y } z = \lambda.}$

Explicación del método de resolución: 0,25. Proceso de resolución del problema: 0,75. Solución correcta: 0,25.

B3.a) **[1,25 puntos]** El producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{u} = (1,1,0)$ y $\overrightarrow{v} = (a,-1,a)$ es $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ a & -1 & a \end{vmatrix} = ai - aj + (-1-a)k$, que tiene que coincidir con $\overrightarrow{w} = (2,-2,-3)$, luego $\boxed{a = 2.}$

Producto vectorial 0,75 *puntos. Obtención del valor a:* $0,5$ *puntos.*

B3.b) **[1,25 puntos]** La recta que pasa por los puntos $A(-1,2,1)$ y $B(0,0,2)$ se obtiene en forma continua a partir del punto A y el vector director $\overrightarrow{AB} = (1,-2,1)$

$\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z-1}{1}$, pasando a implícitas: $\boxed{r \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} 2x + y & = & 0 \\ y + 2z & = & 4 \end{array} \right. .}$

Explicar razonadamente el procedimiento: $0,25$ *puntos. Obtener el vector director de la recta:* $0,25$ *puntos. Escribir la ecuación en forma continua:* $0,25$ *puntos. Escribir la ecuación en forma implícita:* $0,5$ *puntos.*

B4.a) **[1,25 puntos]** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\ln(e^x + x)} = \dfrac{0}{0}$, indeterminación, aplicando la regla de L'Hôpital, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\ln(e^x + x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{(e^x + 1)/(e^x + x)} = \boxed{\dfrac{1}{2}.}$

Detectar indeterminación y explicar el proceso de resolución: $0,5$ *puntos. Aplicar L'Hôpital:* $0,5$ *puntos. Resultado final:* $0,25$ *puntos.*

B4.b) **[1,25 puntos]** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2} = \dfrac{-2}{0}$, indeterminación. Calculando los límites laterales:

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2} = \dfrac{-2}{0^+} = -\infty$, y $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2} = \dfrac{-2}{0^+} = -\infty$, como coinciden, el resultado es $\boxed{-\infty}$.

Detectar indeterminacióny explicar el proceso de resolución: $0,5$ *puntos. Cálculo de los límites laterales:* $0,5$ *puntos. Resultado final:* $0,25$ *puntos.*

B5.a) **[1,5 puntos]** La función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{x-1} & \text{si} \quad x < 1 \\ x^3 - 8 & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 3 \\ \dfrac{x^2-2x-3}{x-3} & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$, por estar definida a trozos de funciones polinómicas y cociente de polinomios, es $\boxed{\text{continua en todos los puntos de } \mathbb{R} \text{ excepto en } x = 1 \text{ y } x = 3}$ que es donde se anulan los denominadores.

$\boxed{\text{En } x = 1}$, como $f(1) = -7$, $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \dfrac{3}{x-1} = -\infty$ y $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x^3 - 8 = -7$, es una $\boxed{\text{discontinuidad de salto infinito}}$.

$\boxed{\text{En } x = 3}$, como $f(3) = 19$, que coincide con $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} x^3 - 8 = 3^3 - 8 = 19$. y $\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \dfrac{x^2-2x-3}{x-3} = \dfrac{0}{0} =$, indeterminación, aplicando Regla de L'Hôpital, $\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \dfrac{2x-2}{1} = 4$, por tanto, es una $\boxed{\text{discontinuidad de salto finito}}$.

Análisis de la continuidad para todos los puntos excepto $x = 1, 3$: $0,25$ puntos. Análisis de la discontinuidad en $x = 1 : 0,25$ puntos. Clasificación de la discontinuidad en $x = 1 : 0,25$ puntos. Análisis de la discontinuidad en $x = 3 : 0,5$ puntos. Clasificación de la discontinuidad en $x = 3 : 0,25$ puntos.

B5.b) **[1 puntos]** El punto de tangencia es $(2, f(2))$ con $f(2) = 2^2 - 8 = 0 \Longrightarrow \boxed{(2,0)}$. La pendiente a la gráfica de la función en ese punto es $m = f'(2) = 3 * 2^2 = 12$. Por lo tanto, la recta tangente es $y - f(2) = m(x-2) \Longrightarrow \boxed{y = 12(x-2) = 12x - 24.}$

Cálculo del punto de tangencia: $0,25$ puntos. Cálculo de la pendiente: $0,5$ puntos. Ecuación de la recta: $0,25$ puntos.

B6.a) La probabilidad de practicar un deporte es $P(A) = 0{,}7$, de tocar un instrumento es $P(B) = 0{,}65$ y de realizar ambas actividades $P(A \cap B) = 0{,}5$.

a.1) **[0.5 puntos]** La probabilidad de que toque un instrumento si se sabe que practica deporte es $P(B/A) = P\dfrac{(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0{,}5}{0{,}7} = \boxed{0{,}714}$.

Explicación y planteamiento: $0,25$ puntos. Resultado correcto: $0,25$ puntos.

a.2) **[0.75 puntos]** La probabilidad de que realice al menos una de las actividades es $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}7 + 0{,}65 - 0{,}5 = \boxed{0{,}85}$.

Explicación y planteamiento: $0,25$ puntos. Cálculo de probabilidades auxiliares: $0,25$ puntos. Resultado correcto: $0,25$ puntos.

B6.b) Se trata de una variable binomial $X = B(n,p)$ con $n = 6$ y $p = 0{,}3$.

b.1) **[0.5 puntos]** La probabilidad de que todas las audiciones coincidan con un partido es $P(X = 6) = \boxed{0{,}0007}$.

Definición de la variable y planteamiento del problema: $0,25$ puntos. Resultado final correcto: $0,25$ puntos.

b.2) **[0.75 puntos]** La probabilidad de que al menos 2 audiciones coincidan es $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - 0{,}1176 - 0{,}3025 = \boxed{0{,}5799}$.

Planteamiento del problema: $0,25$ puntos. Cálculo de probabilidades auxiliares: $0,25$ puntos. Resultado final correcto: $0,25$ puntos.