Pruebas de Acceso para Mayores de 25 Años
Convocatoria de 2021

UCLM
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

Materia: MATEMÁTICAS

Instrucciones: El estudiante deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. **Dentro de la opción seleccionada, el estudiante elegirá CUATRO ejercicios entre los seis propuestos.** Si respondiese a más, se corregirán solo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos. Duración de la prueba: 90 minutos.

PROPUESTA A

A1. *a*) **[1 punto]** Sabiendo que A es una matriz invertible cuadrada de orden 2, despeja, si es posible, X en la ecuación matricial $2X - A = XA$.

b) **[1,5 puntos]** Halla el valor de X para

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Solución:

a) La ecuación se despejaría así:

$$2X - A = XA;\ 2X - XA = A;\ X(2I - A) = A;\ X = A(2I - A)^{-1}$$

donde I es la matriz identidad. En esta ecuación X se puede despejar si la matrix $(2I - A)$ es invertible.

Criterios de corrección:

- Dar la solución final 0,25, despejar correctamente X 0,25, justificar todos los cálculos 0,5.

b) Para el caso concreto de A tenemos:

$$(2I - A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix};\ (2I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix};\ X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Criterios de corrección:

- Dar la solución final 0,25, calcular $2I - A$ 0,25, calcular $(2I - A)^{-1}$ 0,5, justificar todos los cálculos razonadamente 0,5.

A2. *a*) **[1,25 puntos]** Clasifica razonadamente el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & - & z & = & 1 \\ 2x & & & + & 2z & = & 2 \\ & & 2y & + & 3z & = & 0 \end{array}\right. .$$

b) **[1,25 puntos]** Resuélvelo, si es posible, explicando el método utilizado.

Solución:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix};\ AM = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

$Rg(A) = Rg(AM) = 3 =$ número de incógnitas, es un SCD.

Criterios de corrección:

- Cálculo del rango sin justificar 0,25, justificación 0,25.
- Decir que es un sistema compatible determinado 0,25, justificado 0,5. Si se equivoca en el rango no tenerlo en cuenta y valorar el resto.

b) Solución del sistema: $x = 1, y = 0, z = 0$.

Criterios de corrección:

- Decir el método de resolución 0,25, realizar los cálculos justificados 0,75.
- Dar la solución final 0,25.

A3. Dados los puntos $A(1, 0, 1)$ y $B(-1, 0, 0)$, calcula:

a) **[1,25 puntos]** La ecuación de la recta que pasa por A y B.

b) **[1,25 puntos]** Un plano perpendicular a la recta anterior y que contenga al punto A.

Solución:

a) La recta que pasa por A y B contiene a los dos puntos y tiene como vector director el vector $\vec{AB} = (-2, 0, -1)$. Por tanto, la ecuación paramétrica de la recta es:

$$(x, y, z) = (1, 0, 1) + \lambda(-2, 0, -1) = (1 - 2\lambda, 0, 1 - \lambda), \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Criterios de corrección:

- Dar la solución final 0,25, calcular bien el vector director 0,5, justificar los cálculos 0,5.

b) El plano perpendicular a la recta anterior tiene como vector normal el vector $\vec{AB} = (-2, 0, -1)$. Por tanto, tomamos $-2x + 0y - z = K$; $-2x - z = K$, con K una constante que calculamos sabiendo que el punto A pertenece al plano: $K = -2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -3$.
Por tanto, la ecuación del plano es $-2x - z = -3$.

Criterios de corrección:

- Dar la solución final 0,25, justificar los cálculos 0,5, realizar los cálculos correctamente, 0,5.

A4. *a*) [**1,5 puntos**] Calcula $a, b \in$ para que la función sea continua y derivable

$$f(x) = \begin{cases} 1 + e^{x-1} & si \quad x \leq 1 \\ ax + b & si \quad x > 1 \end{cases}$$

b) [**1 punto**] Calcula la recta tangente a la gráfica de la función en $x = 0$.

Solución:

a) Para que la función sea continua se tiene que cumplir:

$$f(1) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x).$$

- $f(1) = 1 + e^{1-1} = 1 + e^0 = 1 + 1 = 2$.
- $\lim_{x \to 1^-} f(x) = f(1) = 2$.
- $\lim_{x \to 1^+} f(x) = a \cdot 1 + b = a + b$.

