PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA MAYORES DE 25 AÑOS (2018).
Materia: Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales
Esta prueba consta de dos bloques (A y B) de cuatro preguntas cada uno. El alumno debe contestar a uno de los bloques. Todos los ejercicios puntúan 2.5 puntos. Se puede utilizar la calculadora.

Propuesta A

1. *Dada las matrices:* $A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ *se pide:*

a) Comprueba que se cumple la propiedad asociativa para el producto, es decir, que el resultado de $(A \cdot B) \cdot C$ *es igual a* $A \cdot (B \cdot C)$ *(1.5 puntos)*

b) Razona si se puede obtener el resultado de: $(B \cdot A) \cdot C$ *(1 punto)*

Solución:

a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ -3 & 18 \end{pmatrix}$ (0.25 ptos) ; $(A \cdot B) \cdot C = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 18 & -24 \end{pmatrix}$ (0.5 ptos)

$B \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \\ 4 & -10 \end{pmatrix}$ (0.25 ptos); $A \cdot (B \cdot C) = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 18 & -24 \end{pmatrix}$ (0.5 ptos)

b) No puede obtenerse ese resultado porque, a pesar de que sí se puede realizar el producto $(B \cdot A)$, este resultado es una matriz cuadrada de orden 3 (0.5 ptos), que por su dimensión no puede multiplicarse por la matriz C. (0.5 ptos)

2. *Dada la función:* $f(x) = \frac{1}{12} x^4 - \frac{3}{2} x^2$ *se pide:*

a) Calcula en qué puntos se sitúan sus posibles máximos o mínimos relativos. (1 punto)

b) Calcula en qué intervalos la función es cóncava y en qué intervalos es convexa. (1 punto)

c) Calcula en qué puntos se sitúan sus posibles puntos de inflexión. (0.5 puntos)

Solución:

a) $f'(x) = \frac{1}{3} x^3 - 3x = x \left(\frac{1}{3} x^2 - 3 \right)$ si $f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{9} = \pm 3 \end{cases}$ (0.5 ptos)

Si realizamos la derivada segunda:

$$f''(x) = x^2 - 3 \quad \Rightarrow \begin{cases} f''(0) = -3 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \;\; \textit{es un máximo relativo} \\ f''(\pm 3) = 6 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 3 \;\; \textit{son sendos mínimos relativos} \end{cases}$$

Existe un máximo relativo en el punto (0 , 0) (0.25 ptos)

y dos mínimos relativos en los puntos (-3 , -6,75) y (3 , -6,75) (0.25 ptos)

b) y c) Si estudiamos el signo de la expresión de la derivada segunda:

$f''(x) = x^2 - 3 = \left(x - \sqrt{3} \right) \cdot \left(x + \sqrt{3} \right)$ vemos que:

$f''\ (x) > 0\ $ *en los intervalos* $(\,-\infty\,,\,-\sqrt{3}\,)\ \mathrm{U}\ (\,\sqrt{3}\,,\,\infty\,)\ \Rightarrow$

en esos intervalos $\ f\ (x\ )$ *será cóncava (cóncava hacia arriba)*

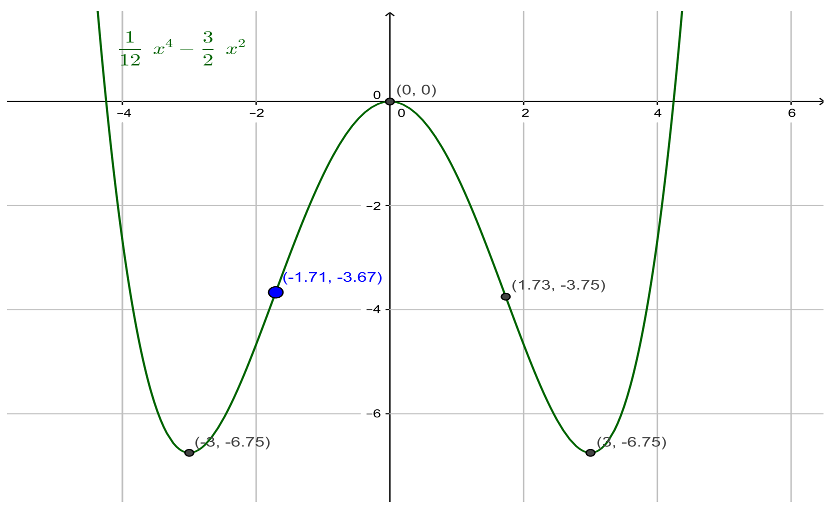
$f''\ (x) < 0\ $ *en el intervalo* $(\,-\sqrt{3}, \sqrt{3}\,)\ \Rightarrow$

