PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA MAYORES DE 25 AÑOS (2020). Adaptación del modelo de examen a causa del COVID19
Materia: Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales
Esta prueba consta de dos propuestas (A y B) de seis preguntas cada una. El alumno debe contestar a un máximo de 4 problemas de la propuesta elegida. Todos los ejercicios puntúan 2.5 puntos. Se puede utilizar la calculadora.

Propuesta A

1. *Un comercial de una empresa farmacéutica vende tres tipos de vacunas: A, B y C. El precio de la vacuna A es de 200 euros, la B cuesta 160 euros y la C se vende por 400 euros. Este mes ha facturado 7440 euros. Si ha vendido el triple de vacunas de tipo B que de las de tipo C y la cantidad de vacunas vendidas del tipo A son el doble de las otras dos juntas (las vendidas de B y C):*

a) Plantea un sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántas vacunas vendió de cada tipo. (1.5 puntos).

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (1 punto)

Solución:

Siendo $x \equiv$ nº de vacunas tipo A; $y \equiv$ nº vacunas tipo B ; $z \equiv$ nº de vacunas tipo C :

$$\left\{\begin{array}{c} 200x + 160y + 400z = 7440 \\ 3z = y \\ x = 2(y+z) \end{array}\right.$$

0.5 puntos por cada ecuación bien planteada.

La solución $(x, y, z) = (24, 9, 3)$ vacunas

Vendió 24 vacunas de tipo A, 9 vacunas de tipo B y 3 vacunas de tipo C.

0.5 puntos por el desarrollo de la resolución.

0.5 puntos por la solución correcta.

2. *El ruido, medido en decibelios, producido por los tambores de la Tamborada de Tobarra, se ajusta a la función:* $R(t) = t^3 - 6t^2 + 9t + 50$, *siendo* t *el tiempo medido en horas,* $0 < t \leq 5$.

a) En la segunda hora ($t = 2$)*, ¿cuántos decibelios se registraron? (0.5 puntos)*

b) ¿En qué momento se produce mayor ruido y a cuántos decibelios asciende? (1 punto)

b) ¿En qué momento se produce menor ruido y a cuántos decibelios asciende? (1 punto)

Solución:

a) $R(2) = 4 + 50 = 52 \Rightarrow$ En la primera hora, $t = 2$, se registraron 52 decibelios (0.5 puntos)

b) $R'(t) = 3t^2 - 12t + 9$ (0.25 puntos)

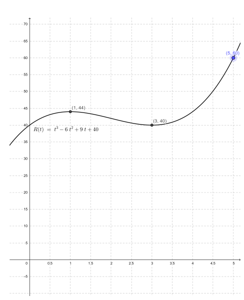
$R'(t) = 0 \Rightarrow t = 1$ ó $t = 3$ (0.25 puntos)

Tiene un máximo relativo en t=1 y un mínimo en $t = 3$ (0.25 puntos)

Faltaría mirar en el extremo abierto del intervalo, sería la quinta hora.

En la quinta hora y asciende a 70 decibelios. (0.25 puntos)

c) En el valor de $t = 3$ y serían 50 decibelíos. (0.75 puntos) por el mínimo y (0.25 puntos) por el valor.



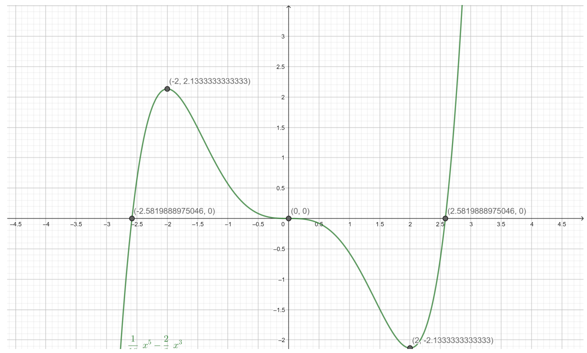
3. *Dada la función:* $g\,(\,x\,) \;=\; \frac{1}{10}\,x^5 \;-\; \frac{2}{3}\,x^3$ *se pide:*

a) Calcula en qué puntos se sitúan sus posibles máximos o mínimos relativos. (1 pto)

b) Calcula en qué intervalos la función es cóncava y en qué intervalos es convexa. (1 pto)

c) Calcula en qué puntos se sitúan sus posibles puntos de inflexión. (0.5 ptos)

