

TEMA 3.- TORSIÓN. CALCULO DE ARBOLES Y EJES.

INTRODUCCIÓN

El término *árbol* se usa para referirse a un elemento giratorio que a una velocidad de rotación determinada transmite una potencia.

El termino *eje* se utiliza para definir una pieza estacionaria sobre la que hay montadas ruedas giratorias.

Un *árbol de transmisión* llamado también *árbol principal* es aquel que recibe la potencia de una máquina motriz y la transmite a maquinas conectadas a el por medio de correas, cadenas o engranajes.

El hecho de transmitir una potencia desde un motor implica una velocidad angular (que debe expresarse en radianes/segundo) y un par que genera en el árbol la denominada *torsión*.

En general se dice que cuando un miembro estructural se carga con momentos que producen rotación alrededor de su eje longitudinal se produce torsión. Este tipo de solicitaciones se presentan en la Figura 1, en la que cada pareja de fuerzas genera un par de fuerzas o momento de valor igual al producto de las fuerzas por la distancia entre sus líneas de acción. El primer par tendrá de valor $M_1 = P_1 \cdot d_1$ y el segundo par tendrá de valor $M_2 = P_2 \cdot d_2$.

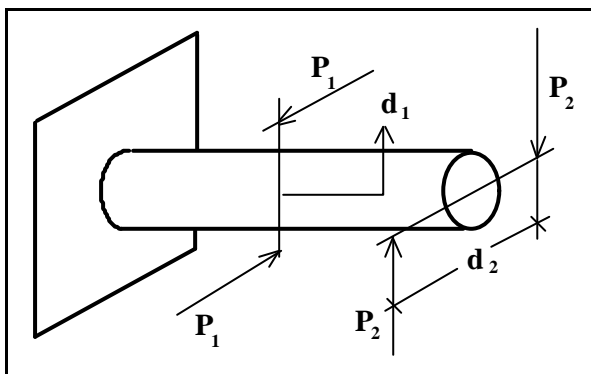


Figura 1.- Barra sujeta a torsión.

El *par* o *momento* es un vector perpendicular al plano determinado por la fuerza y la distancia al punto considerado.

En este tema se van a estudiar fórmulas para la determinación de tensiones y deformaciones en arboles y ejes sometidos a torsión y también a torsión combinada con otras cargas.

TORSIÓN DE BARRAS DE SECCIÓN CIRCULAR

Sea una barra recta de sección circular de radio R empotrada en uno de sus extremos sometida en el extremo libre a una torsión generada por un par M. Una barra trabajando de esta forma se dice que está sometida a *torsión pura*.

Si se analiza una sección transversal se observa que ha girado un ángulo, que los radios siguen rectos y que permanece plana y circular. Se puede considerar que la longitud de la barra y su radio, si el ángulo girado es pequeño, no varían.

Durante la torsión ocurre una rotación alrededor del eje longitudinal de un extremo de la barra respecto al otro. Si el ángulo girado es ϕ , ángulo que se conoce como *ángulo de torsión*, una línea generatriz de la barra *nn'* girará pasando a la posición *nn''*. Debido a la rotación un elemento de longitud infinitesimal **dx** en la barra girará un ángulo **dy** y si se considera la superficie determinada por abcd en el elemento de longitud pasará a ocupar la a b'c'd. Los vértices ya no miden 90°.

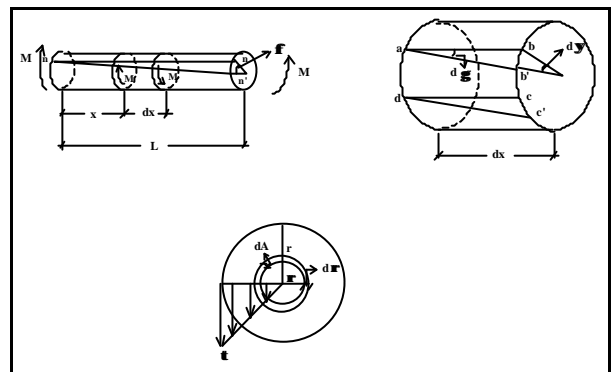


Figura 2.- Elemento de barra sometida a torsión pura.

El ángulo $d\gamma$ de la figura anterior se calcula como sigue:

$$\text{tg } d\gamma = \frac{bb'}{ab}$$

Y como el ángulo es muy pequeño, la tangente del ángulo tiende al ángulo, por lo que:

$$d\gamma = \frac{bb'}{ab}$$

Como:

$$bb' = r \cdot d\gamma \quad \text{y} \quad ab = dx$$

Se tiene que:

$$dg = \frac{r \cdot dy}{dx}$$

Un par M aplicado en el extremo libre de una barra de sección transversal circular, cuyo otro extremo está empotrado origina en una sección AA un estado de tensión que puede deducirse aplicando el Principio de Fragmentación de la Estática al sólido parcial comprendido entre la sección AA y el extremo libre en el que se aplica el par.

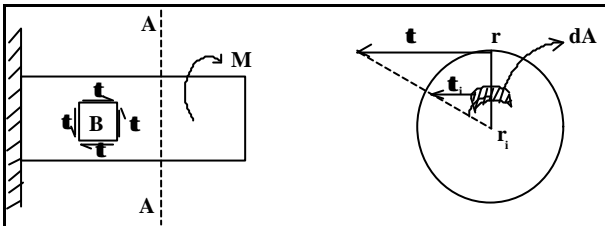


Figura 3.- Barra en voladizo de sección circular con un par aplicado en su extremo libre.

La resultante de las acciones tangenciales de la parte izquierda sobre el sólido considerado a lo largo de la sección debe ser nula ya que el sistema de fuerzas aplicado es un par.

Es lógico suponer que las tensiones tangenciales son proporcionales a sus distancias al centro, con lo que la magnitud de estas tensiones será:

$$\frac{t_i}{r_i} = \frac{t}{r} \quad \mathbf{t_i = t \cdot \frac{r_i}{r}}$$

La fuerza tangencial que actúa sobre un elemento de área será:

$$\mathbf{t_i \cdot dA}$$

Y la suma de momentos respecto al centro de la sección circular será:

$$\mathbf{\int r_i \cdot t_i \cdot dA = \frac{t}{r} \int r_i^2 \cdot dA = \frac{t \cdot I_o}{r}}$$

Siendo I_o el denominado *momento polar de inercia*.

Igualando los momentos de las fuerzas que actúan sobre la sección de la barra con el momento aplicado se tendrá que:

$$\mathbf{\frac{t \cdot I_o}{r} = M}$$

De donde despejando se tiene:

$$\mathbf{t = \frac{M \cdot r}{I_o}} \quad (I)$$

La ecuación (I) se denomina *formula de la torsión* y establece que el esfuerzo cortante máximo es directamente proporcional al par aplicado y al radio de la sección circular de la barra e inversamente proporcional al momento polar de inercia.

Como en una barra maciza de sección circular el momento polar de inercia vale:

$$\mathbf{I_o = \frac{\rho \cdot d^4}{32}}$$

Y $r = d/2$, sustituyendo en la formula de torsión se tiene que:

$$\mathbf{t_{max} = \frac{16 \cdot M}{\rho d^3}}$$

TORSIÓN DE BARRAS DE SECCIÓN CIRCULAR HUECA

Las barras circulares huecas son mucho más eficaces que las barras macizas para resistir cargas torsionales.

En efecto, esto es cierto ya que como se ha explicado los esfuerzos cortantes en una barra circular completamente sólida disminuyen desde su valor máximo en la superficie hasta un valor cero en el centro del círculo, lo que hace que mucho del material que constituye la barra este sometido a esfuerzos cortantes muy por debajo del valor máximo admisible y es por lo que si es necesaria una reducción de peso y un ahorro de material es preciso el uso de barras circulares huecas.

El análisis de tensiones en las barras huecas es casi idéntico al de las macizas, si bien la distancia radial se limita al margen r_1 (radio interior), r_2 (radio exterior).

El momento polar de inercia toma en este caso el valor:

$$\mathbf{I_o = \frac{\rho}{2} \cdot (r_2^4 - r_1^4) = \frac{\rho}{32} \cdot (d_2^4 - d_1^4)}$$

Si el tubo es de pared muy delgada entonces puede emplearse la siguiente formula aproximada:

$$I_o = 2r^3 \cdot t = \frac{\rho d^3 \cdot t}{4}$$

Siendo t el espesor del tubo y r y d el radio y el diámetro medio del tubo.

CORTANTE PURO.

Cuando una barra se somete a torsión actúan esfuerzos cortantes t sobre secciones transversales y sobre superficies longitudinales como se vio anteriormente.

Sea un elemento $abcd$ situado entre dos secciones transversales paralelas y próximas y dos planos longitudinales como se presenta en la Figura 4.

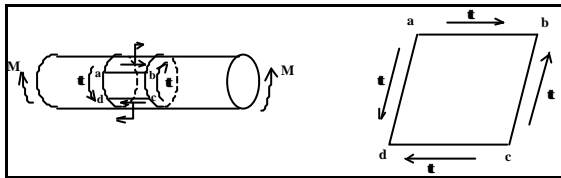


Figura 4.- Esfuerzos que actúan en un elemento de superficie de una barra sometida a torsión.

