Escuela Técnica Superior de Ingenieros de

Caminos, Canales y Puertos

Universidad de Castilla-La Mancha, Campus de Ciudad Real

Curso Cero-Matemáticas

1. Expresiones y Ecuaciones Algebraicas

1.1 Introducción

Una expresión algebraica es una combinación de números y símbolos alfabéticos ligados por signos de operaciones básicas: adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación. Tres **ejemplos de expresiones algebraicas** son:

- **Ecuaciones de primer grado:** $ax+b=0$, siendo $a \neq 0$, cuya única solución es
$$x = -\frac{b}{a}.$$
- **Ecuaciones de segundo grado:** $ax^2+bx+c=0$, siendo $a \neq 0$, cuyas dos soluciones vienen dadas por la fórmula cuadrática
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$
- **Ecuaciones bicuadradas:** $ax^4+bx^2+c=0$, se resuelven haciendo el cambio $z=x^2$. La ecuación resultante, $az^2+bz+c=0$, que es de segundo grado, tiene por soluciones $z_1 = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ y $z_2 = \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Como $x = \pm\sqrt{z}$, las cuatro soluciones son $x_1 = \sqrt{z_1}$, $x_2 = -\sqrt{z_1}$, $x_3 = \sqrt{z_2}$ y $x_4 = -\sqrt{z_2}$, aunque no todas tienen que ser reales necesariamente.
- **Ecuaciones polinómicas:** tienen la expresión general
$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0,$$
donde los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ son números reales $\mathbb{R}$ o complejos $\mathbb{C}$ y x es la incógnita. El grado n es un número entero positivo (o natural $\mathbb{N}$). Las ecuaciones de primer y segundo grado, junto con las bicuadradas, constituyen casos particulares de las ecuaciones polinómicas con $n=1$, $n=2$ y $n=4$, respectivamente. Las ecuaciones polinómicas de grado n siempre tendrán n raíces, aunque no todas ellas serán necesariamente distintas ni reales.

En diversas ocasiones se pueden **simplificar las expresiones algebraicas** usando alguna de las siguientes técnicas:

- **Completar cuadrados.** Si tenemos un polinomio de segundo grado de la forma ax^2+bx+c, con $a \neq 0$, el objetivo es reescribirlo de la forma equivalente $a(x+p)^2+q$, donde p y q son dos números que deberemos encontrar ajustándolos al polinomio de partida. Esto lo podemos lograr de manera general si efectuamos las siguientes operaciones
$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c = a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]+c \\ &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}\right]+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}. \end{aligned}$$
Vemos pues que $p=\frac{b}{2a}$ y $q=c-\frac{b^2}{4a}$. Por ejemplo, para el polinomio $3x^2-4x-5$, tendríamos que $p=-\frac{2}{3}$ y $q=-\frac{19}{3}$, ya que $a=3$, $b=-4$ y $c=-5$. Luego, $3x^2-4x-5=3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{19}{3}$.

- **Simplificar factores en cocientes.** Por ejemplo, en el cociente de polinomios $\dfrac{x^3-9x}{x^3-6x^2+9x}$ podemos eliminar los factores comunes, siempre que el denominador no se anule, hecho que ocurre si $x \neq 0$ o $x \neq 3$. Así pues, factorizando los polinomios del numerador y del denominador tendremos
$$\frac{x^3-9x}{x^3-6x^2+9x} = \frac{x(x+3)(x-3)}{x(x-3)^2} = \frac{x+3}{x-3}.$$
Recalcamos que hemos simplificado los factores comunes suponiendo que $x \neq 0$ y $x \neq 3$.
Asimismo, cuando aparecen radicales, a veces puede reducirse el cociente multiplicando por el radical conjugado del numerador o del denominador. Por ejemplo, en el siguiente cociente entre radicales
$$\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})} = \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{1} = \sqrt{x+1}+\sqrt{x},$$
donde hemos usado el hecho de que $(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})=(x+1)+\sqrt{x(x+1)}-\sqrt{x(x+1)}-x=(x+1)-x=1$. Es decir, hemos logrado que en el denominador del cociente inicial desaparezcan los términos que involucraban radicales.