en ese intervalo $\ f\ (x\ )$ *será convexa (cóncava hacia abajo)*

(1 pto)

c) $f^{''}(x) = x^2 - 3\ =\ \left(\,x - \sqrt{3}\,\right)\cdot(\,x + \sqrt{3}\,)$ vale 0 para x = ±3 de modo que hay dos puntos

de inflexión: $\left(\,\sqrt{3}\,,\ -3,75\,\right)$ y $(\,-\sqrt{3}\ ,\ -3,75\,)$ (0.5 ptos)



3. *Un equipo de baloncesto está en dos competiciones, la liga y la copa. En la liga tiene una probabilidad de ganarla de 0.3 y en la copa la probabilidad de ganarla es del 0.25. Suponiendo que el rendimiento en las dos competiciones es independiente. Calcula:*

a) La probabilidad de que ese equipo gane al menos una competición. (0.75 puntos)

b) La probabilidad de que ese equipo no gane ninguna. (0.75 puntos)

c) La probabilidad de que ese equipo gane una única competición de las dos posibles. (1 punto)

Solución:

A=La liga; B=La copa

Gana A=Gana la liga; Gana B=Gana la copa

a)

Plantear las probabilidades

P(Gana A)=0.3;P(Gana B)=0.25

P(al menos 1 competición)=1-P(ninguna competición)=1-(0.7*0.75)=0.475 (0.75 ptos)

b)

P(ninguna competición)=0.7*0.75=0.525 (0.75 ptos)

c)

P(una única competición)=0.7*0.25+0.3*0.75=0.4 (1 punto)

4. *El peso en gramos de una bolsa de legumbres de un determinado fabricante, sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 18$ gramos. Se toma una muestra aleatoria de 36 bolsas y se observa que la media del peso de las bolsas de la muestra es 999 gramos.*

a) Calcula con un nivel de confianza del 95 % el intervalo de confianza para la media poblacional del peso de las bolsas de legumbres. (1 punto)

b) Explica razonadamente cómo podríamos disminuir la amplitud del intervalo de confianza, con el mismo nivel de confianza. (0.5 puntos)

c) El fabricante afirma que el peso medio de esas bolsas de legumbres es de 1000 gramos. ¿Se puede aceptar la afirmación del fabricante con un nivel de confianza del 95 %? ¿y con un nivel de significación igual a 0.001? Razona tus respuestas. (1 punto)

Solución:

a) Del enunciado se deduce: $\sigma = 18$ gramos, $\bar{x}$ =999 gramos, n=36

1- α = 0,95 $Z_{\frac{\alpha}{2}}$=1,96 (0.25 ptos)

IC=($\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, $\bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$) (0.25 ptos)

IC=($999 - 1{,}96 \frac{18}{\sqrt{36}}$, $999 + 1{,}96 \frac{18}{\sqrt{36}}$) = (993.12,1004.88) (0.5 ptos)

b) Tomando una muestra mayor. (0.5 ptos)

c)

1000$\in$ (993.12,1004.88) Sí se puede admitir esa afirmación con un nivel de confianza del 95 %. (0.5 ptos)

Con un nivel de significación de 0.001 es lo mismo que decir con un nivel de confianza del 99,9 %, es decir con un nivel de confianza mayor , por lo cual el intervalo será más ancho luego 1000 también pertenecerá a dicho intervalo. (0.5 ptos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

Propuesta B

1. *Una de las estanterías de la biblioteca de un centro escolar alberga 90 libros en total. Los libros de esta estantería están dedicados a tres materias: Física, Química y Matemáticas.*