Si en el elemento de superficie longitudinal considerado los únicos esfuerzos que actúan son los cortantes por lo que se dice que está sometido a *esfuerzo cortante puro*.

En el caso de la figura los esfuerzos cortantes son los que se presentan y si se considera en $abcd$ una dirección que forme un ángulo ψ con la generatriz de la barra como se presenta en la Figura 5 se tiene:

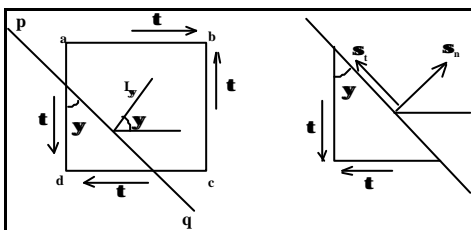


Figura 5.- Análisis de esfuerzos en planos inclinados en un elemento en esfuerzo cortante puro.

El vector unitario en la dirección normal a pq tiene por componentes:

$$l_y = \cos y \cdot \bar{i} + \sen y \cdot \bar{j}$$

La tensión en esa dirección vendrá dada por:

$$s_y = s_1 \cdot \bar{i} + s_2 \cdot \bar{j}$$

Siendo la expresión matricial que ofrece los valores de σ_1 y σ_2 :

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \cos y \\ t \sen y \end{bmatrix}$$

$$s_1 = t \cos y$$

$$s_2 = t \sen y$$

$$s_y = t \cdot \sen y \cdot \bar{i} + t \cdot \cos y \cdot \bar{j}$$

La componente normal será:

$$s_n = s_y \cdot l_y$$

Como:

$$l_y = \cos y \cdot \bar{i} + \sen y \cdot \bar{j} \Rightarrow$$

$$s_n = t \sen 2y$$

La componente tangencial será:

$$s_t = s_y \cdot \bar{l} + p/2$$

Como:

$$\bar{l} = \frac{p}{2} - \sen y \cdot \bar{i} + \cos y \cdot \bar{j}$$

$$s = t \cos 2y$$

Las ecuaciones anteriores representan los esfuerzos normal y cortante que actúan para cualquier dirección sobre la superficie de la barra en función del esfuerzo cortante al que está sometida.

El esfuerzo normal tiene como se vio anteriormente un valor máximo para $\psi = 45^\circ$. En dicha dirección el esfuerzo tangencial vale 0.

TORSIÓN DE BARRAS DE SECCIÓN RECTANGULAR

El problema de torsión de un árbol de sección rectangular es complicado debido al alabeo de la sección durante la torsión. Observando la deformación se ve que esta es máxima en el centro de los lados y nula en los ángulos, por lo que se deduce que la fatiga cortante es máxima en los centros de los lados y nula en los ángulos de la sección transversal.

La fatiga cortante máxima en el caso de árboles o ejes de sección rectangular se calcula por la expresión empírica:

$$f_{\max} = \frac{M}{ab \cdot c^2}$$

Ecuación en la que:

- b es la longitud del lado mayor de la sección
- c es la longitud del lado menor de la sección.
- α un factor dependiente de la relación b/c, tal que si b/c < 10 α vale 0.208 y si b/c = 10 α vale 0.313 y si b/c > 10 vale 0.333.

También se suele usar la formula empírica:

$$f_{\max} = \frac{M}{b \cdot c^2} \cdot \beta + 1.8 \cdot \frac{c}{b}$$

El ángulo de torsión por unidad de longitud se obtiene por la también formula empírica:

$$f = \frac{M}{b \cdot b \cdot c^3 \cdot G}$$

Ecuación en la que:

- β es un factor experimental que si b/c < 10 vale 0.141 y si b/c = 10 vale 0.313 y si b/c > 10 vale 0.333.

ACCIONES COMBINADAS

El principio de superposición de efectos permite estudiar las fatigas producidas por una combinación de cargas actuando sobre un árbol o sobre un eje.

Para una mas fácil interpretación se va a realizar el estudio aplicando dicho principio a algunos ejemplos numéricos, pero antes, por la importancia que tiene, se va a hacer un análisis de las deformaciones en barras cargadas lateralmente y a obtener la denominada *fórmula de la flexión*.

Las cargas laterales en barras provocan flexiones en las mismas deformando el eje longitudinal y transformándolo en una línea curva.

Un ejemplo se representa en la figura en la que se representa una barra en voladizo sometida a una carga puntual P colocada en su extremo libre.

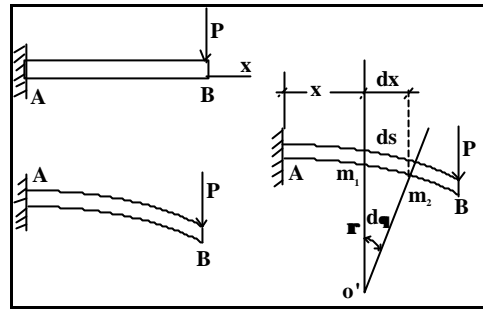


Figura 6.- Deformación en una barra en voladizo cargada en su extremo libre.

La forma curva del eje longitudinal de la barra se denomina *curva de flexión* o *curva elástica* o simplemente *elástica*.

Es frecuente usar como referencia un par de ejes cartesianos de forma que el eje XX coincide con el eje de la barra en reposo y el eje YY es perpendicular a este. El origen de coordenadas se toma en el empotramiento de la barra.

Si se consideran dos puntos m_1 y m_2 sobre la elástica de la barra, situados el punto m_1 a una distancia x del origen y el punto m_2 a una pequeña distancia ds de m_1 y en ambos puntos se traza una normal a la tangente a la curva de flexión, se observa que dichas normales se cortan en un punto O' que constituye el centro de curvatura de la elástica a una distancia x del origen. La distancia desde O' hasta el punto de tangencia se denomina *radio de curvatura* ρ y su inversa, por definición, es denominada *curvatura* χ .

Como se sabe cuando el ángulo es pequeño el arco es igual al radio por el ángulo expresado este en radianes, por lo que:

$$r \cdot dq = ds$$

Bajo la acción de los dos momentos la barra se curva de forma que considerando dos secciones próximas mn y pq a una distancia dx, si se considera que las secciones planas y perpendiculares al eje de la barra permanecen planas y perpendiculares al mismo después de curvarse la barra, lo cual puede demostrarse experimentalmente, dichas secciones giran una con respecto a la otra ocurriendo que las fibras de la parte superior de la barra trabajan a tracción y las de la parte inferior trabajan a compresión. Está claro que en algún lugar entre la parte superior y la inferior se localiza una superficie que ni se alarga ni se comprime, esta es la denominada *superficie neutra* y el eje que la representa en el plano del dibujo se llama *eje neutro* o *línea neutra*.

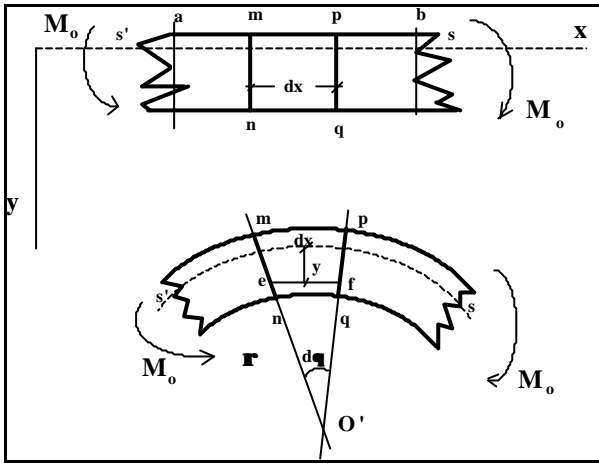


Figura 7.- Deformaciones de una barra en flexión pura.

Los planos de las secciones mn y pq se cortan según una recta que pasa por el centro de curvatura O'. Sea dq ángulo entre dichos planos y sea ρ el radio de curvatura. Como la distancia inicial entre ambas secciones no varía en la línea neutra se cumplirá que $\rho \cdot dq = dx$. En cambio las demás fibras longitudinales de la barra se acortarán o se alargarán originando deformaciones longitudinales que se representarán por ϵ_x . Para evaluar estas deformaciones considérese una fibra situada a una distancia y de la línea neutra. La longitud de esta fibra será:

$$dl = (r - y) \cdot dq = dx - \frac{y}{r} dx$$

Como la longitud inicial de la fibra considerada es dx , el acortamiento es $d\delta = dx - dl$ o sea

$$d\delta = \frac{y}{r} dx$$

La deformación unitaria, como se sabe es igual al alargamiento total dividido por la longitud, con lo que:

$$\epsilon_x = \frac{d\delta}{dx} \quad \epsilon_x = \frac{y}{r}$$

La ecuación anterior establece que las deformaciones longitudinales son inversamente proporcionales al radio de curvatura y directamente proporcionales a la distancia de la fibra considerada a la línea neutra.

A partir de las deformaciones longitudinales se pueden obtener las tensiones según el eje neutro que actúan perpendicularmente a la sección transversal de la barra.