Solución:



a)

$$g'\,(\,x\,) \;=\; \frac{1}{2}\,x^4 \;-\; 2\,x^2 \;=\; x^2\,\left(\frac{1}{2}\,x^2 \;-\; 2\right)$$

$$si \quad g'\,(\,x\,) \;=\; 0 \;\;\rightarrow\;\; \begin{cases} x \;=\; 0 \\ x \;=\; \pm\,2 \end{cases}$$

$g''\,(\,x\,) = \;2\,x^3 \;-\; 4\,x \;=\; 2\,x\;\left(\;x^2 \;-\; 2\right)$
$g''\,(\,0\,) \;=\; 0 \;\rightarrow\; x \;=\; 0$ *es punto de* inflexión.
$g''\,(\,2\,) \;=\; 8 \;\rightarrow\; x \;=\; 2$ *es* mínimo *relativo.*
$g''\,(\,-2\,) \;=\; -8 \;\rightarrow\; x \;=\; -2$ *es* máximo *relativo.*
Máximo *relativo* : $(-2\;,\;2.13\;)$ Mínimo *relativo* : $(\;2\;,\;-2.13\;)$

$$si \quad g''\,(\,x\,) \;=\; 0 \;\;\rightarrow\;\; \begin{cases} x \;=\; 0 \\ x \;=\; \pm\,\sqrt{2} \end{cases}$$

(1 pto) (0.5 ptos por máximo y 0.5 ptos por mínimo)

b)

$$g''\,(\,x\,) = \;2\,x^3 \;-\; 4\,x \;=\; 2\,x\;\left(\;x^2 \;-\; 2\right) \;=\; 2\,x\;\cdot\;\left(x \,+\, \sqrt{2}\right)\;\cdot\;\left(x \,-\, \sqrt{2}\right)$$

$g''\,(\,x\,)\;es\;\;>0\;\;en\;\;\left(-\sqrt{2}\;,\;0\right)\;U\;\;\left(\sqrt{2}\;,\;\infty\right)\;\;\rightarrow$ cóncava *hacia arriba* (cóncava)
$g''\,(\,x\,)\;es\;\;<0\;\;en\;\;\left(-\infty\;,\;-\sqrt{2}\right)\;U\;\;\left(0\;,\;\sqrt{2}\;\right)\;\;\rightarrow$ cóncava *hacia abajo* (*convexa*)

(0.25 ptos por saber condiciones) 1 pto todo correcto.

c) Como se ha visto en el apartado a), hay tres puntos de inflexión:

$$(\,0\;,\;0\,)\quad;\quad\left(\sqrt{2}\;,\;-0.32\right)\quad;\quad\left(-\sqrt{2}\;,\;2.32\right)$$

(0.5 ptos)

4. *De un estudio sobre accidentes de tráfico se dedujeron los siguientes datos: el 29 % de los conductores superaron los límites de alcohol en sangre, el 14 % de los conductores tenía presencia de drogas en sangre y el 37 % superaba los límites de alcohol o tenía presencia de drogas en sangre o ambas.*

a) Calcula la probabilidad de que, en un accidente de tráfico, el conductor supere los límites de alcohol y tenga presencia de drogas en sangre. (0.75 puntos)

b) Si en un accidente un conductor tiene presencia de drogas en sangre, ¿cuál es la probabilidad de que supere los límites de alcohol en sangre?. (0.75 puntos)

c) Razone si son independientes los sucesos superar los límites de alcohol y presencia de drogas en sangre. (1 punto)

Solución:

A=Alcohol, $P(A)$=0.29; D=Drogas, $P(D)$=0.14; $A \cup D$=Alcohol o Drogas; $P(A \cup D) = 0.37$

a) Plantear correctamente probabilidades (0.25 puntos).

$P(A \cap D) = P(A) + P(D) - P(A \cup D)$=0.29+0.14-0.37=0.06 (0.5 puntos)

b) $P(A/D) = P(A \cap D)/P(D)$=0.06/0.14=0.42857 (0.75 puntos)

c) Son independientes sí y solo sí $P(A \cap D) = P(A)P(D)$

$P(A \cap D)$=0.06 $\neq P(A) * P(D)$= 0.29*0.14=0.0406. Luego no son independientes. (1 punto)

5. *Un equipo de balonmano está en dos competiciones, la liga y la copa. En la liga tiene una probabilidad de ganarla de 0.3 y en la copa la probabilidad de ganarla es del 0.25. Suponiendo que el rendimiento en las dos competiciones es independiente. Calcula:*

a) La probabilidad de que ese equipo gane al menos una competición. (0.75 puntos)

b) La probabilidad de que ese equipo no gane ninguna. (0.75 puntos)

c) La probabilidad de que ese equipo gane una única competición de las dos posibles. (1 punto)