Por tanto, para que $f(x)$ sea continua se ha de cumplir que $a + b = 2$.
Para que la función sea derivable en $x = 1$, los límites laterales de las derivadas tienen que coincidir:

$$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1^+} f'(x).$$

- $\lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1^-} e^{x-1} = e^{1-1} = e^0 = 1$.
- $\lim_{x \to 1^+} f'(x) = \lim_{x \to 1^+} a = a$.

Por tanto, se ha de cumplir que $a = 1$. Despejando b de la primera ecuación obtenemos que $b = 1$.

Criterios de corrección:

- Plantear las condiciones de continuidad 0,25, plantear las condiciones de derivabilidad 0,25, obtener a y b 0,5, realizar los cálculos correctamente 0,25, plantear razonadamente todos los pasos 0,25.

b) Cuando $x \leq 1$ la derivada de la función es $f'(x) = e^{x-1}$. Por tanto, $f'(0) = e^{0-1} = e^{-1}$. Además, $f(0) = 1 + e^{0-1} = 1 + e^{-1}$. Así, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en $x = 0$ es:

$$y = 1 + e^{-1} + e^{-1}(x - 0) = 1 + e^{-1}(x + 1).$$

Criterios de corrección:

- Calcular $f^{'}(x)$ 0,25, dar la ecuación de la recta tangente 0,25, realizar los cálculos correctamente 0,25, plantear razonadamente todos los pasos 0,25.

A5. Halla las siguientes integrales indicando el método utilizado:

a) [**1,25 puntos** $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2 - 6x + 9} \, dx.$ *b*) [**1,25 puntos** $\displaystyle\int x^3 \ln(x) \, dx.$

Solución:

a) Esta integral se puede descomponer como la suma de una integral inmediata de tipo logaritmo neperiano más una en la que hay que descomponer el denominador:

$$\int \frac{x-1}{x^2 - 6x + 9} \, dx = \int \frac{1}{2} \frac{2x - 2 \cdot 1 - 6 + 6}{x^2 - 6x + 9} \, dx =$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{2x - 6}{x^2 - 6x + 9} \, dx + \frac{1}{2} \int \frac{-2 \cdot 1 + 6}{x^2 - 6x + 9} \, dx = \ln|x - 3| - \frac{2}{x - 3} + C.$$

Criterios de corrección:

- Dar la solución final 0,25, descomponer el integrando correctamente 0,5, realizar las operaciones correctamente 0,5.

b) Esta integral se resuelve usando integración por partes con $u = \ln(x)$ y $dv = x^3$:

$$\int x^3 \ln(x)\ dx = \frac{x^4\ \ln x}{4} - \frac{x^4}{16} + C.$$

Criterios de corrección:

- Dar la solución final 0,25, identificar integración por partes 0,25, aplicarlo correctamente 0,25, realizar los cálculos correctamente 0,5.

A6. *a*) El 75 % de los habitantes de la región de Bruselas son francófonos y el resto neerlandófonos. El 90 % de los neerlandófonos y el 60 % de los francófonos hablan, además, inglés. Preguntamos por la calle una dirección a un bruselense al azar.

a.1) [**0,5 puntos**] ¿Cuál es la probabilidad de que hable inglés?

a.2) [**0,75 puntos**] Si resulta que habla inglés, ¿cuál es la probabilidad de que sea francófono?

b) En un juego de azar, la probabilidad de obtener algún premio es del 10 %. Si una persona juega cada día de lunes a viernes, halla la probabilidad de que en una semana:

b.1) [**0,5 puntos**] No gane ningún día.

b.2) [**0,75 puntos**] Gane por lo menos dos días.

n	**k** \ **p**	**0.05**	**0.10**	**0.15**	**0.20**	**0.25**	**0.30**	**0.35**	**0.40**	**0.45**	**0.50**
5	**0**	0.7738	0.5905	0.4437	0.3277	0.2373	0.1681	0.1160	0.0778	0.0503	0.0312
	1	0.2036	0.3280	0.3915	0.4096	0.3955	0.3601	0.3124	0.2592	0.2059	0.1562
	2	0.0214	0.0729	0.1382	0.2048	0.2637	0.3087	0.3364	0.3456	0.3369	0.3125
	3	0.0011	0.0081	0.0244	0.0512	0.0879	0.1323	0.1811	0.2304	0.2757	0.3125
	4	0.0000	0.0005	0.0022	0.0064	0.0146	0.0284	0.0488	0.0768	0.1128	0.1562
	5	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0010	0.0024	0.0053	0.0102	0.0185	0.0312

