11 de marzo de 2011

PRÁCTICA 1: TEORÍA DE COLAS

FECHA DE ENTREGA: 31 DE MARZO DE 2011.

Normativa

La realización de estos ejercicios es una decisión voluntaria y su calificación alcanzará el 20 % de la nota final de la asignatura.

Estos ejercicios tienen carácter individual y han de entregarse manuscritos. La entrega se realizará preferentemente en mano, durante los horarios de tutoría o en el horario de clase, también es posible su entrega a través de otros medios haciéndose el alumno responsable del posible extravío, deterioro o pérdida del mismo. La fecha límite de entrega de los ejercicios es por defecto improrrogable.

Recordemos que los horarios de tutoría son Martes y Jueves de 11 : 30 a 13 : 30 y Viernes de 9 : 30 a 11 : 30, despacho 2 − 17 de la E.S. de Informática y el correo electrónico L.RodriguezAragon@uclm.es, cualquier duda referente a los ejercicios será bienvenida. Los originales de los ejercicios quedarán en poder del profesor como parte del examen de la asignatura. Se pondrá en conocimiento de los alumnos las calificaciones obtenidas en los ejercicios y a petición de los alumnos se pondrá a su disposición la corrección parcial o total de los mismos. Al mismo tiempo en horarios de tutoría se podránresolver dudas relacionadas con la corrección de los ejercicios.

IMPORTANTE: De cara al aprovechamiento y evaluación del alumno es **necesario** especificar el tiempo invertido en la resolución de los ejercicios. Así como citar cualquier material bibliográfico o de referencia utilizado.

Práctica

Introducción. Durante el desarrollo de la primera práctica usaremos la aplicación AQUAS (Application for solving QUeuing problems Analytically and using Simulation). Esta aplicación se ha desarrollado dentro de un proyecto fin de carrera de Ingeniería Informática realizado por Jorge L. Vega Valle y dirigido por Ricardo Cao Abad, Catedrático de Estadística e Investigación Operativa de la Universidad de La Coruña.

La aplicación está desarrollada en MATLAB y se puede obtener de la página web de la asignatura Teoría de Colas[1] que se imparte en la carrera de Ingeniería Informática. Esta aplicación es usada por los alumnos en el desarrollo de las prácticas de laboratorio de dicha asignatura. Los objetivos de esta aplicación son los siguientes:

- Reducir el tiempo de resolución y eliminar la posibilidad de cometer un error en la resolución de un problema de colas.
- Resolver modelos de colas tanto de forma analítica (para aquellos modelos en los que tanto la distribución del tiempo de llegadas como la del tiempo de servicio sean de carácter exponencial, representado por la letra M) como por simulación (la distribución del tiempo de llegadas o de servicio puede ser de uno de los siguientes tipos: exponencial, uniforme, determinista, gamma, beta, normal, lognormal o de Weibull, representada por la letra G).
- Hallar las características del modelo de colas (probabilidad de que haya un determinado número de clientes p_n, número medio de clientes L, tiempo medio de espera de un cliente en la cola W_q, intensidad de tráfico del modelo ρ,...).
- Poder analizar la influencia de la variación de algunos parámetros de entrada del modelo en los parámetros de salida y ayudar a la toma de decisiones (Análisis de Sensibilidad).
- Proporcionar una respuesta mediante simulación a aquellos modelos que no tienen una solución analítica (Tema 3).
- Fomentar la enseñanza y el aprendizaje de la teoría de colas en un ámbito docente.

La aplicación permite resolver el problema mediante dos estrategias diferentes:

Por un lado tenemos la posibilidad de resolver analíticamente los modelos cuyas distribuciones de tiempo son de la familia exponencial (M) tanto en llegada de clientes como en servicio. Es decir, se trata de evaluar las fórmulas matemáticas que se obtienen del desarrollo teórico de la teoría de colas. Como hemos visto estas formulas no suelen ser sencillas e incluso hemos visto como en algunos casos hemos de

[1] http://www.udc.es/dep/mate/TeoriaColas/colas.htm

ser cuidadosos a la hora de efectuar esos cálculos buscando siempre una posible optimización en el tiempo de cálculo.