- **Regla de Ruffini.** Proporciona un método para realizar la división del polinomio
$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,$$
por el binomio $Q(x)=x-r$. Con ello se obtiene el polinomio cociente
$$R(x)=b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\cdots+b_1x+b_0,$$
y el resto s. Observemos que el grado del polinomio cociente se ha rebajado en una unidad. En el caso en que el resto $s=0$ entonces el binomio $Q(x)$ es un factor del polinomio de partida $P(x)$. Veamos un ejemplo de cómo se puede llevar a cabo la división de los polinomios $P(x)=2x^3+5x^2-7x+4$ y $Q(x)=x+3$. Para ello, el cociente
$$\frac{P(x)}{Q(x)}=R(x)+\frac{s}{Q(x)},$$
lo reescribimos de la manera $P(x)=Q(x)\cdot R(x)+s$. Reemplazamos las expresiones para $P(x)$ y $Q(x)$ y se sigue que
$$2x^3+5x^2-7x+4=(x+3)(b_2x^2+b_1x+b_0)+s.$$

Multiplicando los dos polinomios $Q(x)$ y $R(x)$ obtenemos

$$Q(x)\cdot R(x)+s=b_2x^3+(3b_2+b_1)x^2+(3b_1+b_0)x+3b_0+s,$$

e igualando término a término con $2x^3+5x^2-7x+4$, hallamos que los coeficientes del polinomio $R(x)$ satisfacen $b_2=2$, $3b_2+b_1=5$, $3b_1+b_0=-7$ y $3b_0+s=4$. Se encuentra fácilmente que $b_1=-1$, $b_0=-4$ y $s=16$. Por tanto, el polinomio cociente es $Q(x)=2x^2-x-4$ y el resto de la división $s=16$. Hemos de mencionar que el resto s siempre se puede encontrar directamente de $P(x)=Q(x)\cdot R(x)+s$ sin necesidad de realizar el cociente. Efectivamente, como $Q(x)=x-r$, entonces $Q(r)=0$. Luego, $s=P(r)$. En el ejemplo anterior, al ser $r=-3$, $P(r)=P(-3)=16$, que es precisamente el valor que determinamos para s.

- **Descomposición en fracciones simples.** Descomponer una fracción algebraica $P(x)/Q(x)$ en fracciones simples consiste en encontrar una suma de nuevas fracciones que sea equivalente a la original, pero que tengan por denominadores polinomios más sencillos. Por ejemplo

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{p_1x+p_0}{q_2x^2+q_1x+q_0}=\frac{c_1}{x-r_1}+\frac{c_2}{x-r_2},$$

donde r_1 y r_2 son las raíces del polinomio $Q(x)$ y c_1, c_2 dos números que deben determinarse.

Consideremos ahora otras expresiones algebraicas que también aparecen habitualmente en multitud de aplicaciones; son las llamadas *sumas finitas*. Por conveniencia, supondremos que k y n representan números enteros no negativos, es decir, pueden ser iguales a cero o enteros positivos.

- **Sumas de Progresiones Aritméticas.** Sean a y r números reales. La suma $S(a,r,n)$ de una progresión aritmética de razón r formada por n términos viene dada por la expresión

$$S(a,r,n)=(a+r)+(a+2r)+\cdots+(a+nr)=\sum_{k=1}^{n}(a+rk)=\frac{n\,[2a+(n+1)r]}{2}, \quad (1.1)$$

donde hemos usado el símbolo del sumatorio $\sum_{k=1}^{n}$ en el que el subíndice k recorre, de uno en uno, todos los valores enteros comenzando desde $k=1$ y finalizando en $k=n$. Dicho símbolo proporciona una forma compacta de escribir sumas con muchos términos. Para demostrar la fórmula (1.1), consideremos las sumas $S(0,1,n)=\sum_{k=1}^{n}k$ y $S(0,1,2n)=\sum_{k=1}^{2n}k$. Tenemos

$$S(0,1,2n)=\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=n+1}^{2n}k=\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}(n+k)=\sum_{k=1}^{n}(2k+n)=2S(0,1,n)+n^2, \quad (1.2)$$

donde hemos utilizado el hecho de que $\sum_{k=1}^{n}n=n^2$, esto es, hemos sumado el entero n exactamente n veces. También hemos empleado que $\sum_{k=n+1}^{2n}k=\sum_{k=1}^{n}(n+k)$. Por otro lado,

$$S(0,1,2n)=\sum_{k=1}^{n}2k+\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=\sum_{k=1}^{n}(4k-1)=4S(0,1,n)-n. \quad (1.3)$$