Cada fibra longitudinal está sometida únicamente a tracción o a compresión, en consecuencia:

$$s_x = E \cdot \epsilon_x = \frac{E \cdot y}{r}$$

La ecuación anterior indica que la tensión sobre la sección transversal varía de forma directamente proporcional a la distancia a la superficie neutra, lo cual se representa en la figura siguiente:

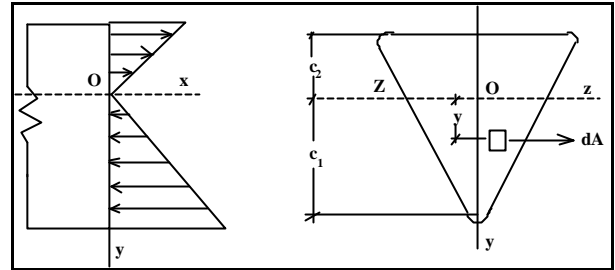


Figura 8.- Distribución de esfuerzos longitudinales o normales.

Aplicando las ecuaciones de la estática la resultante de las fuerzas que actúan en la sección transversal es nula pues en la barra no hay fuerzas longitudinales y solo existe un momento de valor M.

Sea un elemento dA de la sección transversal, situado a una distancia y de la línea neutra. La fuerza que actúa sobre él será $s_x \cdot dA$. Si se aplica momentos respecto al eje ZZ se tendrá:

$$dM = s_x \cdot y \cdot dA$$

La integral de todos los momentos en el área de la sección transversal debe ofrecer como ecuación:

$$M = \int s_x \cdot y \cdot dA$$

Y como $s_x = E \cdot y / r$, se tiene que:

$$M = \frac{1}{r} E \int y^2 \cdot dA$$

Como $\int y^2 \cdot dA =$ Momento de inercia del área de la sección transversal = I, se tiene que:

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{E \cdot I}$$

La ecuación anterior indica que el radio de curvatura del eje longitudinal de una barra está ligado proporcionalmente con el momento M y con el producto E · I denominado *rigidez de la barra*.

Si la ecuación anterior se sustituye en:

$$s_x = \epsilon_x \cdot E = \frac{E \cdot y}{r}$$

Se tiene que:

$$\sigma_x = \frac{M \cdot y}{I} \quad (\text{fórmula de la flexión}).$$

La ecuación anterior establece que las tensiones normales a una distancia y de la línea neutra en una barra sometida a flexión pura son directamente proporcionales al momento M flector e inversamente proporcionales al momento de inercia de su sección transversal.

También indica que las tensiones normales varían con la distancia al eje neutro, de forma que los esfuerzos de tracción y compresión máximos se presentan en los puntos de la barra más alejados de la línea neutra.

Sean c_1 y c_2 las distancias desde la línea neutra hasta las fibras extremas de la sección transversal de la barra. Los esfuerzos normales máximos serán:

$$\sigma_1 = \frac{M \cdot c_1}{I} = \frac{M}{W_1} \quad \sigma_2 = -\frac{M \cdot c_2}{I} = -\frac{M}{W_2}$$

Siendo:

$$W_1 = \frac{I}{c_1} \quad \text{y} \quad W_2 = \frac{I}{c_2}$$

Los valores W_1 y W_2 son los denominados *módulos de sección* o *momentos resistentes* de la sección transversal, se miden en mm^3 .

Si la sección transversal es simétrica entonces c_1 y c_2 son iguales.

En una barra de sección transversal rectangular de base b y altura h el momento de inercia y el módulo de sección valen:

$$I = \frac{b \cdot h^3}{12} \quad \text{y} \quad W = \frac{b \cdot h^2}{6}$$

Y para una sección transversal circular valen:

$$I = \frac{p \cdot d^4}{64} \quad \text{y} \quad W = \frac{p \cdot d^3}{32}$$

Por último destacar que en el estudio realizado se ha considerado que las barras estaban sometidas a flexión pura y no existen fuerzas cortantes. Los análisis experimentales demuestran que los esfuerzos cortantes no alteran significativamente las tensiones longitudinales o normales. Además la fórmula de la flexión ofrece resultados exactos únicamente en las regiones de la barra donde la distribución de esfuerzos no se

interrumpe, bien por irregularidades en la barra, bien por discontinuidades en la carga.

Flexión y torsión.

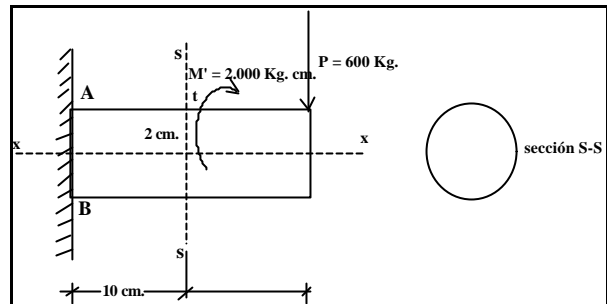


Figura 8.- Flexión y torsión simultáneas.

En (A):

$$\sigma_x = \frac{M \cdot y}{I}; \quad I = \frac{p \cdot d^4}{64} \quad \sigma_x = 7650 \text{ Kg/cm}^2 \quad \text{(tracción)}$$

$M = 600 \cdot 10 \text{ Kg.cm}$

En (B):

$$\sigma_x = -7650 \text{ Kg/cm}^2 \quad (\text{compresión})$$

En A=B:

$$t = \frac{M_t \cdot r}{I_o}; \quad I_o = \frac{p \cdot d^4}{32} \quad t = 1272 \text{ Kg/cm}^2.$$

Se sabe que:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + t^2}$$

$$\sigma_{\text{mín}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + t^2}$$

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{\sigma_{\text{máx}} - \sigma_{\text{mín}}}{2}$$

En (A):

$$\sigma_{\text{máx}} = 7855 \text{ Kg/cm}^2; \quad \sigma_{\text{mín}} = -205 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sigma_{\text{máx}} = 4030 \text{ Kg/cm}^2$$

En (B):

$$\sigma_{\text{máx}} = 205 \text{ Kg/cm}^2; \quad \sigma_{\text{mín}} = -7855 \text{ Kg/cm}^2.$$

$$\sigma_{\text{máx}} = -4030 \text{ Kg/cm}^2$$

Flexión, carga axial y torsión en barra en ménsula

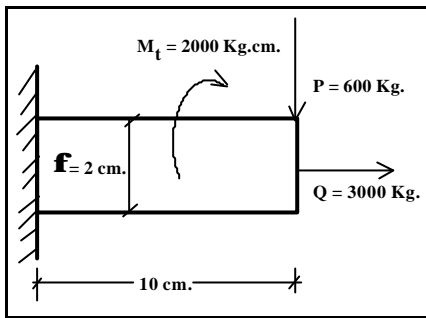


Figura 9.- Tracción, flexión y torsión simultáneas.

En (A):

$$\sigma = \frac{M \cdot y}{I} + \frac{Q}{A}; \tau = \frac{M_t \cdot r}{I_0}$$

$$\sigma = 8604 \text{ Kg/cm}^2; \tau = 1272 \text{ Kg/cm}^2.$$

$$\sigma_{\text{máx}} = 8782 \text{ Kg/cm}^2; \sigma_{\text{mín}} = -178 \text{ Kg/cm}^2.$$

$$\tau_{\text{máx}} = 4480 \text{ Kg/cm}^2.$$

En (B):

$$\sigma = -6696 \text{ Kg/cm}^2; \tau = 1272 \text{ Kg/cm}^2.$$

$$\sigma_{\text{máx}} = 233 \text{ Kg/cm}^2; \sigma_{\text{mín}} = -6929 \text{ Kg/cm}^2.$$

$$\tau_{\text{máx}} = 3581 \text{ Kg/cm}^2.$$

Flexión y torsión en barra simplemente apoyada

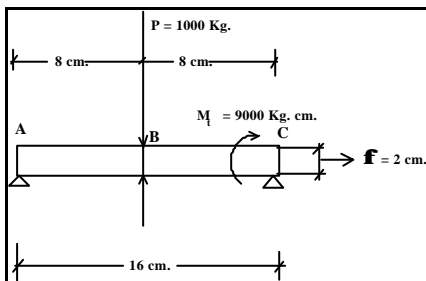
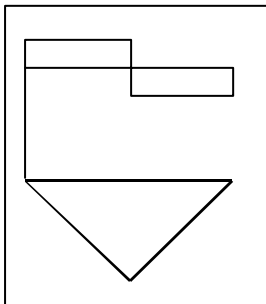


Figura 10.- Flexión y torsión en barra simplemente apoyada.