Por otro lado si consideramos que alguna distribución de tiempos (tanto de llegadas como de servicio) sigue algún otro tipo de distribución, los cálculos de los valores de interés en un fenómeno de colas dan lugar a complejos razonamientos matemáticos que pocas veces desembocan en fórmulas claras y concisas que se puedan evaluar analíticamente. Para resolver estos casos, es común usar técnicas de simulación que veremos en el próximo tema.

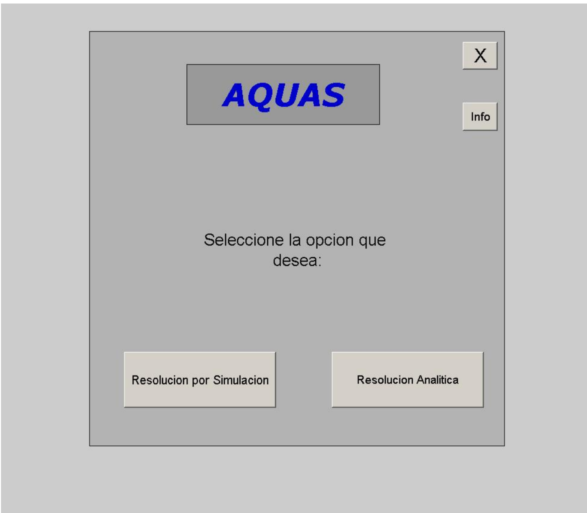
Descarga e Instalación. La aplicación como hemos dicho se puede descargar de la página web de la Asignatura de Teoría de Colas, en esta página se pueden encontrar versiones para Windows y Linux así como la memoria correspondiente al proyecto fin de carrera realizado. Sin embargo recomendamos utilizar la página web `http://www.uclm.es/profesorado/licesio/` en el que se puede descargar una versión adaptada para el release de MATLAB instalado en el aula de ordenadores.

Una vez descargado el fichero .zip, procederemos a su descompresión y lo situaremos en un directorio al que podremos acceder de forma fácil. En este directorio se encuentra el código libre y completo de la aplicación.

Lanzamos MATLAB y bien a través de comandos o por medio de las ventanas de diálogo fijamos el **Current Directory** en el directorio en el que hayamos situado la aplicación AQUAS.

Mediante el comando >> `aquas` lanzaremos la aplicación, que se abrirá en forma de un interfaz gráfico.

Como hemos comentado con anterioridad, el interfaz nos permite resolver los problemas mediante dos opciones diferentes, analíticamente o a través de simulación. En esta primera práctica usaremos la resolución analítica del problema. Por lo tanto seleccionaremos la opción de **Resolución Analítica**.



Notación de Kendall. Recordemos la notación de Kendall (1953):