Igualando (1.2) y (1.3) se encuentra que

$$S(0,1,n)=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}. \quad (1.4)$$

Como $S(a,r,n)=\sum_{k=1}^{n}a+r\sum_{k=1}^{n}k=na+rS(0,1,n)$, empleando (1.4) deducimos (1.1). Veamos un ejemplo sencillo. Queremos calcular la suma $1+2+3+\cdots+100=\sum_{k=1}^{100}k$. Este ejemplo corresponde al caso en el que $a=0$, $r=1$ y $n=100$. Sustituyendo en la fórmula (1.1) llegamos a que dicha suma es igual a $S(0,1,100)=\frac{100\cdot 101}{2}=5050$.

- **Sumas de Progresiones Geométricas.** Sean b y q números reales. La suma $G(b,q,n)$ de una progresión geométrica de razón $q\neq 1$ formada por n términos viene dada por la expresión

$$G(b,q,n)=b+bq+bq^2+\cdots+bq^{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}bq^k=\frac{(1-q^n)b}{1-q}. \quad (1.5)$$

Para demostrar la fórmula (1.5), consideremos las sumas $G(1,q,n)$ y $qG(1,q,n)$. Se tiene

$$\begin{aligned} G(1,q,n) &= \sum_{k=0}^{n-1} q^k = 1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}, \\ qG(1,q,n) &= q\sum_{k=0}^{n-1} q^k = q+q^2+q^3+\cdots+q^n. \end{aligned}$$

La diferencia entre ambas expresiones, $G(1,q,n)-qG(1,q,n)$, es igual a

$$(1-q)G(1,q,n) = \left(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}\right) - \left(q+q^2+q^3+\cdots+q^n\right) = 1-q^n,$$

de donde se sigue al dividir que

$$G(1,q,n) = \sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}, \tag{1.6}$$

y de (1.6) se obtiene fácilmente la fórmula (1.5).

Veamos un ejemplo sencillo. Queremos calcular la suma $1+2+2^2+\cdots+2^9 = \sum_{k=0}^{9} 2^k$. Este ejemplo corresponde al caso en el que $b=1$, $q=2$ y $n=10$. Sustituyendo en la fórmula (1.5) llegamos a que dicha suma es igual a $G(1,2,9) = \frac{1-2^{10}}{1-2} = 2^{10}-1 = 1023$.

¿Qué ocurre si la razón $q=1$? En ese caso se observa que la progresión geométrica es

$$G(b,1,n) = b+b\cdot 1+b\cdot 1^2+\cdots+b\cdot 1^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} b\cdot 1^k = \sum_{k=0}^{n-1} b = nb.$$

Para finalizar, indicamos que es muy frecuente encontrar expresiones algebraicas que contienen letras del **alfabeto griego**, las cuales reproducimos por conveniencia en la siguiente tabla:

Minúscula	Mayúscula	Nombre	Minúscula	Mayúscula	Nombre
α	A	alfa	ν	N	nu
β	B	beta	ξ	Ξ	xi
γ	Γ	gamma	o	O	omicrón
δ	Δ	delta	π	Π	pi
ε	E	épsilon	ρ	P	ro
ζ	Z	zeta	σ	Σ	sigma
η	H	eta	τ	T	tau
ι	I	iota	ϕ	Φ	fi
κ	K	kappa	χ	X	chi
λ	Λ	lambda	ψ	Ψ	psi
μ	M	mu	ω	Ω	omega

así como algunos **símbolos matemáticos** importantes:

Símbolo	Significado	Símbolo	Significado
$\mathbb{N}$	Números naturales	$\exists$	existe
$\mathbb{Z}$	Números enteros	$\neq$	distinto de
$\mathbb{Q}$	Números racionales	$\propto$	proporcional a
$\mathbb{R}$	Números reales	$\Rightarrow$	implica
$\mathbb{C}$	Números complejos	$\Leftrightarrow$	equivalente
$\in$	pertenece a	$\forall$	para todo

En las siguientes secciones aparecen diversos problemas resueltos y propuestos (con respuesta) para que trabajes sobre ellos de manera autónoma. Te recomendamos que primero intentes encontrar la solución antes de mirar cómo se resuelven, pues tu aprendizaje será más eficaz.

1.2 Problemas Resueltos

1. Completa los cuadrados de las siguientes expresiones:

a) $\alpha^2+\beta^2-2\alpha$,

b) x^2+2x-y^2-2y-1,

c) $2x^2+2y^2-x+3y+3$,

d) $\gamma^2+\varepsilon^2+\varepsilon$.

Soluciones: *a)* Veamos cómo podemos completar los cuadrados

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2-2\alpha &= \left(\alpha^2-2\alpha\right)+\beta^2=\left(\alpha^2-2\alpha+1-1\right)+\beta^2\\ &= \left(\alpha^2-2\alpha+1\right)+\beta^2-1=(\alpha-1)^2+\beta^2-1.\end{aligned}$$

b) En este caso agrupamos la expresión dada de la siguiente manera

$$\begin{aligned}x^2+2x-y^2-2y-1 &= \left(x^2+2x\right)-\left(y^2+2y+1\right)=\left(x^2+2x+1-1\right)-\left(y^2+2y+1\right)\\ &= \left(x^2+2x+1\right)-(y+1)^2-1=(x+1)^2-(y+1)^2-1.\end{aligned}$$

c) Aquí el agrupamiento es tal vez menos evidente. Podemos proceder así

$$\begin{aligned}2x^2+2y^2-x+3y+3 &= \left(2x^2-x\right)+\left(2y^2+3y\right)+3\\ &= 2\left(x^2-\frac{x}{2}\right)+2\left(y^2+\frac{3y}{2}\right)+3\\ &= 2\left(x^2-\frac{x}{2}+\frac{1}{4^2}-\frac{1}{4^2}\right)+2\left(y^2+\frac{3y}{2}+\frac{3^2}{4^2}-\frac{3^2}{4^2}\right)+3\\ &= 2\left(x^2-\frac{x}{2}+\frac{1}{4^2}\right)+2\left(y^2+\frac{3y}{2}+\frac{3^2}{4^2}\right)+3-\frac{1}{4^2}-\frac{3^2}{4^2}\\ &= 2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+2\left(y+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{19}{8}.\end{aligned}$$

d) De manera similar a los casos previos, agrupamos

$$\begin{aligned}\gamma^2+\varepsilon^2+\varepsilon &= \gamma^2+\left(\varepsilon^2+\varepsilon\right)=\gamma^2+\left(\varepsilon^2+\varepsilon+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)\\ &= \gamma^2+\left(\varepsilon^2+\varepsilon+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}=\gamma^2+\left(\varepsilon+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

2. Opera y reduce todo lo que puedas el siguiente cociente:

$$\frac{x^2+2x+1}{x^2-1}.$$

Solución: El polinomio del numerador es un cuadrado perfecto. De tal modo que $x^2+2x+1=(x+1)^2$. Por otro lado, el polinomio del denominador se puede factorizar como $x^2-1=(x+1)(x-1)$. Así pues, obtenemos que

$$\frac{x^2+2x+1}{x^2-1}=\frac{(x+1)^2}{(x+1)(x-1)}=\frac{x+1}{x-1},$$

donde hemos supuesto, al cancelar el factor común $x+1$, que $x\neq-1$.