Calcular σ_n máx, σ_n mín y $\tau_{\text{máx}}$ en A y en B

- Cálculo de V y M.



$$V_{\text{máx}} \text{ en (A)} = \frac{-1000}{2} = 500 \text{ Kp.}$$

$$V_{\text{máx}} \text{ en (B)} = 0$$

$$M \text{ en (A)} = 0$$

$$M \text{ en (B)} = \frac{P \cdot L}{4} = \frac{1000 \cdot 16}{4} = 4000 \text{ Kp.m.}$$

$$M_t = 4000 \text{ Kp.}$$

Figura 11.- Diagramas de esfuerzos cortantes y de momentos flectores

En (A):

$$\tau_A = \frac{500}{\frac{\pi \cdot 2^2}{4}} \text{ Kp/cm}^2. \Rightarrow \tau = 159 \text{ Kp/cm}^2.$$

$$\sigma_A = \frac{0.1}{\frac{\pi \cdot 2^4}{64}} \text{ Kp/cm}^2.; \sigma = 0 \text{ Kp/cm}^2.$$

$$\tau_A = \frac{M_t \cdot r}{I_0} \Rightarrow \tau = \frac{9000 \cdot 1}{\frac{\pi \cdot 2^4}{32}} \text{ Kp/cm}^2. \Rightarrow \tau = 573 \text{ Kp/cm}^2.$$

$$\sigma_{\text{máx}} = 573 \text{ Kg/cm}^2.; \sigma_{\text{mín}} = -573 \text{ Kp/cm}^2.$$

$$\sigma = \frac{\sigma_{\text{máx}} - \sigma_{\text{mín}}}{2} = 573 \text{ Kp/cm}^2.$$

En (B):

$$\tau_B = \frac{M_t \cdot r}{I_0} = 573 \text{ Kp/cm}^2$$

$$\sigma_B = -\frac{4000 \cdot 2}{\frac{\pi \cdot 2^4}{64}} = -10186 \text{ Kp/cm}^2. \text{ (compresión)}$$

$$\sigma_{\text{máx}B} = -\frac{10186}{2} + \sqrt{\left(\frac{10186}{2}\right)^2 + 573^2}$$

$$\sigma_{\text{mín}B} = -\frac{10186}{2} - \sqrt{\left(\frac{10186}{2}\right)^2 + 573^2}$$

$$\sigma_B = \frac{\sigma_{\text{máx}} - \sigma_{\text{mín}}}{2}$$

$$\sigma_{\text{máx}B} = 32 \text{ Kp/cm}^2.$$

$$\sigma_{\text{mín}B} = -10218 \text{ Kp/cm}^2.$$

$$\sigma_{\text{máx}B} = 5125 \text{ Kp/cm}^2.$$

DEFORMACIONES Y MODULO DE TORSIÓN

En el tema 1 se dijo que $G \approx E/2$, ahora se verá que esto es cierto, para ello si en los extremos de una barra maciza de sección circular como la de la figura siguiente actúa un par $M = F \cdot d$, el estado de tensión en una superficie elemental A será el indicado en la Figura 12, y la tensión sobre una orientación genérica teniendo en cuenta que trabaja a torsión pura, vendrá dada por:

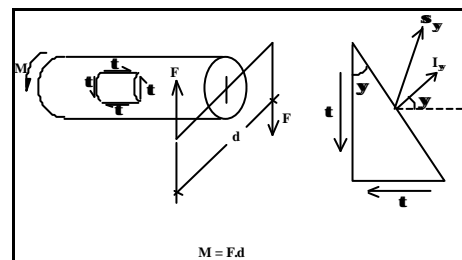


Figura 12.- Barra circular sometida a torsión.

$$\vec{s}_y = t \cdot \text{sen } \gamma \cdot \vec{i} + t \cdot \text{cos } \gamma \cdot \vec{j}$$

O bien:

$$\begin{pmatrix} s_x \\ s_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \cdot \text{cos } \gamma \\ t \cdot \text{sen } \gamma \end{pmatrix}$$

Las direcciones principales son para $\text{tg } \psi = \pm 1$, lo que implica:

$$\gamma = \pm 45^\circ$$

Un cuadrado elemental ABCD por la deformación debida a M toma la forma A'B'C'D'.

Los alargamientos correspondientes a la sección considerada pueden calcularse así:

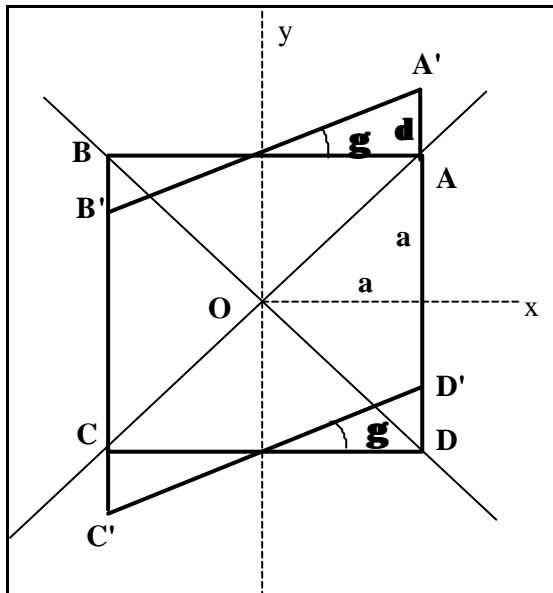


Figura 13.- Deformación en una sección elemental.

$$OA = \sqrt{a^2 + (a+d)^2}; \text{ como } \text{tg } g = \frac{d}{a} \Rightarrow OA = a \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{2} \text{tg}^2 g + \text{tg } g}$$

Como:

$$OA = a \cdot \sqrt{2}$$

Y el alargamiento unitario:

$$\epsilon_y = \frac{OA' - OA}{OA} \Rightarrow \epsilon_y = \sqrt{1 + \frac{\text{tg}^2 g}{2} + \text{tg } g} - 1$$

Operando se tiene:

$$\epsilon_y = \frac{1 + \frac{\text{tg}^2 g}{2} + \text{tg } g - 1}{\sqrt{1 + \frac{\text{tg}^2 g}{2} + \text{tg } g} + 1}$$

Como γ es pequeño, se puede despreciar $\text{tg}^2 \gamma$, por lo que:

$$\epsilon_y = \frac{1}{2} \cdot \text{tg } g$$

Como γ es pequeño $\text{tg } \gamma = \gamma$, por lo que:

$$\epsilon_y = \frac{1}{2} g$$

Análogamente:

$$\epsilon_y = \frac{OB' - OB}{OB} = -\frac{1}{2} g$$

Como se sabe:

$$\epsilon_y = \frac{t_y}{E} + n \cdot \frac{t_x}{E}$$

Como:

$$t_x = t_y = t \Rightarrow \epsilon_y = \frac{t}{E} (1+n) \Rightarrow t = \frac{E \cdot \epsilon_y}{1+n}$$

Como:

$$\epsilon_y = \frac{1}{2} g \Rightarrow t = g \cdot \frac{E}{2(1+n)}$$

Como se vio:

$$t = g \cdot G$$

Se tiene:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1+n)}$$

Como v es pequeño, se puede considerar que:

$$G \approx \frac{E}{2}$$

G se denomina *módulo de elasticidad transversal* y también *módulo de rigidez* o *módulo de torsión*.

Debido al par M aplicado, una generatriz AB pasa a ocupar la posición AB' , formando AB y AB' un ángulo γ .

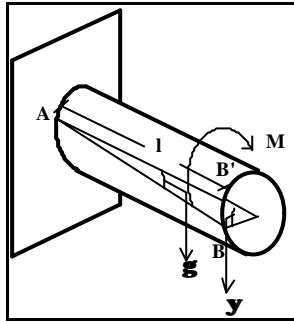


Figura 14.- Deformación de una generatriz.

Se sabe que:

$$BB' = r \cdot y = l \cdot g \Rightarrow g = \frac{r \cdot y}{l}$$

Como:

$$t = \frac{M \cdot r}{I_0}$$

Y como:

$$t = G \cdot g \Rightarrow t = G \cdot \frac{r \cdot y}{l} \Rightarrow \frac{M \cdot r}{I_0} = G \cdot \frac{r \cdot y}{l}$$

Despejando M se tiene:

$$M = \frac{G \cdot I_0 \cdot y}{l}$$

O bien despejando y se tiene:

$$y = \frac{M \cdot l}{I_0 \cdot G}$$

Expresión que permite determinar el ángulo girado por una barra de longitud l , con momento polar de inercia I_0 , fabricada con un material de módulo de elasticidad transversal G a la que se le aplica un momento torsor M .

CALCULO DE ÁRBOLES

Método de las tensiones

En la expresión:

$$t = \frac{M \cdot r}{I_0}$$

En la que:

$$I_0 = \int r^2 (2 \cdot p \cdot r \cdot d) \cdot r^2 = \frac{p \cdot d^4}{32}$$

Sustituyendo se tiene:

$$t = \frac{16 \cdot M}{p \cdot d^3} \Rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M}{p \cdot t}}$$

Si se conoce la potencia a transmitir N y el número de revoluciones a que gira el eje, como:

$$\text{Potencia} = \text{Par} \cdot \text{velocidad angular}$$

Se tiene:

$$N = \frac{M \cdot 2\pi \cdot n}{60 \cdot 75} \Rightarrow M = \frac{225000}{p} \cdot \frac{N}{n}$$

Siendo:

N = potencia en C.V.

M = par en Kg· m

n = r.p.m.

sustituyendo en la ecuación:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M}{p \cdot t}} \Rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{3600000}{p^2 \cdot t} \cdot \frac{N}{n}}$$

Si $t = t_{perm}$ por el material, d ofrece el valor del diámetro necesario para que el eje pueda transmitir la potencia N a un régimen de n r.p.m.

Método de las deformaciones

En la expresión:

$$y = \frac{M \cdot l}{I_0 \cdot G}$$

El ángulo y viene expresado en radianes. Transformando y en grados y llamando a al nuevo valor se tiene:

$$a = \frac{180}{p} \cdot y = \frac{180}{p} \cdot \frac{M \cdot l}{I_0 \cdot G}$$

El cálculo de ejes utiliza una norma que permite que:

$$a \leq \frac{100}{\sigma} \text{ para } l = 100 \text{ cm.}$$

Por lo que sustituyendo estos valores proporcionales en la expresión anterior, e igualándolos adecuadamente con la potencia transmitida por el eje y con el número de revoluciones, se puede obtener el diámetro de un

material necesario para transmitir una potencia a un régimen de giro dado.