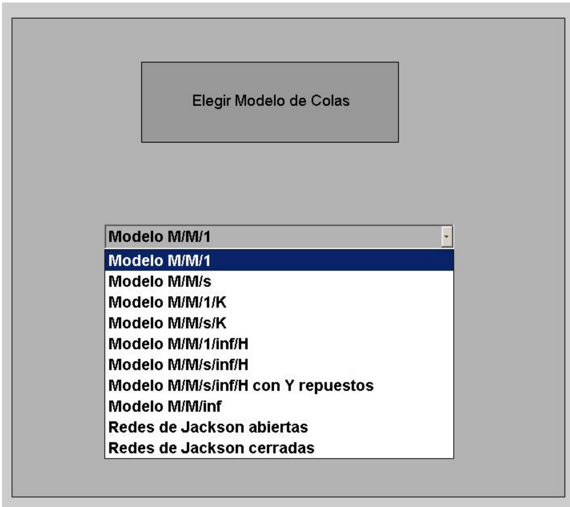
$$A/B/s/K/H/Z$$

- A Representa la distribución de tiempo entre llegadas. Las más usadas son M exponencial, U Uniforme, D determinística, G genérica, etc.
- B Representa la distribución de tiempos de servicio. Se usan las mismas siglas que en el caso de A.
- s Es el número de servidores en el sistema, un número entero.
- K Representa la capacidad máxima de la cola. Puede tomar valores desde 0 hasta ∞. Por defecto si el valor de K se omite, se considerará que toma el valor infinito.
- H Es el tamaño de la población que puede acudir al centro de servicio. Puede ser finito o infinito, por defecto se entiende que la población es infinita.
- Z es la disciplina de la cola, por defecto FIFO.

La aplicación también nos permite trabajar con Redes de Colas, estas estructuras son semejantes a redes o grafos en las que cada nodo está formado por una cola tradicional. Las redes de colas pueden ser abiertas o cerradas según la población varíe o permanezca constante en la red.

Modelos de Colas. La aplicación AQUAS tienen implementados los siguientes modelos de colas en la resolución analítica, en todos los casos los tiempos entre llegadas consecutivas y los tiempos de servicio son exponenciales: M/M.

- $M/M/1$: Un único servidor.
- $M/M/s$: s servidores.
- $M/M/1/K$: Un único servidor y una cola con una capacidad máxima K.
- $M/M/s/K$: s servidores y una cola con una capacidad máxima K.
- $M/M/1/\infty/H$: Un único servidor y una cola con una capacidad infinita y una población finita con H individuos.
- $M/M/s/\infty/H$: s servidores y una cola con una capacidad infinita y una población finita con H individuos.
- $M/M/s/\infty/H$ *con* Y *repuestos*: s servidores y una cola con una capacidad infinita y una población finita con H individuos, la idea es reemplazar el espacio vacío que deja el cliente en la población con otro cliente llamado repuesto.
- $M/M/inf$: Infinitos servidores.
- Redes de Jackson Abiertas y Cerradas.



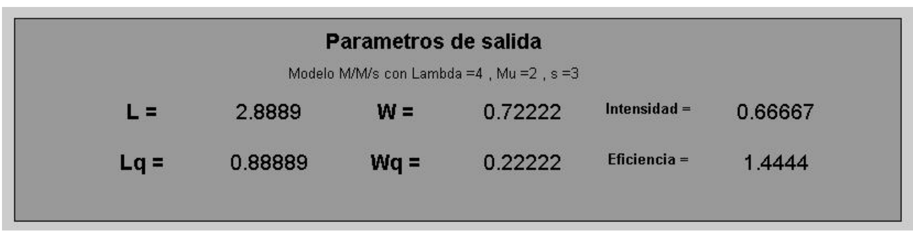
Planteamiento y Resolución del Modelo. Una vez seleccionado nuestro modelo, pasaremos a introducir los parámetros del problema. Como recordaremos los parámetros son datos inherentes al problema y que debemos bien obtener de él o bien estimar. En el caso de los fenómenos de espera los parámetros son: λ tasa de llegada de clientes, μ tasa de servicio por parte del sistema, s número de servidores, K capacidad máxima de la cola y por último H individuos de la población. Algunos de estos parámetros se pueden obviar tomando en este caso los valores por defecto.

Recordemos que los sistemas de colas que analizaremos tienen que ser sistemas estacionarios en los que la tasa de llegada de clientes ha de ser menos que la tasa de servicio. Es decir, la intensidad, ρ representada por el cociente de ambas cantidades ha de ser menor que uno:

$$\text{Para } s = 1 \ \rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1; \quad \text{Para } s \neq 1 \ \rho = \frac{\lambda}{s\mu} < 1.$$

En caso contrario la aplicación nos dará un error.

