

18 de febrero de 2011

## TEORÍA DE COLAS I

FECHA DE ENTREGA: 1 DE MARZO DE 2011.

## NORMATIVA

La realización de estos ejercicios es una decisión voluntaria y su calificación alcanzará el 20% de la nota final de la asignatura.

Estos ejercicios tienen carácter individual y han de entregarse manuscritos. La entrega se realizará preferentemente en mano, durante los horarios de tutoría o en el horario de clase, también es posible su entrega a través de otros medios haciéndose el alumno responsable del posible extravío, deterioro o pérdida del mismo. La fecha límite de entrega de los ejercicios es por defecto improrrogable.

Recordemos que los horarios de tutoría son Martes y Jueves de 11 : 30 a 13 : 30 y Viernes de 9 : 30 a 11 : 30, despacho 2 – 17 de la E.S. de Informática y el correo electrónico L.RodriguezAragon@uclm.es, cualquier duda referente a los ejercicios será bienvenida. Los originales de los ejercicios quedarán en poder del profesor como parte del examen de la asignatura. Se pondrá en conocimiento de los alumnos las calificaciones obtenidas en los ejercicios y a petición de los alumnos se pondrá a su disposición la corrección parcial o total de los mismos. Al mismo tiempo en horarios de tutoría se podrán resolver dudas relacionadas con la corrección de los ejercicios.

**IMPORTANTE:** De cara al aprovechamiento y evaluación del alumno es **necesario** especificar el tiempo invertido en la resolución de los ejercicios. Así como citar cualquier material bibliográfico o de referencia utilizado.

## EJERCICIOS

Los procesos de Poisson son procesos estocásticos usualmente empleados en el diseño de modelos de colas o fenómenos de espera.

**Definición 1.** Dado un proceso de conteo  $\{N(t); t \geq 0\}$ , se dice que es un proceso de Poisson de parámetro o intensidad  $\lambda > 0$  si verifica las siguientes propiedades:

- El proceso tiene incrementos independientes, es decir, si se tienen instantes  $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$ , entonces las variables aleatorias  $N(t_1) - N(t_0), N(t_2) - N(t_1), \dots, N(t_n) - N(t_{n-1})$ , que representan el número de ocurrencias del suceso en los intervalos  $(t_{i-1}, t_i]$ , son independientes.
- $P(N(t) = 1) = \lambda t + o(t)$ .
- $P(N(t) \geq 2) = o(t)$ .

Donde  $o(t)$  verifica que  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{o(t)}{t} = 0$

Como consecuencia tenemos que  $P(N(t) = 0) = 1 - \lambda t + o(t)$ .

**Teorema 1.** Sea  $\{N(t); t \geq 0\}$  un proceso de Poisson de parámetro  $\lambda$ , entonces la variable aleatoria  $N(t)$  sigue una distribución de Poisson de parámetro  $\lambda$ , cuya función de probabilidad es:

$$P(N(t) = n) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$$

**Ejercicio 1.** La definición de un proceso de Poisson de parámetro  $\lambda$  define la probabilidad de ocurrencia de un número discreto de eventos. Al mismo tiempo el teorema enunciado relaciona la distribución de Poisson con los procesos estocásticos del mismo nombre. Probar que en ambos casos la probabilidad de que nuestro proceso se encuentre en el estado cero, uno, dos, etc. coinciden.

**Teorema 2.** Sea  $\{N(t); t \geq 0\}$  un proceso de Poisson de parámetro  $\lambda$  y sean  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots$  los tiempos aleatorios de ocurrencia del suceso (o de llegada), definamos los tiempos entre ocurrencias consecutivas del suceso como  $\tau_i = t_i - t_{i-1}$ , entonces las variables aleatorias continuas  $\tau_i$  son variables aleatorias mutuamente independientes e idénticamente distribuidas siguiendo una distribución exponencial de parámetro  $\lambda$  y cuya función de densidad es:

$$f(\tau) = \lambda e^{-\lambda \tau}$$

**Ejercicio 2.** Sea  $\{N(t); t \geq 0\}$  un proceso de Poisson de parámetro  $\lambda = 2$  sucesos/minuto, determinar las siguientes probabilidades:

1. Probabilidad de que el tiempo transcurrido entre la ocurrencia de dos sucesos consecutivos sea de 1 minuto.
2. Probabilidad de que el tiempo transcurrido entre la ocurrencia de dos sucesos consecutivos sea menor a 1 minuto.
3. Probabilidad de que el tiempo transcurrido entre la ocurrencia de dos sucesos consecutivos sea mayor a 1 minutos.
4. Probabilidad de que durante 1 minuto no ocurra el suceso.
5. Probabilidad de que durante 1 minuto ocurra el suceso una vez.

Dado un Proceso de Poisson  $\{N(t); t \geq 0\}$  de parámetro  $\lambda > 0$  hemos visto que la esperanza matemática o número medio de ocurrencias del fenómeno por unidad de tiempo es  $\lambda$ . Este parámetro de los procesos de Poisson podemos interpretarlo como la intensidad de nuestro fenómeno o nuestro suceso.

**Ejercicio 3.** Representar gráficamente la función de Probabilidad para tres procesos de poisson de parámetros diferentes y representar la función de Densidad de los tiempos entre ocurrencias de dos sucesos consecutivos para los mismos tres procesos. Representar al mismo tiempo en ambos casos las funciones de Distribución respectivas. Explicar brevemente que es lo que significa cada una de las gráficas y cual es la evolución de los procesos al variar el parámetro.

#### SIMÉÓN DENIS POISSON (1781-1840)



Fue un físico y matemático francés al que se le conoce por sus diferentes trabajos en el campo de la electricidad, también hizo publicaciones sobre la geometría diferencial y la teoría de probabilidades. El trabajo mas importante de Poisson fue una serie de escritos de las integrales definidas, y cuando tan solo tenia 18 años escribió una memoria acerca de el método de las diferencias finitas.

Poisson enseñó en la École Polytechnique desde el año 1802 hasta 1808, en que llegó a ser un astrónomo del Bureau des Longitudes, en el campo de la astronomía estuvo fundamentalmente interesado en el movimiento de la Luna. En 1809 fue nominado como profesor de matemáticas puras en la recién estrenada Faculté des Sciences.

En 1837, publicó *Rerecherchés sur la probabilité des jugements*, un trabajo importante en la probabilidad, en el cual describe la probabilidad como un acontecimiento fortuito ocurrido en un tiempo o intervalo del espacio bajo las condiciones que la probabilidad de ocurrencia de un acontecimiento es muy pequeña pero el número de intentos es muy grande, entonces el evento actual ocurre algunas veces.

El nombre de Poisson se encuentra relacionado con multitud de conceptos matemáticos, la Integral de Poisson, la Ecuación de Poisson para un campo eléctrico, los Paréntesis de Poisson en geometría diferencial, la Proporción de Poisson en elasticidad, la Constante de Poisson en electricidad, la Distribución de Poisson en estadística, etc.

#### AGNER KRARUP ERLANG (1878-1929)

Erlang fue un estudiante prodigio, a la edad de 14 años pasó con éxito los exámenes básicos en Copenhague disfrutando de un permiso especial que le permitía examinarse aún estando por debajo de la edad mínima requerida. Estudió Matemáticas y Ciencias Naturales en la Universidad de la capital danesa. Se graduó en 1901, siendo las Matemáticas y la Física sus asignaturas principales. Recibió una mención especial por su solución a los problemas infinitesimales de Huygens.

Tras conocer a Jensen, ingeniero jefe de la compañía telefónica de Copenhague, sus intereses cambiaron hacia la teoría de la probabilidad. En 1908, Erlang entró a formar parte de dicha compañía, y aplicó la probabilidad a diferentes problemas relacionados con las comunicaciones telefónicas. En 1909, publicó su primer trabajo en este aspecto y en 1917 proporcionó una fórmula de costes y de tiempos de espera que fueron rápidamente aplicadas por multitud de compañías en el mundo, entre ellas el British Post Office.