MÉTODOS EMPÍRICOS DE CÁLCULO DE ÁRBOLES

En el caso de árboles sometidos a flexión y torsión normalmente se aplica la ecuación de la A.S.M.E. para un eje macizo que viene dada por:

$$d^3 = \frac{16}{\rho s_y} \times \sqrt{(K_b \cdot M_b)^2 + (K_t \cdot M_t)^2}$$

M_b = momento flector.
 M_t = momento de torsión.
 K_b = factor de flexión.
 K_t = factor de torsión.

Los valores de K_b y K_t se presentan en la siguiente tabla en función de la forma de actuación de la carga aplicada al eje:

	K_b	K_t
Carga aplicada gradual	1'5	1
Carga repentina (choque menor)	1'5- 2	1- 1'5
Carga repentina (choque fuerte)	2- 3	1'5- 3

Tabla 1.- Coeficientes A.S.M.E.

Si se trata de ejes del tipo hueco:

$$d^3 = \frac{16}{\rho s_y \times (1 - i^4)} \times \sqrt{(K_b \times M_b)^2 + (K_t \times M_t)^2}$$

d_e = diámetro exterior.
 d_i = diámetro interior.
 $K = \frac{d_e}{d_i}$

En el caso de que sobre los árboles existan simultáneamente tensiones a flexión, torsión y carga axial, la A.S.M.E. ofrece la fórmula:

$$d^3 = \frac{16}{\rho s_y \times (1 - i^4)} \times \sqrt{\left(\frac{K_b \times M_b}{e} + \frac{\alpha \times F_a \times d_o \times (1 + i^2)}{8} \right)^2 + (K_t \times M_t)^2}$$

F_a = Carga axial.
 α = es el factor de columna.

$$a = \frac{1}{1 - 0'0044(L/i)} \quad \text{si } L/i < 15$$

L = longitud del eje.
 i = radio de giro = $\sqrt{I/A}$.
 I = momento de inercia en m^4 .

A = área de la sección transversal del eje en m^2 .

$$a = \frac{s_y}{\rho^2 \times b \times E} \times \frac{1}{e_i} \times \frac{1}{e_s} \quad \text{si } L/i > 15$$

σ_y = límite de fluencia.
 $\beta = 1$ si los extremos del eje son articulados.
 $\beta = 2'22$ si los extremos del eje son empotrados.
 $\beta = 1'6$ si los extremos del eje son rodamientos.
 E = módulo de elasticidad.

TENSIONES ADMISIBLES EN ÁRBOLES

Para el cálculo de árboles se tendrá en cuenta, en lugar del límite de fluencia s_y , se ha de considerar una resistencia denominada tensión de fatiga s_f la cual se puede definir como el límite superior de la carga alternativa que puede soportar un árbol un tiempo indefinido.

En el valor de s_f inciden fundamentalmente:

- El acabado superficial del eje.
- El efecto entalladura.

El valor de s_f se calcula multiplicando por sendos coeficientes (K_{ac} = **coeficiente de acabado superficial** y K_{ent} = **coeficiente de entalladura**) el valor de fatiga permisible por el material sometido a cargas estáticas.

$$s_f = s_y \cdot K_{ac} \cdot K_{ent}$$

Los tipos más usuales de fabricación de árboles que producen efecto entalladura son los que se presentan en la figura siguiente:

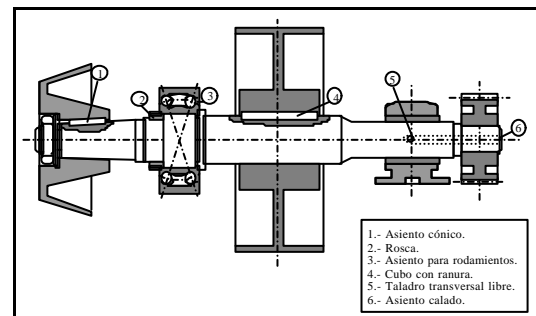


Figura 15.- Entalladuras en árboles.

El coeficiente de acabado superficial K_{ac} se obtiene según las experiencias de **Klingelnberg** representadas para diferentes casos en la figura siguiente:

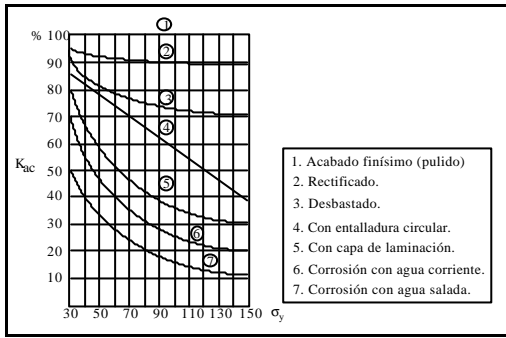


Figura 16.- Valores del coeficiente de acabado superficial en función del límite de fluencia (K_p/mm^2).

El *coeficiente de entalladura* K_{ent} llamado también *coeficiente de cambio de sección*, se calcula mediante la expresión empírica:

$$K_{ent} = \frac{1}{1 + (b_k - 1) \cdot I_k}$$

Los valores de b_k , cuando de cambio de diámetro se trata, se obtienen de la gráfica empírica de **Lehr** representada en la siguiente figura:

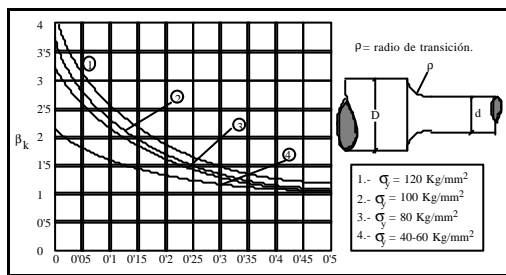


Figura 17.- Valores de β_k en función de ρ/d .

Los valores de I_k se obtiene de la gráfica de **Klingelberg** representada en la figura siguiente:

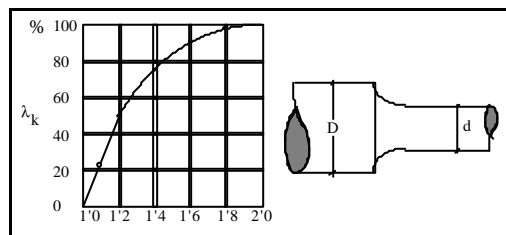


Figura 18.- Valores de λ_k en función de D/d .

Gráficamente las curvas de **Lehr** y **Thum** permiten obtener los valores de s_f en árboles con *entalladuras agudas*, con *orificios transversales*, con *chaveteados* y con *culos de compresión*.

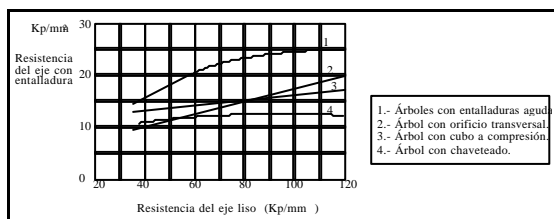


Figura 19.- Valores de σ_f en función de σ_y para diferentes factores.

Un ejemplo ayudará al manejo de este gráfico:

- Sea un eje como el de la figura siguiente con un acabado superficial rectificado.

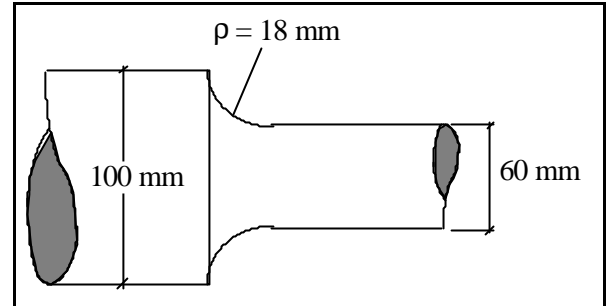


Figura 20.- Árbol con entalladura debida a cambio de diámetro.

Construido con acero de $\sigma_y = 1200 \text{ MPa}$.

- Según el tipo de acero usado:

$$s_y = 1200 \text{ N/mm}^2 \Rightarrow s_y \approx 120 \text{ Kp/mm}^2$$

- Debido al acabado superficial:

Según el gráfico de la Figura 16:

$$K_{ac} = 0'88$$

- Debido al efecto entalladura:

$$s_y = 120 \text{ Kp/mm}^2; r = 18 \text{ mm} \Rightarrow \frac{r}{d} = 0'3 \Rightarrow$$

Según del gráfico de la Figura 17:

$$b_k = 1'5$$

$$\text{Como } \frac{D}{d} = \frac{5}{3} = 1'66 \Rightarrow$$

Según el gráfico de la Figura 18:

$$I_k = 0'9$$

Por lo que como:

$$K_{ent} = \frac{1}{1 + (b_k - 1) \cdot I_k} \Rightarrow K_{ent} = 0'689$$

Por tanto, teniendo en cuenta que:

$$s_f = s_y \cdot K_{ac} \cdot K_{ent} \Rightarrow$$

$$s_f = 120 \cdot 0'88 \cdot 0'689 \text{ Kp/mm}^2$$

$$s_f = 7275 \text{ Kp/mm}^2 = 713 \text{ MPa}$$

VELOCIDAD CRÍTICA DE EJES

Todos los ejes durante la rotación se deforman debido a su propio peso y al de las cargas que soportan.