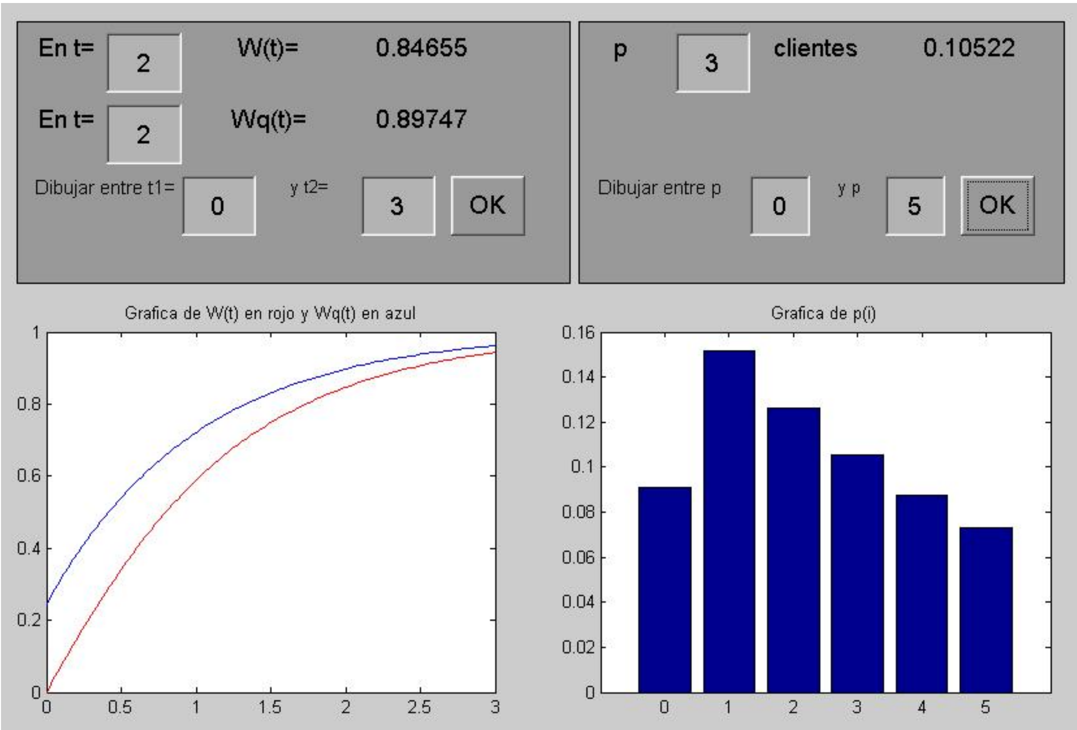
El resultado de las fórmulas analíticas del modelo nos dan una serie de parámetros de salida, también parámetros, ya que aunque desconocidos son inherentes al problema:



Recordemos el significado de estas cantidades:

- L: Número medio de clientes en el sistema, $L = E(N)$.
- L_q: Número medio de clientes en la cola, $L_q = E(N_q)$.
- W: Tiempo medio que pasa un cliente en el sistema, $W = E(\mathcal{W})$.
- W_q: Tiempo medio que pasa un cliente en la cola, $W_q = E(\mathcal{W}_q)$.
- ρ: Intensidad de Tráfico,
$$\rho = \frac{\lambda}{s\mu}.$$
- Eficiencia: Cociente entre el tiempo medio que un cliente se encuentra en el sistema W y el tiempo medio que el sistema tarda en procesar su servicio $W - W_q$, esta cantidad es ≥ 1. Cuanto mayor sea su valor menos eficiente será el sistema
$$Eff = \frac{W}{W - W_q} = \frac{W}{W_s}$$

Al mismo tiempo la aplicación nos permite conocer otros valores interesantes propios del problema:



Por un lado tenemos valores relacionados con las variables aleatorias $\mathcal{W}$ y $\mathcal{W}_q$:

- $\mathcal{W}$: Variable Aleatoria Continua que representa el tiempo que pasa un cliente en el sistema.
- $\mathcal{W}_q$: Variable Aleatoria Continua que representa el tiempo que pasa un cliente en la cola.