3. Determina los valores de r_1, r_2, A y B de modo que:

$$\frac{x}{x^2+2x-3} = \frac{A}{x-r_1} + \frac{B}{x-r_2}\,.$$

Solución: Observemos que el polinomio del denominador se puede factorizar $x^2+2x-3 = (x-1)(x+3)$. Comenzamos multiplicando por $(x-1)(x+3)$ a ambos lados de la expresión

$$x = \frac{A(x-1)(x+3)}{x-r_1} + \frac{B(x-1)(x+3)}{x-r_2}\,.$$

Si elegimos $r_1 = 1$ y $r_2 = -3$, entonces la expresión se reduce a $x = A(x+3)+B(x-1)$, que es equivalente a $x = (A+B)x+3A-B$. Para que ambos lados de la ecuación sean idénticos es necesario que $A+B = 1$ y $3A-B = 0$. Resolviendo este sistema concluimos que los valores buscados son $A = \frac{1}{4}$ y $B = \frac{3}{4}$.

4. Halla todas las raíces reales de las siguientes ecuaciones:

a) $x^5-5x^3+4x = 0$. *b)* $x^3+x^2-2 = 0$. *c)* $(x+1)^4+(x-1)^4-4 = 0$.

Soluciones: *a)* Factorizando el polinomio de quinto grado obtenemos que

$$x^5-5x^3+4x = x\left(x^4-5x^2+4\right) = x\left(x^2-4\right)\left(x^2-1\right) = x\,(x-2)\,(x+2)\,(x-1)\,(x+1)\,.$$

Por tanto, al igualar a cero el polinomio dado, $x^5-5x^3+4x = 0$, se encuentra fácilmente que las cinco raíces son

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = -2, \quad x_4 = 1, \quad x_5 = -1.$$

Observamos que, en este caso, las cinco raíces son reales.

b) Para el polinomio de tercer grado $P(x) = x^3+x^2-2$ aplicamos la regla de Ruffini. Es decir, dividimos $P(x)$ por el binomio $Q(x) = x-r$, con lo que obtendremos el polinomio cociente $R(x) = x^2+ax+b$. En este caso, como buscamos que $x = r$ sea una raíz de $P(x)$, el resto s resultante de dividir $P(x)$ por $Q(x)$ ha de ser cero. Tenemos pues

$$P(x) = Q(x)\cdot R(x)+s \quad \Rightarrow x^3+x^2-2 = (x-r)\left(x^2+ax+b\right)+s.$$

Desarrollando el producto del lado derecho e imponiendo que el resto $s = 0$, se sigue que

$$x^3+x^2-2 = x^3+(a-r)x^2+(b-ar)x-br.$$

Identificando coeficientes a los dos lados para que ambas expresiones sean iguales, resulta

$$a-r = 1, \quad b-ar = 0, \quad br = 2.$$

A partir de la última ecuación, $br = 2$, podemos utilizar dos valores de prueba $r = 1$ y $b = 2$ con objeto de determinar si también satisfacen las otras dos ecuaciones, con lo que, además, hallaríamos el valor de a. Tendríamos que si $r = 1$ y $b = 2$, entonces $a-1 = 1$ y $2-a = 0$. Estas dos ecuaciones se verifican para $a = 2$. Así pues, hemos encontrado que $x = 1$ es una raíz del polinomio $P(x) = x^3+x^2-2$, el cual quedaría factorizado de la siguiente manera

$$P(x) = (x-1)\left(x^2+2x+2\right).$$

La ecuación $x^2+2x+2 = 0$ no tiene raíces reales. Concluimos que $x = 1$ es la única raíz del polinomio $P(x) = x^3+x^2-2$.

c) La ecuación $(x+1)^4+(x-1)^4-4=0$ involucra las potencias de grado cuatro de los binomios $x+1$ y $x-1$. Las desarrollamos

$$(x+1)^4 = x^4+4x^3+6x^2+4x+1, \quad (x-1)^4 = x^4-4x^3+6x^2-4x+1.$$

Al sumarlas y simplificar términos obtenemos

$$(x+1)^4+(x-1)^4 = 2x^4+12x^2+2.$$

Por tanto, llegamos a que la ecuación de partida $(x+1)^4+(x-1)^4-4=0$ es igual a la siguiente ecuación bicuadrada