La deformación depende de las características del eje, de la distancia entre sus apoyos, de la masa total del eje y de las cargas que actúan.

La deformación adquiere valores máximos a las llamadas velocidades críticas. En algunos casos son tan altas que superan enormemente las velocidades de trabajo de los ejes.

Se puede considerar que:

• **Para un eje simplemente apoyado en sus extremos**, se calcula mediante la expresión:

$$\omega_c = \sqrt{\frac{5 \cdot g}{4 \cdot d}}$$

Siendo:

ω_c = velocidad angular crítica.
 δ = flecha del eje producida por una carga uniformemente distribuida igual a su peso propio por unidad de longitud.

- **Para un eje simplemente apoyado que lleva una masa mucho mayor que la del propio eje**, se calcula mediante la expresión:

$$\omega_c = \sqrt{\frac{g}{d}}$$

Siendo:

δ = deformación estática o deformación producida por la fuerza P.

Para obtener la expresión:

$$\omega_c = \sqrt{\frac{g}{d}}$$

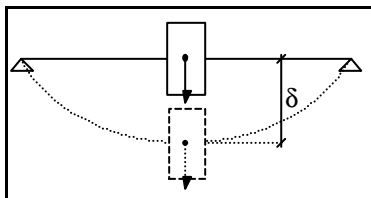


Figura 21.- Deformación estática en árbol simplemente apoyado.

Se iguala la fuerza de deformación con la fuerza centrífuga, con lo que se tiene:

$$K \cdot d = m \cdot (d + e) \cdot \omega^2$$

Operando se tiene:

$$K \cdot d - m \cdot \omega^2 \cdot d = m \cdot e \cdot \omega^2$$

De donde:

$$d = \frac{m \cdot e \cdot \omega^2}{K - m \cdot \omega^2}$$

Si:

$$K = m \cdot \omega^2 \cdot d \oplus \text{...}$$

Por tanto la velocidad angular crítica es:

$$\omega_c = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

Siendo en la demostración anterior:

K = constante elástica del eje.
 δ = deformación.
 m = masa que actúa sobre el eje.
 ω = velocidad de giro.
 e = excentricidad de masa respecto al eje.

Como:

$$m = \frac{P}{g} \cdot \frac{K}{m} = \frac{g \cdot K}{P}$$

Y como:

$$\frac{P}{K} = d \cdot \omega_c = \sqrt{\frac{g}{d}}$$

• **Para un eje de masa despreciable con varias masas unidas a él**, la velocidad angular crítica se calcula mediante la ecuación de **Rayleigh-Ritz**:

$$\omega_c = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n g \cdot \dot{\alpha} P_i \cdot d}{\sum_{i=1}^n \dot{\alpha} P_i \cdot d^2}}$$

Para obtener esta ecuación se iguala la energía cinética de rotación de las masas con la energía de deformación del eje:

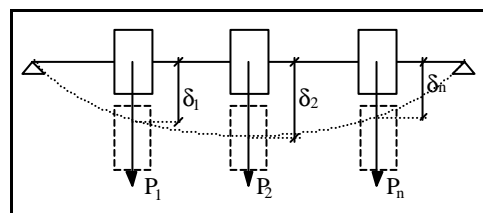


Figura 22.- Deformación en árbol con varias cargas.

$$E_{c_{max}} = \frac{1}{2} \cdot l_1 \cdot w_1^2 + \frac{1}{2} \cdot l_2 \cdot w_2^2 + \dots + \frac{1}{2} \cdot l_n \cdot w_n^2$$

Como: $l_1 = m_1 \cdot d_1^2; l_2 = m_2 \cdot d_2^2 \dots l_n = m_n \cdot d_n^2$

Como: $w_1 = w_2 = \dots = w_n \quad \mathbf{P}$

$$E_{c_{max}} = \frac{1}{2} \cdot w^2 \cdot [m_1 \cdot d_1^2 + m_2 \cdot d_2^2 + \dots + m_n \cdot d_n^2]$$

O bien:

$$E_{c_{max}} = \frac{1}{2} \cdot w^2 \cdot \sum_{i=1}^n m_i \cdot d_i^2$$

La energía de deformación del eje es:

$$W_d = \mathbf{P} \cdot dd; \text{ como } \mathbf{P} = \mathbf{K} \cdot d \quad \mathbf{P}$$

$$W_d = \frac{1}{2} \cdot K_1 \cdot d_1^2 + \frac{1}{2} \cdot K_2 \cdot d_2^2 + \dots + \frac{1}{2} \cdot K_n \cdot d_n^2$$

$$W_d = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n K_i \cdot d_i^2$$

Igualando ambas energías se tiene:

$$w^2 = \frac{\sum_{i=1}^n K_i \cdot d_i^2}{\sum_{i=1}^n m_i \cdot d_i^2}$$

Como:

$$m = \frac{P}{g} \quad \mathbf{P} \quad m_1 = \frac{P_1}{g}; m_2 = \frac{P_2}{g}; \dots m_n = \frac{P_n}{g}$$

Y como:

$$\frac{P}{K} = d \quad \mathbf{P} \quad \frac{P_1}{d_1} = K_1; \frac{P_2}{d_2} = K_2; \dots \frac{P_n}{d_n} = K_n$$

Sustituyendo se tiene:

$$w^2 = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{g \cdot \mathbf{P}_i \cdot d_i}{\sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i \cdot d_i^2}}{\sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i \cdot d_i^2} \quad \mathbf{P} \quad w = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \frac{g \cdot \mathbf{P}_i \cdot d_i}{\sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i \cdot d_i^2}}{\sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i \cdot d_i^2}}$$

La velocidad crítica de un eje cargado con varias masas se puede obtener también usando la ecuación de **Dunkerley**.

$$\frac{1}{w_c^2} = \frac{1}{w_1^2} + \frac{1}{w_2^2} + \dots + \frac{1}{w_n^2}$$

Siendo:

w_c = velocidad crítica del eje cargado con todas las masas.

w_1 = velocidad crítica del eje cargado aisladamente con la primera de las cargas.

w_2 = velocidad crítica del eje cargado aisladamente con la segunda de las cargas.

w_n = velocidad crítica del eje cargado aisladamente con la enésima de las cargas.

Unos ejemplos ayudarán a comprender y manejar los conceptos expuestos.

• Un eje soporta un engranaje de masa $m_1 = 20$ Kg y una polea de masa $m_2 = 40$ Kg. Las deformaciones estáticas de m_1 y m_2 son $\delta_1 = 0'031$ mm y $\delta_2 = 0'076$ mm. Determinar la velocidad crítica.

Solución:

$$w_c = \sqrt{\frac{g \cdot \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i \cdot d_i}{\sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i \cdot d_i^2}}$$

$$w_c = \sqrt{\frac{9'8 \text{ m/s}^2 \cdot (20 \cdot 9'8 \text{ N} \cdot 0'031 \text{ mm} + 40 \cdot 9'8 \text{ N} \cdot 0'076 \text{ mm})}{20 \cdot 9'8 \cdot 0'031^2 + 40 \cdot 9'8 \cdot 0'076^2 \text{ N} \cdot \text{mm}^2}}$$

$$w_c = \sqrt{\frac{9'8 \cdot 1000 \text{ mm/s}^2 \cdot 35'896 \text{ N} \cdot \text{mm}}{2'452 \text{ N} \cdot \text{mm}^2}}$$

$$w_c = 378'58 \text{ rad/s} \approx 3615 \text{ r.p.m.}$$

• Dos masas de 56 Kg y 24 Kg están unidas a un eje. Sabiendo que sus coeficientes de fluencia respectivos son de:

$$a_1 = 1'27 \cdot 10^{-4} \text{ mm/Kg}$$

$$a_2 = 7'62 \cdot 10^{-4} \text{ mm/Kg}$$

Determinar la velocidad crítica del eje.

