PRIMERA EVALUACION: ALGEBRA I
(28 de Septiembre de 2017)

1. Sea la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Se pide:

a) Determinar su rango usando el algoritmo de pivotaje (6 puntos).

b) Calcular, la inversa si existe (8 puntos) y el determinante (2 puntos) de la submatriz $\mathbf{B}$ de las filas de la matriz (1) que no dependen linealmente de las anteriores.

c) Decir si los vectores $(1,0,0,0,0),(0,1,0,0,0),(0,0,1,0,0),(0,0,0,1,0),(0,0,0,0,1)$ dependen linealmente de las filas $1,2,3$ y 4 de $\mathbf{A}$ y en caso afirmativo obtener sus componentes ordenadas respecto a ellos (5 puntos).

d) ¿Qué condición deben cumplir las constantes a,b,c y d para que la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sea invertible (5 puntos).

e) Determinar el subespacio ortogonal al subespacio generado por las filas 1, 3 y 4 de $\mathbf{A}$ (4 puntos).

f) Dar las condiciones para que el sistema de ecuaciones (10 puntos)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ b \\ c \\ c \end{pmatrix} \tag{2}$$

sea compatible.

g) Resolver el sistema (10 puntos)

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

NOMBRE Y APELLIDOS ....

1. **Solución Problema 1 (50 puntos):**

<table>
<tr><td>(a) (6 puntos)</td><td>(b1) (8 puntos)</td><td>(b2) (2 puntos)</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>(c) (5 puntos)</td><td>(d) (5 puntos)</td><td>(e) (4 puntos)</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">f (10 puntos)</td><td>g (10 puntos)</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td></td></tr>
</table>

SOLUCIONES A LA PRIMERA EVALUACION: ALGEBRA
(28 de Septiembre de 2017)

SOLUCIÓN PROBLEMA 1

1. **Solución:** Utilizando el algoritmo de pivotaje se obtienen las tablas siguientes:

Iteration 1					
$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{v}_1^1$	$\mathbf{v}_2^1$	$\mathbf{v}_3^1$	$\mathbf{v}_4^1$	$\mathbf{v}_5^1$
1	**1**	0	0	0	0
1	**0**	1	0	0	0
1	**0**	0	1	0	0
0	**0**	0	0	1	0
0	**0**	0	0	0	1
$\mathbf{t}^1$	**1**	1	1	0	0

Iteration 2					
$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{w}_1^2$	$\mathbf{v}_1^2$	$\mathbf{v}_2^2$	$\mathbf{v}_3^2$	$\mathbf{v}_4^2$
1	1	-1	**-1**	0	0
1	0	1	**0**	0	0
0	0	0	**1**	0	0
0	0	0	**0**	1	0
0	0	0	**0**	0	1
$\mathbf{t}^2$	1	0	**-1**	0	0

Iteration 3					
$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{w}_1^3$	$\mathbf{v}_1^3$	$\mathbf{w}_2^3$	$\mathbf{v}_2^3$	$\mathbf{v}_3^3$
0	0	-1	1	**0**	0
0	0	1	0	**0**	0
1	1	0	-1	**0**	0
1	0	0	0	**1**	0
1	0	0	0	**0**	1
$\mathbf{t}^3$	1	0	-1	**1**	1

Iteration 4					
$\mathbf{a}_4$	$\mathbf{w}_1^4$	$\mathbf{v}_1^4$	$\mathbf{w}_2^4$	$\mathbf{w}_3^4$	$\mathbf{v}_2^4$
-1	0	**-1**	1	0	0
0	0	**1**	0	0	0
0	1	**0**	-1	0	0
-2	-1	**0**	1	1	-1
1	0	**0**	0	0	1
$\mathbf{t}^4$	2	**1**	-3	-2	3