$$2x^4+12x^2-2=0.$$

Tal y como hemos visto, este tipo de ecuaciones se resuelven haciendo el cambio $z=x^2$. La ecuación resultante es $2z^2+12z-2=0$, o equivalentemente, $z^2+6z-1=0$ tras cancelar el factor común. Esta última ecuación tiene las siguientes dos raíces reales

$$z_1=-3+\sqrt{10}, \quad z_2=-3-\sqrt{10}.$$

Deshaciendo el cambio, $x=\pm\sqrt{z}$, las únicas soluciones reales de la ecuación $(x+1)^4+(x-1)^4-4=0$ son las que provienen de z_1, ya que es positiva

$$x_1=\sqrt{z_1}=\sqrt{-3+\sqrt{10}}, \quad x_2=-\sqrt{-3+\sqrt{10}},$$

mientras que al ser z_2 negativa, daría lugar a raíces complejas.

5. Dado el polinomio $P(x)=3x^3+(k-1)x^2-k-2$, para cualquier valor de $k\in\mathbb{R}$, prueba que $P(x)+6$ es divisible por $x+1$.

Solución: Podemos escribir $P(x)+6=(x+1)R(x)+a$, donde $R(x)$ es un polinomio y $a\in\mathbb{R}$. Si $P(x)+6$ es divisible por $x+1$, entonces $P(-1)+6=a$. Luego $a=0$. Evaluamos en $x=-1$, de donde se sigue que $P(-1)+6=\left[3(-1)^3+(k-1)(-1)^2-k-2\right]+6=0$. Por tanto, concluimos que $P(x)+6$ es divisible por $x+1$.

6. Obtener todas las soluciones reales de la ecuación polinómica:
$2x^{99}+3x^{98}+2x^{97}+3x^{96}+\cdots+2x^3+3x^2+2x+3=0.$

Solución: El polinomio dado se puede escribir como

$$\begin{aligned}
&2x^{99}+3x^{98}+2x^{97}+3x^{96}+\cdots+2x^3+3x^2+2x+3\\
&\qquad = \left(2x^{99}+2x^{97}+\cdots+2x^3+2x\right)+\left(3x^{98}+3x^{96}+\cdots+3x^2+3\right)\\
&\qquad = 2x\left(x^{98}+x^{96}+\cdots+x^2+1\right)+3\left(x^{98}+x^{96}+\cdots+x^2+1\right)\\
&\qquad = (2x+3)\left(x^{98}+x^{96}+\cdots+x^2+1\right)
\end{aligned}$$

Puesto que el polinomio $1+x^2+x^4+\cdots+x^{98}$ no tiene raíces reales porque todos sus términos son potencias pares con coeficientes positivos, se concluye que la única raíz real es la que anula al factor $2x+3$. Es decir, $x=-\dfrac{3}{2}$.

1.3 Problemas Propuestos

1. Simplifica las siguientes expresiones sin utilizar la calculadora:

a) $\dfrac{\sqrt{3}\sqrt[3]{3}\sqrt[5]{3}}{\sqrt[4]{3^3}}$,

b) $\dfrac{2\sqrt[3]{81}-3\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{192}}{\sqrt[3]{3}}$,

c) $\sqrt[3]{\frac{2}{5}\sqrt{\frac{5}{2}\sqrt{\frac{2}{5}}}}$.

Respuestas:

a) $\sqrt[60]{3^{17}}$.

b) 4.

c) $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{\frac{1}{4}}$.

2. Opera y reduce todo lo que puedas los siguientes cocientes:

a) $\dfrac{x}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}}$,

b) $\dfrac{\dfrac{5x}{x-1}-\dfrac{2x+3}{x-2}}{\dfrac{x-5}{x-2}}$.

Respuestas:

a) $\dfrac{x(2x+1)}{3x+2}$.

b) $\dfrac{3x^2-11x+3}{(x-5)(x-1)}$.

3. Determina los valores de A y B de modo que:

a) $\dfrac{x^2+3}{x-1}=Ax+B+\dfrac{4}{x-1}$.

Respuestas: $A=1$ y $B=1$.