Solución:

$$d_1 = a_1 \cdot 56 \text{ mm} \quad \mathbf{P} \quad d_1 = 7'112 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$$

$$d_2 = a_2 \cdot 24 \text{ mm} \quad \mathbf{P} \quad d_2 = 18'288 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$$

Considerando independientemente cada masa se tiene:

$$w_{c1} = \sqrt{\frac{g}{d_1}} \quad \mathbf{P} \quad w_{c1} = \sqrt{\frac{9'8 \cdot 10^3 \text{ mm/s}^2}{7'112 \cdot 10^{-3} \text{ mm}}}$$

$$w_{c1} = 117386 \text{ rad/s}$$

$$w_{c2} = \sqrt{\frac{g}{d_2}} \quad \mathbf{P} \quad w_{c2} = \sqrt{\frac{9'8 \cdot 10^3 \text{ mm/s}^2}{18'288 \cdot 10^{-3} \text{ mm}}}$$

$$w_{c_2} = 282405 \text{ rad/s}$$

Por tanto aplicando la ecuación de Dunkerley se tiene:

$$\frac{1}{w_c^2} = \frac{1}{w_{c_1}^2} + \frac{1}{w_{c_2}^2}$$

$$\frac{1}{w_c^2} = \frac{1}{1173'86^2} + \frac{1}{2824'05^2}$$

$$\frac{1}{w_c^2} = 7'257 \cdot 10^{-7} + 1'2538 \cdot 10^{-7}$$

$$w_c = 1083'95 \text{ rad/s} \cdot 10351 \text{ r.p.m.}$$

Usando la ecuación de Rayleigh-Ritz se tiene:

$$w_c = \sqrt{\frac{g \cdot \sum_{i=1}^n P_i \cdot d}{\sum_{i=1}^n P_i \cdot d^2}}$$

$$w_c = \sqrt{\frac{9800 \frac{\text{mm}}{\text{s}^2} \cdot (56 \cdot 98 \cdot 7112 \cdot 10^{-3} \text{ mm} + 24 \cdot 98 \cdot 18288 \cdot 10^{-3} \text{ mm})}{56 \cdot 98 \cdot (7112 \cdot 10^{-3})^2 + 24 \cdot 98 \cdot (18288 \cdot 10^{-3})^2} \text{ N} \cdot \text{mm}^2}}$$

$$w_c = 869'2 \text{ rad/s} \cdot 8300 \text{ r.p.m.}$$

ACOPLAMIENTOS

Son elementos que tienen por objeto transmitir potencia de un árbol a otro.

Existen muchos tipos diferentes de acoplamientos, con características adaptadas a sus diversas formas de aplicación.

De forma genérica se pueden clasificar en:

- Acoplamientos rígidos
- Acoplamientos elásticos.
- Acoplamientos móviles.

Los *acoplamientos rígidos* sirven para unir árboles y su característica fundamental es la de que su montaje exige una perfecta alineación, siendo incapaces de evitar las fatigas o tensiones que aparecen cuando hay problemas de coaxialidad.

Es por lo que este tipo de acoplamientos originan peligrosos esfuerzos cuando la alineación no es perfecta.

Los principales tipos de acoplamientos rígidos son:

- De platos:

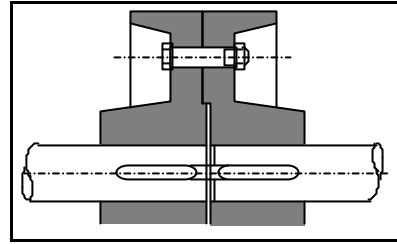


Figura 23.- Acoplamiento de platos

- De manguito:

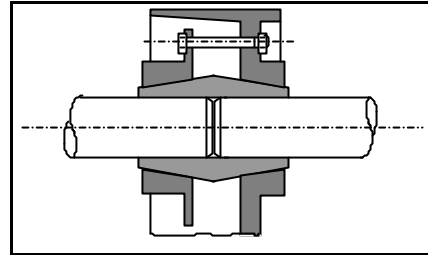


Figura 24.- Acoplamiento de manguito

Los *acoplamientos elásticos* permiten absorber las variaciones de par evitando las fatigas debidas a los impulsos que provocan.

Los acoplamientos elásticos amortiguan los impactos que originan las variaciones bruscas de potencia.

Los principales tipos de acoplamientos elásticos son:

- De casquillo de goma:

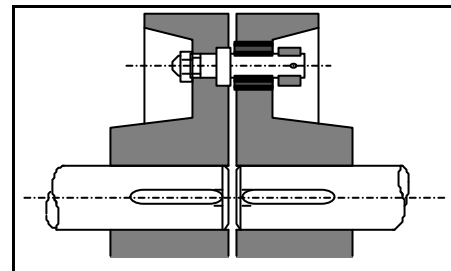


Figura 25.- Acoplamiento de casquillo de goma

- De correa en estrella:

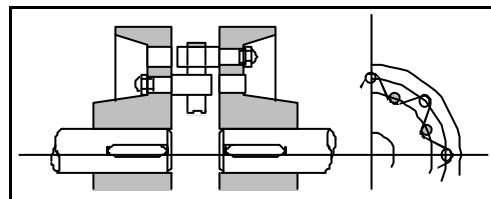


Figura 26.- Acoplamiento de correa en estrella

Los *acoplamientos móviles* permiten eliminar fatigas debido a la falta de coaxialidad entre el motor y el par arrastrado.

Los principales tipos de acoplamientos móviles son:

- De garras:

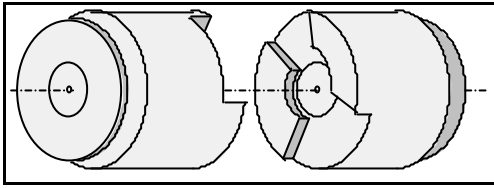


Figura 27.- Acoplamiento de garras

- Oldham:

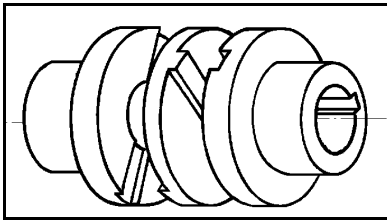


Figura 28.- Acoplamiento tipo junta Oldham

- Cardan:

La junta universal cardan permite transmitir potencia entre ejes no coaxiales y no alineados.

Conocida también como acoplamiento de Hooke es un mecanismo articulado esférico que consiste fundamentalmente en dos horquillas, unidas a los árboles conductor y conducido y una cruz que los acopla.

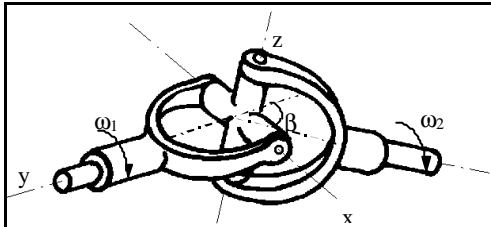


Figura 29.- Junta universal Cardan.

β es el ángulo que forman el árbol conductor que gira a una velocidad angular ω_1 y el árbol conducido que tiene una velocidad ω_2 .

Los dos árboles conductor y conducido prolongados se cortan en el punto O, lo cual implica que está definido un plano que se designa por π .

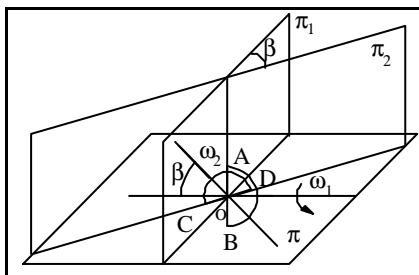


Figura 3.- Planos que contienen ejes y cruzeta.

El brazo de la cruzeta $a b$ se mueve al girar describiendo sus extremos una circunferencia contenida en un plano perpendicular a w_1 y al plano π y que pasa por O que se designa por π_1 .

El brazo $c d$ describe otra circunferencia contenida en un plano perpendicular a w_2 y perpendicular a π y que pasa por O que se designa por π_2 .

Estos dos planos forman un ángulo β igual al que forman los ejes y las dos circunferencias a las que se ha hecho referencia son círculos de la misma esfera cuyo centro es O.

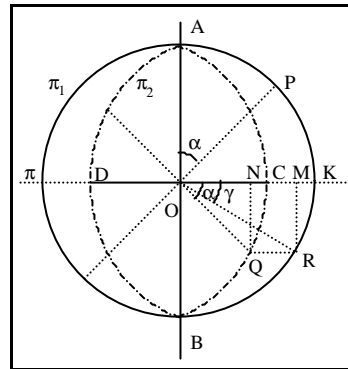


Figura 31.- Movimiento de la cruzeta en el espacio.

Si se proyecta todo sobre π_1 se tiene que el brazo $a b$ recorre la circunferencia de la figura y que el $c d$ recorre otra circunferencia cuya proyección sobre π_1 es una elipse siendo:

$$OC = OK \cdot \cos b$$

Si una de las ramas de la cruzeta está en A una rama del conducido estará en C y si la primera recorre un ángulo α hasta P, la segunda pasará a Q.

El ángulo γ realmente barrido por el elemento conducido mientras que el conductor recorre α puede hallarse abatido π_2 sobre π_1 .

Al abatir Q se convierte en R. Es decir OR es la longitud real de OQ y $ROK = \gamma$ es el ángulo abatido.

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} g &= \frac{RM}{OM}; \operatorname{tg} a = \frac{QN}{ON} \\ \operatorname{tg} a &= \frac{OM \cdot QN}{ON \cdot RN} = \frac{OM}{ON} = \frac{OK}{OC} = \frac{1}{\cos b} \end{aligned}$$

Resultando:

$$\operatorname{tg} g = \cos b \cdot \operatorname{tg} a \quad (I)$$

La relación entre la velocidades angulares del árbol conducido y del árbol conductor se halla diferenciando la ecuación anterior.

$$(1 + \operatorname{tg}^2 g) \cdot \omega_2 = \cos b \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 a) \cdot \omega_1$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\cos b \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 a)}{1 + \operatorname{tg}^2 g} \quad (\text{II})$$

Eliminando entre (I) y (II) α o γ según convenga, se tiene:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\cos b}{1 - \operatorname{sen}^2 a \cdot \operatorname{sen}^2 b} \quad (\text{III})$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{1 - \cos^2 g \cdot \operatorname{sen}^2 b}{\cos b} \quad (\text{IV})$$

En (III) se observa que $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ es mínimo cuando $\operatorname{sen} \alpha = 0$ o cuando $\alpha = 0, \pi$ etc. siendo entonces $\gamma = 0, \pi$ etc.