La diferencia entre el número de libros de Matemáticas y los de Física es igual a la cuarta parte de los de Química. La mitad de los libros de Química coincide con la tercera parte de los de Matemáticas. Se pide:

a) Plantea un sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántos libros de cada especialidad hay en esta estantería. (1.5 puntos)

b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior. (1 punto)

Solución:

a) Por cada ecuación bien planteada 0.5 ptos.

x = Nº de libros de Física; y = Nº de libros de Química; z = Nº de libros de Matemáticas.

$$(I) \quad x + y + z = 90$$

$$(\ II\ ) \quad z - x = \frac{y}{4} \quad \Rightarrow -4\,x - y + 4\,z = 0$$

$$(\ III\ ) \quad \frac{y}{2} = \frac{z}{3} \quad \Longrightarrow \ 3\,y - 2\,z = 0$$

$$4(\ I\ ) + (\ II\ ) \Longrightarrow \ 3\,y + 8\,z = 360\,(III) \Longrightarrow \ 10\,z = 360 \ \Rightarrow \ z = 36$$

$$y = \frac{2}{3}\,z \Longrightarrow \quad y = 24 \quad \Longrightarrow \quad x = 90 - y - z \quad \Longrightarrow \quad x = 30$$

Por lo tanto la solución es: 30 libros de Física, 24 libros de Química y 36 libros de Matemáticas.

b) Por la solución correcta del sistema planteado en a) 1 pto.

2. *En cierto domicilio se dispone de un depósito de combustible que se encuentra lleno al comenzar el año. La evolución del número de litros contenidos en el depósito a lo largo del año se ajusta a la función:* $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - x^3 + 200$ *donde f(x) es el número de litros contenidos en el depósito y x es el tiempo transcurrido en meses, con* $0 \le x \le 12$. *Se pide:*

a) Calcula cuántos litros contiene el depósito cuando comienza el año (x=0), en la mitad del año (x=6) y al finalizar el año (x=12). (0.75 puntos)

b) Comprueba que el número de litros contenidos en el depósito alcanza un valor mínimo a lo largo del año. Calcula cuál es ese valor mínimo y cuándo se produce. (1.75 puntos)

Solución:

a) $f(0) = 200$ litros (0.25 ptos) ; $f(6) = 92$ litros (0.25 ptos) ; $f(12) = 200$ litros (0.25 ptos)

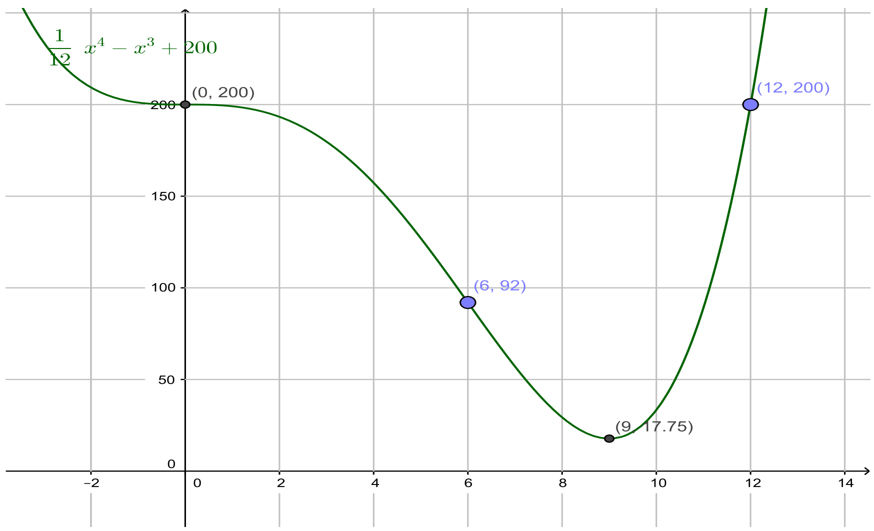
b) $f'(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 = x^2 \cdot (\frac{1}{3}x - 3)$ (0.25 ptos)

Los valores que anulan esta expresión son: $f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 9 \end{cases}$ (0.5 ptos)