Solución:

a) Sea F el suceso que un habitante sea francófono, N que sea neerlandófono y I que hable inglés.

a.1) Utilizando la regla de la probabilidad total tenemos:

$$P(I) = P(I \cap F) + P(I \cap N) = P(I \mid F)P(F) + P(I \mid N)P(N) = 0{,}60 \cdot 0{,}75 + 0{,}90 \cdot 0{,}25 = 0{,}6750.$$

Criterios de corrección:

- Dar la solución final 0,25, plantear razonadamente el problema 0,25.

a.2) Aplicando el teorema de bayes tenemos:

$$P(F \mid I) = P(I \cap F)/P(I) = P(I \mid F)P(F)/P(I) = (0{,}60 \cdot 0{,}75)/0{,}6750 = 0{,}6667.$$

Criterios de corrección:

- Dar la solución final 0,25, plantear razonadamente 0,5.

b) Sea X el suceso que representa el número de premios obtenidos de lunes a viernes. Su distribución es una binomial de $n = 5$ y $p = 0{,}10$.

b.1) $P(X = 0) = 0{,}5905$ (mirando en la tabla).

Criterios de corrección:

- Dar la solución final 0,25, plantear razonadamente 0,25.

b.2) $P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 0{,}0815$ (mirando en la tabla).

Criterios de corrección:

- Dar la solución final 0,25, plantear razonadamente 0,5.

Pruebas de Acceso para Mayores de 25 Años
Convocatoria de 2021

Materia: MATEMÁTICAS

UCLM
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

Instrucciones: El estudiante deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. **Dentro de la opción seleccionada, el estudiante elegirá CUATRO ejercicios entre los seis propuestos.** Si respondiese a más, se corregirán solo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos. Duración de la prueba: 90 minutos.

PROPUESTA B

B1. *a*) **[1,25 puntos]** Clasifica el sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 75 \\ x + 2y + 3z = 145 \\ \phantom{x +{}} y + 2z = 70 \end{cases}.$$

b) **[1,25 puntos]** Resuélvelo, si es posible, explicando el método utilizado.

Solución:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $AM = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 75 \\ 1 & 2 & 3 & 145 \\ 0 & 1 & 2 & 70 \end{pmatrix}$

$Rg(A) = Rg(AM) = 2 <$ número de incógnitas, es un sistema compatible indeterminado.

Criterios de corrección:

- Cálculo del rango sin justificar 0,25, justificación 0,25.
- Decir que es un sistema compatible indeterminado 0,25, justificado 0,5. Si se equivoca en el rango no tenerlo en cuenta y valorar el resto.

b) Solución del sistema: $x = t + 5, y = 70 - 2t, z = t$.

Criterios de corrección:

- Decir el método de resolución 0,25, realizar los cálculos justificados 0,75.
- Dar la solución final 0,25.

B2. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) **[1,25 puntos]** Comprueba que $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.

b) **[1,25 puntos]** Calcula la inversa de la matriz B.

Solución:

a) $|A| = -9$, $|B| = -2$ y $|A \cdot B| = 18$. Además,

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Criterios de corrección:

- Calcular $|A|$ 0,25, calcular $|B|$ 0,25, calcular $A \cdot B$ 0,25, calcular $|A \cdot B|$ 0,25, justificar todos los cálculos razonadamente 0,25.

b) La matriz que se pide es

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Criterios de corrección:

- Dar la solución final 0,25, calcular la matriz de adjunta 0,5, justificar todos los cálculos razonadamente 0,5.

B3. *a*) **[1,25 puntos]** Halla el plano que contiene a la recta $r \equiv \begin{cases} x+y=0 \\ z=5 \end{cases}$ y pasa por el punto $A(2,0,-5)$.

b) **[1,25 puntos]** Halla el plano perpendicular a la recta r y que contiene al punto A.