Solución:

A=La liga; B=La copa; Gana A=Gana la liga; Gana B=Gana la copa

a) P(Gana A)=0.3;P(Gana B)=0.25

P(al menos 1 competición)=1-P(ninguna competición)=1-(0.7*0.75)=0.475 (0.75 ptos todo correcto)

b) P(ninguna competición)=0.7*0.75=0.525 (0.75 ptos)

c) P(una única competición)=0.7*0.25+0.3*0.75=0.4 (1 punto)

6. *Para hacer un estudio del uso de los móviles, se tomó una muestra aleatoria de 10 adultos, siendo el número de horas semanales que hacían uso de los móviles de: 4.2, 4.6, 5, 5.7, 5.8, 5.9, 6.1, 6.2, 6.5 y 7.3 respectivamente. Sabiendo que la variable "número de horas semanales de uso del móvil" sigue una distribución normal de desviación típica 2.1 horas, se pide:*

a) Halla el intervalo de confianza para el número medio semanal de horas que hacen uso de los móviles con un nivel de confianza del 97 %. (1 punto)

b) Explica razonadamente, cómo podríamos disminuir la amplitud del intervalo de confianza. (0.75 puntos)

c) ¿Crees que la media poblacional μ del número medio de horas de uso de móvil semanal es 4 horas con una probabilidad del 90 %? Razona tu respuesta. (0.75 puntos)

Solución:

a) La media muestral es: $\bar{x} = \frac{4,2+4,6+5+5,7+5,8+5,9+6,1+6,2+6,5+7,3}{10}$ =5.73 horas (0.25 puntos)

Del enunciado se deduce: $n = 10$ σ =2.1 horas 1- α =0.97 $Z_{\frac{\alpha}{2}}$=2.17 (0.25 puntos)

IC= ($\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, $\bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$) (0.25 puntos)

IC= (5.73 - 2.17$\frac{2,1}{\sqrt{10}}$, 5.73+ 2.17 $\frac{2,1}{\sqrt{10}}$) = (4.28895, 7.17104) (0.25 puntos)

b) Disminuyendo el nivel de confianza o aumentando el tamaño de la muestra (0.75 puntos).

c) Si el intervalo al 97 % es (4.28895, 7.17104) el valor 4 no está dentro de este intervalo, al 90 % será un intervalo más estrecho con lo que 4 tampoco pertenecerá al intervalo de confianza al 90 %. (0.75 puntos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

Propuesta B

1. *Dadas las matrices:*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

a) Resuelve la ecuación $XA - 2B = C + I$ (siendo I la matriz identidad de orden 2) (1.5 puntos)

b) Calcula $-3\begin{pmatrix} -15 \\ 20 \end{pmatrix} + B^2 \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix}$. (1 punto)

Solución:

a) $XA - 2B = C + I \Rightarrow XA = C + I + 2B \Rightarrow X = (C + I + 2B)\, A^{-1}$ (0.75 puntos)

$$X = \left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 3 \\ 2 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 69 \\ -4 & -14 \end{pmatrix}$$

Cálculo de A^{-1} 0.5 puntos. Todo correcto 1.5 puntos.

b) $-3\begin{pmatrix} -15 \\ 20 \end{pmatrix} + B^2 \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ -60 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 45 \\ -60 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ -60 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -50 \\ 72 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 12 \end{pmatrix}$ (1 punto)

2. *Una de las estanterías de la biblioteca de una asociación de vecinos alberga 90 libros en total. Los libros de esta estantería están dedicados a tres materias: Física, Química y Matemáticas.*

La diferencia entre el número de libros de Matemáticas y los de Física es igual a la cuarta parte de los de Química. La mitad de los libros de Química coincide con la tercera parte de los de Matemáticas. Se pide:

a) Plantea un sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántos libros de cada especialidad hay en esta estantería. (1.5 puntos)

b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior. (1 punto)

Solución:

a) Por cada ecuación bien planteada 0.5 ptos.

x = N de libros de Física; y = N de libros de Química; z = N de libros de Matemáticas.