Derivada segunda: $f''(x) = x^2 - 6x \quad \Rightarrow \begin{cases} f''(0) = 0 \ \Rightarrow x = 0 \text{ es punto de inflexión} \\ f''(9) = 27 > \ 0 \Rightarrow x = 9 \text{ es un mínimo rel.} \end{cases}$

(0.5 ptos)

El valor mínimo se alcanza cuando acaba septiembre, y vale $f\,(9) = \frac{71}{4}$=17.75 litros. (0.5 ptos)



3. *Una empresa produce dos tipos de productos: bañeras y lavabos. La empresa tiene la obligación de producir diariamente entre 4 y 8 lavabos, y además entre 2 y 5 bañeras. Además, el número de lavabos producidos debe ser al menos el doble que el número de bañeras. La empresa obtiene un beneficio de 40 euros por lavabo y 100 por bañera. La empresa trata de averiguar cuál es la producción diaria que maximiza los beneficios.*

a) Expresa la función objetivo. (0.5 puntos)

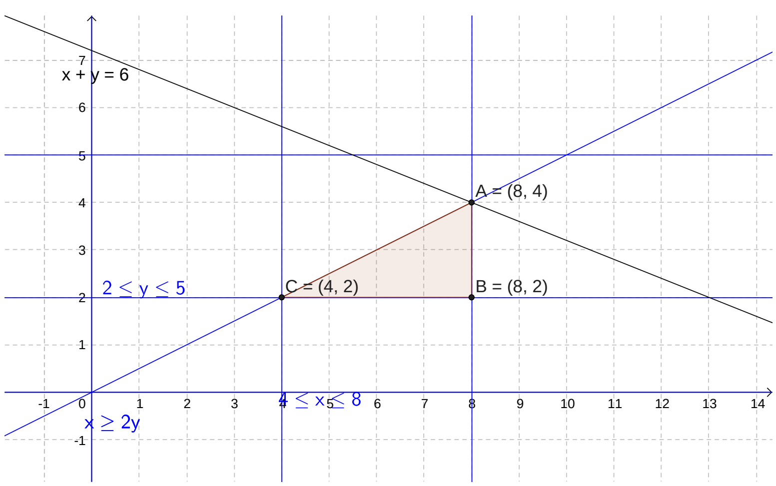
b) Escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. (1.25 puntos)

c) Halla el número de bañeras y lavabos que debe producir diariamente para que el beneficio sea máximo. (0.75 puntos)

Solución:

a) Llamando x a las lavabos e y a las bañeras, la función objetivo será: $Z = 40x + 100y$ (0.5 puntos)

b) Las restricciones del problema: $4 \leq x \leq 8$; $2 \leq y \leq 5$; $x \geq 2\,y \;\rightarrow\; y \leq \frac{1}{2}\,x$. (0.75 puntos) por restricciones y (0.5 puntos) por la región factible



c) Donde A (8 , 4) ; B (8 , 2) ; C (4 , 2) (0.5 puntos por los vértices) y tenemos que

Z(A)=40*8 + 100*4 = 720; Z(B)=40* 8 + 100*2 = 520 ; Z(C)=40*4 +100* 2 = 360.

Luego la solución es producir 8 lavabos y 4 bañeras. (0.25 puntos por óptimo)

4. *De 20 valores distintos que dispone un inversor, 3 han producido pérdidas.*

a) Calcula la proporción de valores que han producido ganancias. (0.5 puntos)

b) Calcula la probabilidad de que si examinamos tres valores distintos al azar, ninguno resulte de los que ha producido pérdidas. (1 punto)

c) Si probamos tres valores distintos al azar y el primero ha producido pérdidas , ¿cuál es la probabilidad de que el segundo y el tercero hayan producido ganancias? (1 punto)

Solución:

a) $P(G) = 17/20$ (0.5 puntos)

b) P(3 ganancias)= $P(1G) * P(2G/1G) * P(3G/(1G \cap 2G)) = 17/20 * 16/19 * 15/18 = 0{,}5965$. (1 punto)

c) Sea 1D=Primera pérdidas; 2D=Segunda ganancias; 3D=Tercera ganancias;

$P(2G \cap 3G/(1P)) = 17/19 * 16/18$=0.7953. (1 punto)