Solución:

a) Tomamos de la recta dos puntos, por ejemplo, $B(0,0,5)$ y $C(1,-1,5)$. El plano estará definido por el punto A, y los vectores directores $\vec{AB}=(-2,0,10)$ y $\vec{AC}=(-1,-1,10)$, por ejemplo. Así, la ecuación paramétrica del plano es

$$(x,y,z)=A+\lambda\vec{AB}+\gamma\vec{AC}=(-2\,\lambda-\gamma+2,-\gamma,10\,\lambda+10\,\gamma-5),\ \ \lambda,\gamma\in\mathbb{R}.$$

<u>**Criterios de corrección:**</u>

- Dar la solución final 0,25, justificar los cálculos 0,5, realizar los cálculos correctamente, 0,5.

b) El plano perpendicular a la recta r tiene como vector director el vector $\vec{BC}=(1,-1,0)$, por ejemplo. Por tanto, la ecuación del plano es $1\cdot x+(-1)\cdot y+0\cdot z=K$, donde $K=A\cdot\vec{BC}=1\cdot 1+(-1)\cdot(-1)+0\cdot 0=2$. Por tanto, la ecuación del plano es $x-y=2$.

<u>**Criterios de corrección:**</u>

- Dar la solución final 0,25, justificar los cálculos 0,5, realizar los cálculos correctamente, 0,5.

B4. *a*) **[1,25 puntos]** Estudia la continuidad en $\mathbb{R}$ de la función

$$f(x)=\frac{e^{(x-2)}-1}{4-2x}$$

b) **[1,25 puntos]** Calcula la recta normal a la gráfica de la función en $x=0$.

Solución:

a) La función es cociente de funciones continuas, así que está definida en todos los puntos en los que no se anule el denominador. El denominador se anula en $x=2$, por lo que no podrá ser continua en este punto. Estudiaremos los límites laterales para ver qué tipo de discontinuidad es:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\frac{0}{0},\ \text{indeterminación.}$$

Aplicando la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{e^{(x-2)}}{-2}=\frac{e^{(2-2)}}{-2}=\frac{e^0}{-2}=-1/2.$$

El límite por la derecha se realiza de manera similar. Por tanto, se trata de una discontinuidad evitable.

<u>**Criterios de corrección:**</u>

- Identificar puntos de posible discontinuidad 0,25, cálculo de los límites laterales 0,5, realizar los cálculos correctamente 0,25, plantear razonadamente todos los pasos 0,25.

b) La derivada de la función es

$$f'(x)=-\frac{(x-3)\ e^{x-2}+1}{2\,x^2-8\,x+8}.$$

Por tanto, $f'(0)=-\frac{(0-3)e^{0-2}+1}{2\cdot 0^2-8\cdot 0+8}=\frac{+3e^{-2}-1}{8}=-0{,}0742$. Además, $f(0)=\frac{e^{-2}-1}{4}$. Por tanto, la ecuación de la recta normal es

$$y=\frac{e^{-2}-1}{4}+(-\frac{3e^{-2}-1}{8})^{-1}(x-0)=\frac{e^{-2}-1}{4}-\frac{8}{3e^{-2}-1}x.$$

<u>**Criterios de corrección:**</u>

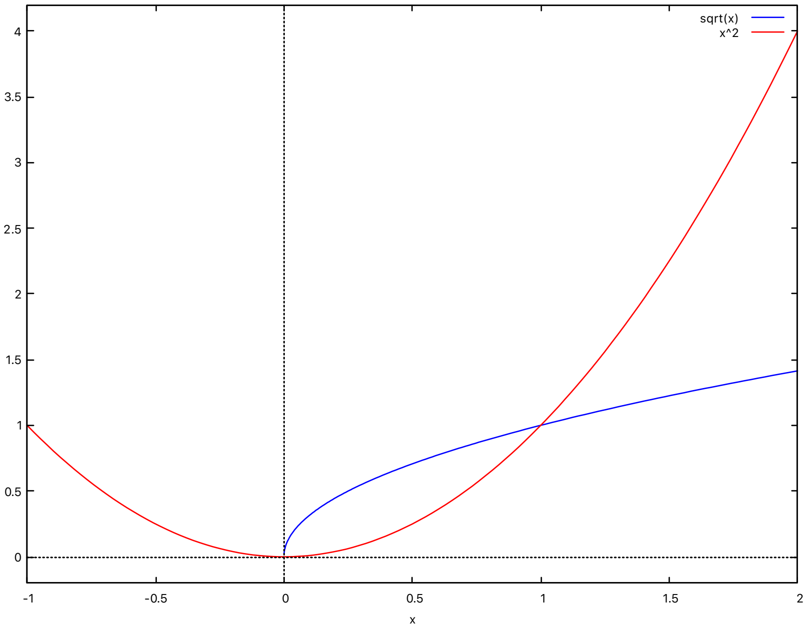
- Calcular $f^{'}(x)$ 0,5, dar la ecuación de la recta tangente 0,25, realizar los cálculos correctamente 0,25, plantear razonadamente todos los pasos 0,25. Si se equivoca en el cálculo de la derivada, considerar el resto de puntos como si esta fuera correcta.