También se tiene que $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ es máximo cuando $\operatorname{sen} \alpha = \pi/2, 3\pi/2$ etc.

Si ω_2 es constante la relación de las velocidades angulares varía entre los límites $\cos \beta$ y $1/\cos \beta$.

Para un valor de β de 15° la relación de velocidades varía entre 0'966 y 1'037.

Si se hace una representación gráfica situando en abscisas el ángulo que forman los ejes y en ordenadas la diferencia entre los valores máximos y mínimos de la relación de velocidades expresada en % se obtiene para ángulos menores de 28° una curva muy útil para analizar una unión Cardan.

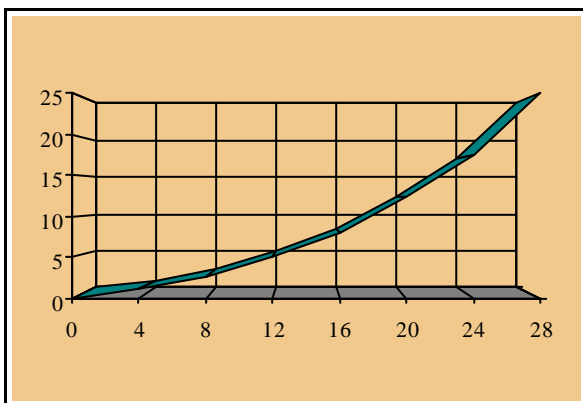


Figura 32.- Relación de velocidad entre árboles.

Estas variaciones en la velocidad dan lugar a fuerzas de inercia, pares, ruido y vibración que no se presentarían si la relación de velocidades fuese constante.

Los valores que toma ω_2 cuando $\beta = 30^\circ$:

$$\omega_2 = \frac{\cos b}{1 - \operatorname{sen}^2 a \cdot \operatorname{sen}^2 b} \cdot \omega_1 \quad \omega_2 = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{4 - \operatorname{sen}^2 a} \cdot \omega_1$$

Representando la variación de ω_2 para un valor dado de ω_1 para diferentes valores de a en una vuelta completa se tiene:

a	ω_2/ω_1
0°	$\sqrt{3}/2$
30°	$8 \cdot \sqrt{3}/15$
60°	$8 \cdot \sqrt{3}/13$
90°	$2 \cdot \sqrt{3}/13$
120°	$8 \cdot \sqrt{3}/13$
150°	$8 \cdot \sqrt{3}/15$
180°	$\sqrt{3}/2$

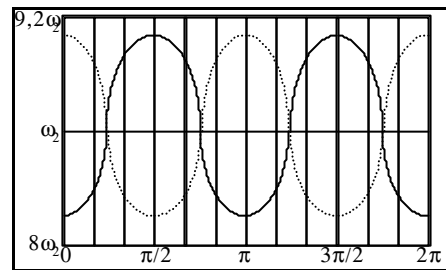


Figura 33.- Velocidad de salida para un valor dado de la velocidad de entrada.

Por tanto existen cuatro instantes en una vuelta completa de la junta en que las velocidades de los dos ejes son iguales. En el resto del tiempo invertido en la vuelta, el elemento conducido gira más deprisa o más despacio que el conductor.

Las acciones sobre los elementos constituyentes de una junta universal son los que se presentan en la figura siguiente:

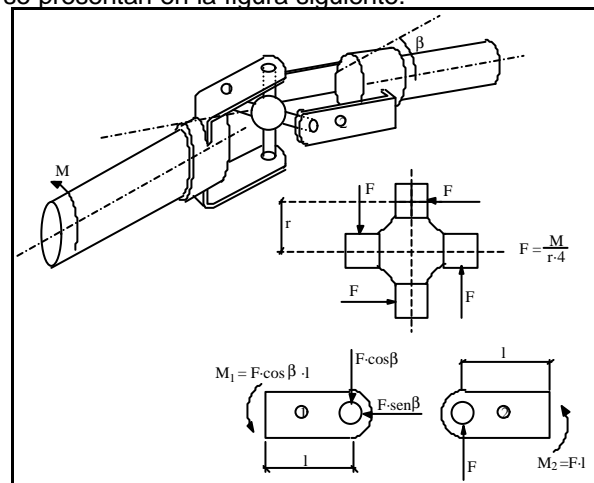


Figura 34.- Distribución de acciones en junta Cardan.

CHAVETAS, PASADORES Y ESTRÍAS

Las *chavetas*, también llamadas *cuñas* se usan para impedir el movimiento entre el árbol y el elemento conectado a él, cuando se transmite un par desde el primero al segundo.

Las formas más usuales de chavetas son las que se presentan en la Figura 35:

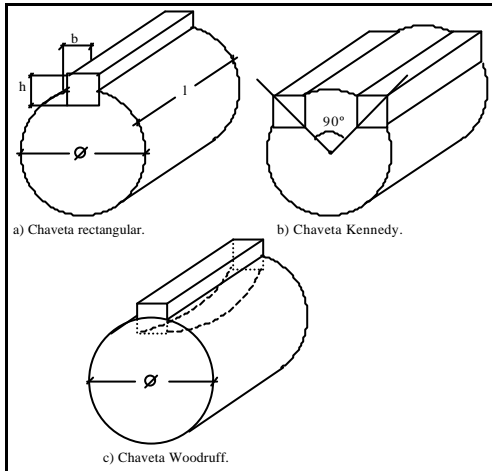


Figura 35.- Tipos usuales de chavetas.

Como norma el ancho de las cuñas es de

$$\frac{1}{4} \cdot \mathcal{A}$$

Para el cálculo de las cuñas se utiliza como base la potencia transmitida por el eje N y su régimen de giro n , de donde se obtiene el par transmitido, según la expresión:

$$M = \frac{N}{n}$$

Una vez calculado el par transmitido, se obtiene la carga que soporta la chaveta mediante la expresión:

$$F = \frac{2 \cdot M}{\mathcal{A}}$$

La fatiga a cortadura se calcula mediante la expresión:

$$t = \frac{F}{b \cdot l}$$

La fatiga a compresión se calcula mediante la expresión:

$$s = \frac{2 \cdot F}{h \cdot l}$$

- Cuando $b > h$ las chavetas normalmente se pueden romper porque $s > s_y$.
- Cuando $b < h$ las chavetas normalmente se pueden romper porque $t > t_y$.

Los *pasadores* se montan mediante su colocación en un taladro pasante entre el árbol y el cubo del elemento, según se muestra en la Figura 36:

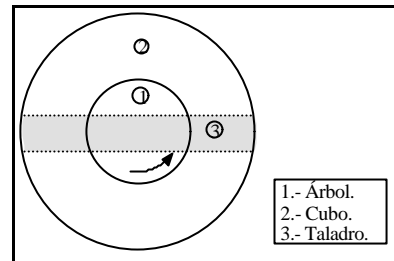


Figura 36.- Pasador de fijación.

El cálculo del pasador se realiza considerando que trabaja a cortadura, para ello si N es la potencia transmitida por el árbol y n su régimen de giro, el par transmitido es:

$$M = \frac{N}{n}$$

Si (r) es el radio del árbol, la fuerza que actúa sobre el pasador es:

$$F = \frac{M}{r}$$

La fatiga cortante en el pasador viene dada por:

$$t = \frac{2 \cdot F}{p \cdot \mathcal{A}^2}$$

Siendo:

\emptyset = diámetro del pasador.

Las *estrías* permiten conectar el árbol al elemento con un grado de libertad. Su representación se realiza en la Figura 37:

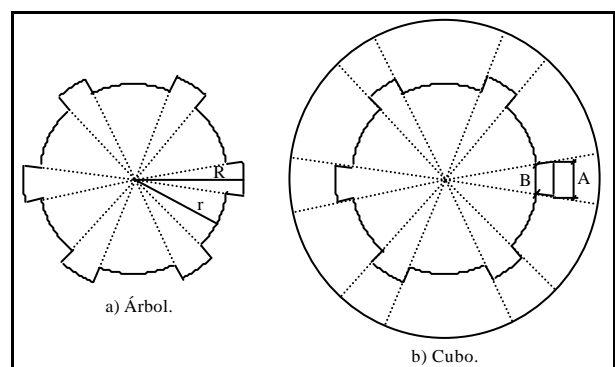


Figura 37.- Estrías para transmisión.

El cálculo de las estrías se realiza a cortadura y a flexión, considerando que la carga actúa en el radio medio y que todas ellas trabajan simultáneamente. Para ello si **N** es la potencia transmitida por el árbol y **n** su régimen de giro, el par transmitido es:

$$M = \frac{N}{n}$$

La carga que soporta cada estría viene dada por la expresión:

$$F = \frac{2 \cdot M}{(R + r)} \cdot \frac{1}{n^{\circ} \text{ de estrías}}$$

La fatiga a cortante que soporta cada estría viene dada por:

$$t = \frac{2 \cdot F}{(A + B) \cdot l}$$

Siendo:

A = anchura mayor de cada estría.

B = anchura menor de cada estría.

l = longitud de las estrías.

La fatiga a flexión que soporta cada estría viene dada por:

$$s = \frac{3 \cdot F \cdot (R - r)}{A^2 \cdot l}$$