Iteration 5					
$\mathbf{a}_5$	$\mathbf{w}_1^5$	$\mathbf{w}_4^5$	$\mathbf{w}_2^5$	$\mathbf{w}_3^5$	$\mathbf{v}_1^5$
0	2	-1	-2	-2	**3**
0	-2	1	3	2	**-3**
0	1	0	-1	0	**0**
0	-1	0	1	1	**-1**
1	0	0	0	0	**1**
$\mathbf{t}^5$	0	0	0	0	**1**

Iteration 6					
$\mathbf{a}_6$	$\mathbf{w}_1^6$	$\mathbf{w}_4^6$	$\mathbf{w}_2^6$	$\mathbf{w}_3^6$	$\mathbf{w}_5^6$
0	2	-1	-2	-2	3
0	-2	1	3	2	-3
1	1	0	-1	0	0
0	-1	0	1	1	-1
0	0	0	0	0	1
$\mathbf{t}^6$	1	0	-1	0	0

Iteration 7					
$\mathbf{a}_7$	$\mathbf{w}_1^7$	$\mathbf{w}_4^7$	$\mathbf{w}_2^7$	$\mathbf{w}_3^7$	$\mathbf{w}_5^7$
1	2	-1	-2	-2	3
1	-2	1	3	2	-3
0	1	0	-1	0	0
0	-1	0	1	1	-1
0	0	0	0	0	1
$\mathbf{t}^7$	0	0	1	0	0

Final Tableau					
	$\mathbf{w}_1$	$\mathbf{w}_4$	$\mathbf{w}_2$	$\mathbf{w}_3$	$\mathbf{w}_5$
	2	-1	-2	-2	3
	-2	1	3	2	-3
	1	0	-1	0	0
	-1	0	1	1	-1
	0	0	0	0	1

1. Puesto que se ha podido pivotar cinco veces, el rango es 5.

2. La inversa existe pues se trata de una matriz 5×5 y su rango es 5. La matriz inversa se saca de la tabla final, cambiando el orden de las columnas según los pivotes, es decir:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   El determinante es -1, es decir, el producto de los pivotes -1 por $(-1)^2$, puesto que hay que hacer 2 intercambios de columnas, debido al pivotaje seleccionado.

3. Si se multiplica la matriz de los vectores por la matriz de la iteración 5, resulta:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Puesto que la columna 5 tiene nulo su tercer elemento, sólo el vector tercero es linealmente dependiente de las filas $1, 2, 3$ y 4 de $\mathbf{A}$.

   Los coeficientes por los que hay que multiplicar esos vectores los dan las columnas 1, 2, 3 y 4 de la fila tercera, que corresponden a las columnas pivote y son: 1 y -1, es decir, el vector (0,0,1,0,0) es igual al vector primero $(1, 1, 1, 0, 0)$ menos el segundo $(1, 1, 0, 0, 0)$.

4. Basta multiplicar escalarmente el vector (a, b, c, d, a) por el vector de la columna 3 de la matriz inversa del apartado (b) y exigir que sea no nulo, resultando: $(a, b, c, d, a) \bullet (-1, 1, 0, 0, 0) = -a + b \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \neq b$.

5. Para obtener el conjunto ortogonal pedido hay que suprimir las columnas pivote (1, 2 y 4) asociadas a las filas indicadas en la Tabla final, resultando:

$$\mathcal{L}((-2, 3, -1, 1, 0), (3, -3, 0, -1, 1)).$$

6. Para estudiar la compatibilidad hay que obtener el subespacio ortogonal del subespacio generado por los vectores columna de los coeficientes. Esto se ha hecho ya en las tablas, resultando (ver Tabla final eliminando las columnas de los pivotes correspondientes, es decir, las columnas 1, 2, 3, y 4):

$$\mathcal{L}((3, -3, 0, -1, 1)).$$

   Multiplicando ahora escalarmente estos vectores y el de términos independientes (a, a, b, c, c) del sistema dado e igualando a cero resulta que se anula, independientemente de los valores de a, b y c, por lo que siempre es compatible.

7. Para resolver este sistema basta eliminar las columnas 1 y 4 en la tabla final y hacer $x_5 = 1$, resultando:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \rho_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \rho_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$