$$(I) \quad x + y + z = 90$$

$$(\,II\,) \quad z - x = \frac{y}{4} \quad \Rightarrow -4\,x - y + 4\,z = 0$$

$$(\,III\,) \quad \frac{y}{2} = \frac{z}{3} \quad \Longrightarrow \; 3\,y - 2\,z = 0$$

$$4(\,I\,) + (\,II\,) \Longrightarrow 3\,y + 8\,z = 360\,(III) \Longrightarrow 10\,z = 360 \Rightarrow z = 36$$

$$y = \frac{2}{3}\,z \Longrightarrow \quad y = 24 \quad \Longrightarrow \quad x = 90 - y - z \quad \Longrightarrow \quad x = 30$$

Por lo tanto la solución es: 30 libros de Física, 24 libros de Química y 36 libros de Matemáticas.

b) Por la solución correcta del sistema planteado en a) (0.5 ptos por desarrollo y 0.5 por solución correcta)

3. *El gasto en limpiacristales de una empresa de limpieza en el primer semestre del año anterior viene dado por la función:*

$$G\,(x) = -50x^2 + 400x - 250 \qquad (1 \leq x \leq 6)$$

(tomando como $x = 1$ el mes de enero, por lo que $x = 6$ sería el mes de junio) y $G(x)$ el gasto en euros.

a) ¿Cuánto gasta el mes de febrero? (0.5 puntos)

b) ¿Qué mes gasta más? ¿A cuánto asciende ese gasto? (1 punto)

c) ¿Cuál es el mes de menor gasto? (1 punto)

Solución:

$$G\left(x\right)=-50x^2+400x-250$$

a) Febrero es el mes número 2$\Rightarrow$ $G\left(2\right)=-50*\left(2\right)^2+400*2-250=350$ euros (0.5 puntos)

b) $G'\left(x\right)=-100x+400$; se produce un máximo $\Rightarrow G'\left(x\right)=0$ y $G''(x)<0$

$-100x+400=0\ \Rightarrow x=4$ (0.25 puntos) que corresponde al mes de abril (0.25 puntos)

$G''\left(x\right)=-100\Rightarrow G''\left(4\right)=-100<0$ por lo tanto es un máximo (0.25 puntos) y su gasto asciende a

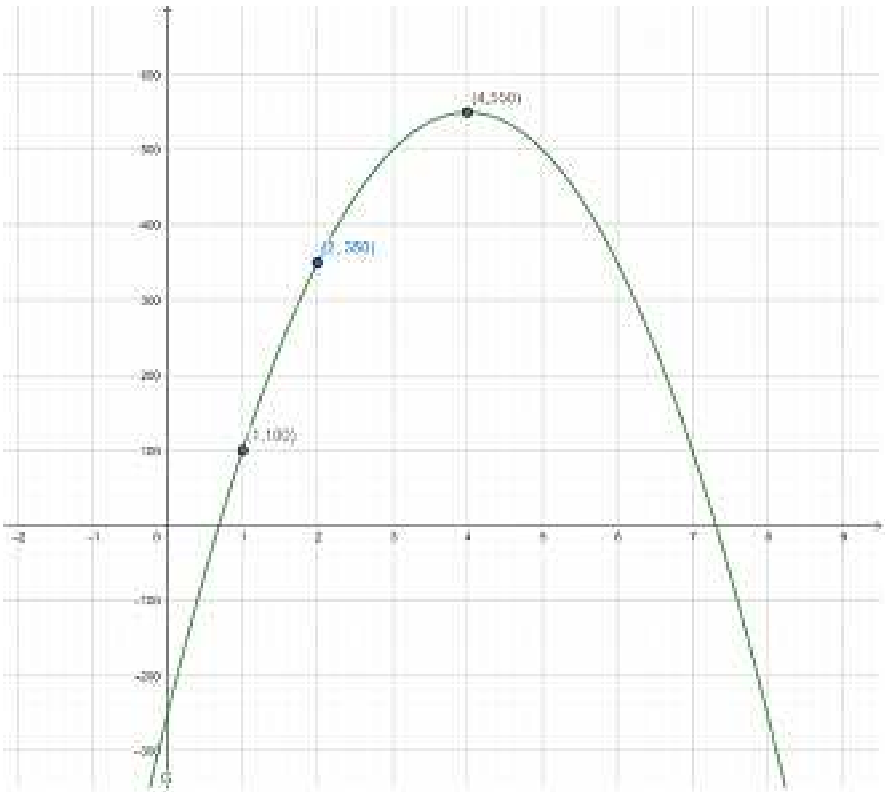
$G\left(4\right)=-50*\left(4\right)^2+400*4-250=550$ euros. (0.25 puntos)

c) El mínimo estará en uno de los extremos del intervalo: (0.25 puntos)