Los valores que se presentan son evaluaciones de la función de distribución de ambas variables para un valor de t dado:

$$W(t) = P(\mathcal{W} \leq t), \quad W_q(t) = P(\mathcal{W}_q \leq t)$$

Las gráficas de las funciones de distribución $W(t)$ y $W_q(t)$ se representan de forma simultánea, la primera en rojo y la segunda en azul. Observar que siempre $W(t) \geq W_q(t)$.

En otra sección se nos facilita el valor de p_n para cualquier valor de n que indiquemos, recordemos que p_n es la probabilidad de que se encuentren n clientes en el sistema.

Al mismo tiempo podemos dibujar en forma de histograma (recordar que n es una variable aleatoria discreta), la función de probabilidad de la variable n (número de clientes en el sistema).

En algunos modelos se nos presenta también la posibilidad de obtener la probabilidad de que en el momento en que se produce una llegada, se encuentren n clientes en el sistema, q_n.

Ejercicios. Planteamos a continuación una serie de ejercicios, algunos de ellos comentados y resueltos con la aplicación AQUAS, otros planteados para su resolución por parte del alumno.

Ejercicio 1. *Los mecánicos que trabajan en una planta troqueladora deben solicitar su herramienta en un centro de material. Un promedio de* 10 *mecánicos por hora llegan pidiendo su equipo. Por el momento, un empleado atiende ese centro; su salario es de 6 € por hora y tarda un promedio de 5 minutos en cumplir cada pedido de herramienta solicitada. Como cada mecánico produce 10 € en valor de bienes por hora, cada hora que un mecánico pasa en el centro de material le cuesta a la compañía 10 € .*

La compañía está sopesando la posibilidad de contratar, a 4 € la hora, a un ayudante para el empleado. Se estima que entre los dos podrían reunir el equipo solicitado por cada empleado en 4 minutos. Suponiendo que los tiempos de servicio y de llegadas son exponenciales, ¿Debemos contratar al ayudante?

Si no estamos seguros de la magnitud de la reducción del tiempo de servicio con la presencia del ayudante en el centro de material. ¿Podemos establecer la cantidad de tiempo en que debería prestarse el servicio para que los costes totales fuesen los mismos contratando que sin contratar al ayudante?.

Solución:

En este caso el objetivo de la compañía es minimizar la suma del coste de servicio por hora y el coste esperado por hora debido a los tiempos muertos que los empleados pasan en el centro de material. La cantidad a minimizar es:

$$\text{Coste total/h} = \text{Coste de servicio/h} + \text{Coste de espera/h}$$

El coste de espera lo calcularíamos en función del coste de espera por cliente y el número de clientes esperados a la hora:

$$\text{Coste de espera} = \text{Coste de espera/cliente} \cdot \text{Clientes esperados/h}$$

El coste de espera/cliente equivale a 10 € por el tiempo promedio en horas que el cliente pasa en el sistema W. Los clientes esperados a la hora equivalen a la tasa de llegadas λ.

En el problema plantearemos un modelo $M/M/1$ y queremos comparar el coste esperado por hora si no contratamos al ayudante y si lo contratamos. Si no se contrata al ayudante $\lambda = 10$ mecanicos/hora y $\mu = 12$ mecánicos/hora. Utilizando la aplicación AQUAS obtenemos que $W = 0{,}5$ y por lo tanto el coste de espera:

$$\text{Coste de espera} = 10 \cdot W \cdot \lambda \text{ €} = 50 \text{ €} .$$

Por lo que, sin el ayudante, el coste total por hora es:

$$\text{Coste total/h} = 6 + 50 = 56 \text{ €} .$$

Si se contrata al ayudante, la tasa de servicio pasaría a ser $\mu = 15$ mecánicos/hora y utilizando AQUAS obtenemos que $W_{Ayu} = 0{,}2$ y por lo tanto el coste de espera:

$$\text{Coste de espera}_{Ayu} = 10 \cdot W_{Ayu} \cdot \lambda \text{ €} = 20 \text{ €} .$$

Con lo que el coste total quedaría en:

$$\text{Coste total/h}_{Ayu} = 6 + 4 + 20 = 30 \text{ €} .$$

Lo que significa un ahorro considerable de más del 45 %.