4. Opera y reduce todo lo que puedas las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-1}$,

b) $\dfrac{x}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}}$,

c) $\dfrac{\dfrac{5x}{x-1}-\dfrac{2x+3}{x-2}}{\dfrac{x-5}{x-2}}$.

Respuestas:

a) $\dfrac{x+1}{x-1}$.

b) $\dfrac{x(2x+1)}{3x+2}$.

c) $\dfrac{3x^2-11x+3}{(x-5)(x-1)}$.

5. Halla todas las raíces reales de las siguientes ecuaciones:

a) $\dfrac{1}{x^2-4} = \dfrac{1}{x+2} + \dfrac{1}{x-2}$,

b) $\sqrt{x^2-1} = x-1$,

c) $x^5 - 2x^4 + x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$,

Respuestas:

a) $x = \dfrac{1}{2}$.

b) $x = 1$.

c) $x = 2$.

6. Un polinomio $P(x)$ dividido por $(x-2)^2$ da $ax+b$ con resto 0; dividido por $x+1$ y por x da resto 18 y 4, respectivamente. Calcula el polinomio $P(x)$.

Respuesta: De la primera condición tenemos que $P(x) = (x-2)^2(ax+b)$. De la segunda y tercera condición se sigue que $P(x) = Q(x)(x+1)+18$ y $P(x) = R(x)x+4$, respectivamente. Concluimos que $P(x) = (x-2)^2(1-x)$.

7. Sea n un número entero positivo. Simplifica todo lo que puedas el siguiente sumatorio:

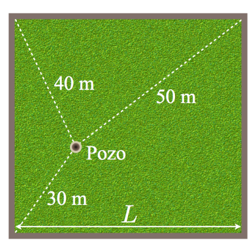
$$S = \sum_{k=1}^{n} \left[(k+1)^3 - k^3\right]$$

Respuesta: $S = (n+1)^3 - 1$

8. En el preciso instante en el que la aguja minutero de un reloj pasa por la marca de las doce, una hormiga sale de la marca del seis y avanza en sentido antihorario, a paso constante, por el borde del reloj. Al encontrarse con la aguja minutero, la hormiga se da la vuelta y, con la misma velocidad que llevaba, huye en sentido horario, sin desviarse de la circunferencia del reloj. Al cabo de 45 minutos del primer encuentro con la aguja minutero, la hormiga vuelve a toparse con la aguja por segunda vez. ¿Cuánto tiempo estuvo caminando la hormiga?

Respuesta: Sea t_1 tiempo que transcurre hasta el primer encuentro entre la hormiga y la aguja del minutero, contado a partir del momento en que la hormiga comienza a moverse. Se produce un segundo encuentro al cabo de 45 minutos. Por tanto, el tiempo total que camina la hormiga es $t_T = t_1 + 45$. Se cumple, además, que el cociente entre las velocidades de la hormiga y del minutero satisfacen $\frac{t_1}{30-t_1} = \frac{45}{105}$. De donde se obtiene que $t_1 = 9$ minutos. Luego concluimos que el tiempo que estuvo caminando la hormiga fue de $t_T = 54$ minutos.

9. Un monasterio medieval fue construido alrededor de un claustro con planta cuadrada. En el jardín del claustro se hallaba el pozo que abastecía de agua a los monjes. El pozo estaba situado de tal modo que las distancias de éste a tres de las esquinas del claustro eran de 30 m, 40 m y 50 m, respectivamente (ver figura adjunta). Calcula la longitud L de uno de los lados del claustro.



Respuesta: Aplicando el Teorema de Pitágoras a los distintos triángulos que surgen a partir de los vértices del claustro y el pozo, se deduce la siguiente ecuación bicuadrada para la incógnita L, dada por $2L^4 - 6800L^2 + 1300000 = 0$. La solución pedida es $L = 10\sqrt{17+4\sqrt{14}} = 56.54$ m. El otro valor positivo sería $L = 10\sqrt{17-4\sqrt{14}} = 14.26$ m, pero no es admisible por ser demasiado pequeño en relación con las distancias que aparecen en el problema.