B5. *a*) **[1,5 puntos]** Encuentra el área del recinto encerrado por las funciones $f(x)=\sqrt{x}$ y $g(x)=x^2$.

b) **[1 punto]** Calcula la integral $\displaystyle\int (x+1)e^{x-1}dx$.

Solución:

a) La siguiente gráfica muestra las dos funciones:



Como las funciones se cortan en $x = 0$ y $x = 1$ el área que se pide viene dada por

$$\int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = [\frac{2\,x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^3}{3}]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Criterios de corrección:

- Dar la solución final 0,25, plantear el problema correctamente 0,5, determinar el intervalo de integración 0,5, realizar los cálculos correctamente 0,25.

b) La integral que se pide se puede hacer usando integración por partes tomando $u = x + 1$ y $dv = e^{-1}dx$:

$$\int (x+1)e^{x-1}dx = (x-1)\ e^{x-1} + e^{x-1} + C = xe^{x-1} + C.$$

Criterios de corrección:

- Dar la solución final 0,25, identificar integración por partes 0,25, aplicarlo correctamente 0,25, realizar los cálculos correctamente 0,25.

B6. *a*) Una caja contiene una bola blanca y otra negra. Se saca una bola al azar y se mete en una bolsa en la que había ya 3 bolas blancas. Extraemos una bola de la bolsa.

a.1) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que sea blanca?

a.2) **[0,75 puntos]** Si la bola extraída de la bolsa es blanca, ¿cuál es la probabilidad de que la bola que se pasó de la caja a la bolsa fuera negra?

b) El tiempo que un alfarero tarda en elaborar una jarra se distribuye normalmente con una media de 20 minutos y una desviación típica de 4 minutos. Calcula la probabilidad de que una jarra cualquiera:

b.1) **[0,5 puntos]** Le haya llevado menos de 25 minutos.

b.2) **[0,75 puntos]** Le haya llevado entre 25 y 30 minutos.

a	**0.00**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
1.20	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.30	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.40	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.50	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
2.00	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.10	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.20	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.30	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.40	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.50	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952

Solución:

a) Sean B_c y N_c los sucesos sacar una bola blanca o negra, respectivamente, de la caja. Sean B_b y N_b los sucesos sacar una bola blanca o negra, respectivamente, de la bolsa. Tenemos que $P(B_c) = P(N_c) = 0{,}5$ y que $P(B_b \mid B_c) = 1$, $P(B_b \mid N_c) = 3/4$, $P(N_b \mid B_c) = 0$, $P(N_b \mid N_c) = 1/4$.

a.1) $P(B_b) = P(B_c)P(B_b \mid B_c) + P(N_c)P(B_b \mid N_c) = 0{,}5 \cdot 1 + 0{,}5 \cdot 0{,}75 = 0{,}875.$

Criterios de corrección:

- Dar la solución final 0,25, plantear razonadamente el problema 0,25.

a.2) $P(N_c \mid B_b) = P(N_c \cap B_b)/P(B_b) = P(N_c)P(B_b \mid N_c)/P(B_b) = 0{,}5 \cdot 0{,}75/0{,}875 = 0{,}4286.$

Criterios de corrección:

- Dar la solución final 0,25, plantear razonadamente 0,5.

b) Sea X la variable aleatoria que representa el tiempo que tarda el alfarero en elaborar una jarra. Su distribución es normal con media 20 y desviación típica 4.

b.1) $P(X < 25) = P(Z < (25 - 20)/4) = P(Z < 1{,}25) = 0{,}8944.$

Criterios de corrección:

- Dar la solución final 0,25, plantear razonadamente 0,25.

b.2) $P(25 < X < 30) = P(X < 30) - P(X < 25) = P(Z < 2{,}5) - P(Z < 1{,}25) = 0{,}9938 - 0{,}8944 = 0{,}994.$

Criterios de corrección:

- Dar la solución final 0,25, plantear razonadamente 0,5.