En el caso en que desconozcamos la tasa de servicio con la presencia del ayudante y queramos asegurarnos que la presencia de éste no va a disparar los costes, plantearemos que:

$$\text{Coste total/h} = \text{Coste total/h}_{Ayu}$$

Sabemos que el Coste total a la hora sin ayudante asciende a 56€ luego queremos encontrar la tasa de servicio que haga que el Coste total a la hora con ayudante sea el mismo.

$$\text{Coste total/h}_{Ayu} = 56 \text{ €} = 6 + 4 + (10 \cdot W_{Ayu} \cdot \lambda) = 10 + (10 \cdot W_{Ayu} \cdot 10)$$

Despejando obtenemos que W_{Ayu} ha de ser menor o igual a 0,46 h para que sea rentable la presencia del ayudante en el centro de material. Con la ayuda de la aplicación AQUAS podemos cambiar los parámetros de entrada del problema en el intervalo $\mu = [12, 15]$ hasta que demos con el valor $W_{Ayu} = 0{,}46$.

Para $\mu = 12{,}17$ mecánicos/hora, $W_{Ayu} = 0{,}460$ luego el tiempo de servicio tiene que reducirse por lo menos a 4,93 minutos. Luego una ligera reducción del tiempo medio de servicio de 5 a 4,93 minutos hacen que los costes de contratar a un ayudante se igualen a los de no contratarlo.

Ejercicio 2. *Una pequeña empresa de mensajería urgente tiene 2 motos para transportar los envíos de los clientes. El servicio está restringido al área de la ciudad y las solicitudes se atienden telefónicamente. Se ha determinado que cada moto tarda en realizar el servicio una media de* 15 *minutos, siguiendo este tiempo una distribución exponencial. En la centralita telefónica de la empresa se reciben como promedio unas* 6 *solicitudes por hora, que siguen una distribución de Poisson. Para mantener los niveles de servicio, los responsables de la empresa han indicado a la operadora que no acepte en espera más de* 2 *solicitudes.*

1. *¿Qué tipo de modelo es el planteado? Resolverlo y dar los tiempos de espera medios tanto en el sistema como en la cola.*
2. *Cómo influye la restricción impuesta a la operadora; analizar qué es lo que ocurre si dicha restricción desaparece o se flexibiliza hasta* 5 *solicitudes.*
3. *Cuántas motocicletas debería de tener la empresa para eliminar la restricción y que la calidad del servicio fuese similar. ¿Cuál es la intensidad de tráfico en ambos casos?*

Solución:

1.El modelo es una cola del tipo $M/M/2/2$, es decir tenemos $s = 2$ servidores y una restricción en la capacidad de la cola de $K = 2$. La tasa de llegadas $\lambda = 6$ solicitudes a la hora y $\mu = 4$ servicios a la hora.

$$\rho = \frac{\overline{\lambda}}{s\mu}$$

En este caso ρ o intensidad no se calcula de la forma tradicional, ya que la tasa de llegadas se encuentra restringida por la capacidad de la cola.

Mediante la aplicación AQUAS resolvemos el modelos y tenemos que:

$$W = 0{,}32 \text{ h}, \quad W_q = 0{,}078 \text{ h}.$$

Los valores de intensidad y de eficiencia nos pueden dar una idea del ritmo de trabajo. Además, podemos representar gráficamente el histograma de p_n entre los valores 0 y 4. Al mismo tiempo, la probabilidad de que un mensaje se encuentre en el sistema más de una hora es prácticamente despreciable: $1 - W(1) = 0{,}032$, luego la inmensa mayoría de los mensajes se han procesado en un tiempo inferior a una hora.