$G\left(1\right)=-50*\left(1\right)^2+400*1-250=100$ euros (0.25 puntos)

$G\left(6\right)=-50*\left(6\right)^2+400*6-250=350$ euros (0.25 puntos)

Se realiza el mínimo gasto el mes de enero. (0.25 puntos)



4. *Consideremos la función:*

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x+5 & si\ x<4\\ \frac{5}{x-3}+2 & si\ 4\le x\le 8\\ -x+b & si\ x>8\end{cases}\quad se\ pide:$$

a) Razona si $f(x)$ es continua en $x=3$. (0.75 ptos)

b) Razona si $f(x)$ es continua en $x=4$. (0.75 ptos)

c) Determina el valor que debe tomar el parámetro b de manera que $f(x)$ sea continua en $x=8$. (1 pto)

Solución:

a) Cuando x = 3 la función f(x) está definida mediante el polinomio $\frac{1}{2}x+5$, que es una función continua en todo su dominio de definición. (0.75 ptos)

b) f(x) está definida en x = 4, y su valor es f(4) = 7. (0.25 ptos)

Los límites laterales son:

$$\lim_{x\to 4^-} f(x)=\lim_{x\to 4^-}\frac{1}{2}x+5=7 \text{ (0.25 ptos)}$$

$$\lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4^+} \frac{5}{x-3} + 2 = 7$$

(0.25 ptos)

c) f(x) está definida en x = 8, y su valor es f(8) = 3. (0.25 ptos)

Los límites laterales son:

$$\lim_{x \to 8^-} f(x) = \lim_{x \to 8^-} \frac{5}{x-3} + 2 = 3 \text{ (0.25 ptos)}$$

$$\lim_{x \to 8^+} f(x) = \lim_{x \to 8^+} -x + b = b - 8 \text{ (0.25 ptos)}$$

Por lo tanto, para que f (x) sea continua en x = 8, es preciso que 3 = b - 8 y en consecuencia b = 11. (0.25 ptos)

5. *En una clase de 27 alumnos, 14 son de Albacete, 5 son de Cuenca y 8 de Toledo.*

a) Se sortean dos entradas entre todos los alumnos, ¿cuál es la probabilidad de que ambas entradas le toquen a alumnos que no son de Albacete? (pueden tocarle al mismo alumno las dos entradas). (1 punto)

b) Si sorteamos 4 entradas, de una en una, de forma que no participa en el sorteo la persona que ya le haya tocado una entrada, ¿cuál es la probabilidad de que las 4 sean para alumnos de Cuenca? (1 punto)

c) Si sorteamos 4 entradas, de una en una, de forma que sí participa en el sorteo la persona que ya le haya tocado una entrada, ¿cuál es la probabilidad de que las 4 sean para alumnos de Cuenca? (0.5 puntos)

Solución:

a) P(AB)=14/27; P(C)=5/27; P(T)=8/27

P(No AB y No Ab)=P(No AB)*P(No AB)=13/27*13/27= 0.23182 (1 punto)

b) P(4 C)=P(1 C)*P(2C/1C)*P(3C/1C y 2C)*P(4C/1C y 2C y 3C)=

=5/27*4/26*3/25*2/24=0.0002849 (1 punto)

c) $P(4C) = (5/27)^4$=0.0011760 (0.5 puntos)

6. *Una determinada medida de una población sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica σ=2. Se toma una muestra aleatoria de tamaño 36 y se calcula la media muestral, siendo esta igual a 22.*

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional con un nivel de confianza del 95 %. (1 pto)

b) ¿Es razonable que la media de la población sea $\mu = 23$, con un nivel de confianza del 95 %? Razona tu respuesta. (1 pto)

c) Obtén un valor razonable para la media poblacional μ con ese mismo nivel de confianza. Razona tu respuesta. (0.5 ptos)

Solución:

a) Del enunciado se deduce: $\bar{x} = 22$; $n = 36$ $\sigma = 2$

1- $\alpha = 0{,}95 Z_{\frac{\alpha}{2}}$=1,96 (0.25 puntos)

IC=($\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$) (0.25 puntos)

IC= (22 - 1,96$\frac{2}{\sqrt{36}}$, 22 + 1,96 $\frac{5{,}2}{\sqrt{40}}$) =(21.34667 , 22.65333) (0.5 puntos)

b) No, ya que 23$\notin$ (21.34667 , 22.65333) (1 punto)

c) Valdría cualquier valor dentro del intervalo (0.5 puntos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767