2. Si la restricción se flexibiliza entonces tendremos que K tomará valores 3, 4 y 5. Habrá que cambiar los parámetros del problema y rellenar los valores en la tabla. Si por el contrario la restricción desaparece, nuestro problema pasa a ser un modelo $M/M/2$. Como curiosidad sería bueno probar en qué se diferencia un problema sin restricciones en la cola con otro con una restricción muy elevada (Ej.: 50, 100, etc.):

K:	2	3	4	5		∞
L						
L_q						
W	0,32					
W_q	0,078					
ρ						
Eff						

3. Con una nueva motocicleta más y eliminando la restricción de la capacidad de la cola, obtendríamos mejores resultados con unos valores:

$$W = 0{,}28 \text{ h}, \quad W_q = 0{,}039 \text{ h}.$$

Podemos entonces añadir a nuestra tabla los valores para el caso $M/M/3$:

L	
L_q	
W	
W_q	
ρ	
Eff	

Ejercicio 3. *Dibujar las estructuras de las siguientes colas y analizar con la ayuda de la aplicación AQUAS las ventajas e inconvenientes de cada una de ellas:*

1. *Una cola del tipo $M/M/1$ con tasa de llegadas $\lambda = 70$ y tasa de servicio $\mu = 100$.*
2. *Una cola del tipo $M/M/2$ con tasa de llegadas $\lambda = 70$ y tasa de servicio $\mu = 50$ para cada servidor.*
3. *Dos colas del tipo $M/M/1$ con tasa de llegadas $\lambda = 35$ y tasa de servicio $\mu = 50$.*
4. *Una única cola con dos servidores en serie. La tasa de llegadas al primer servidor es $\lambda = 70$ y la tasa de servicio es $\mu = 200$. Supondremos que la tasa de llegadas para el segundo servidor sigue siendo $\lambda = 70$ y la tasa de servicio es $\mu = 200$.*

Calcular el tiempo medio que el cliente pasa en el sistema en cada una de las estructuras anteriores y la probabilidad de que un cliente tenga que esperar a ser atendido. ¿Qué diferencias hay entre estas estructuras y cuál es la mejor?

Ejercicio 4. *Las ventanillas de un banco realizan las transacciones en un tiempo medio de 3 minutos. Los clientes llegan con una tasa media de 19 clientes a la hora (suponiendo tiempos exponenciales). El banco dispone de 5 ventanillas para atender a los clientes aunque no siempre están todas en servicio. A los operarios se les paga a razón de 8€ a la hora y por cada cajero que se incorpora existe un coste estructural de 6€ . Si los clientes tienen que esperar se ha cuantificado que las pérdidas que ello conlleva equivalen a 0,5€ por cada minuto medio de espera. ¿Cuántas ventanillas debería tener el banco permanentemente abiertas?*

Resolver los casos $s = 1$ y $s = 5$ analíticamente y a través de la aplicación AQUAS, los casos $s = 2, 3, 4$ resolverlos usando la aplicación AQUAS.

Solución:

s	1	2	3	4	5
L					
L_q					
W					
W_q					
ρ					
Coste					

Ejercicio 5. *Una cantera ha contratado los servicios de una excavadora para recoger la grava y cargarla en camiones. El tiempo medio que tarda la excavadora en cargar un camión es de 10 minutos. La cantera dispone de una flota de 4 camiones, cada uno de los cuales tarda una media de 15 minutos en transportar la grava a su destino y volver a la cantera. Tanto los tiempos de viaje como los tiempos de carga se suponen distribuidos exponencialmente. El coste de la excavadora es de 20€ por hora de servicio. Por otro lado se estima que cada hora que pasa un camión en la cantera representa un coste de 12€ , ya que durante ese tiempo no está efectuando servicio de transporte. Resolver utilizando AQUAS las siguientes cuestiones:*

1. *¿Qué modelo de colas permite representar este sistema?*
2. *¿Cuál es el porcentaje de tiempo que la excavadora está desocupada?*
3. *¿Cuál es el número medio de camiones que está fuera de la cantera?*
4. *¿Cuanto tiempo por término medio pasa un camión en la cantera?*
5. *Gracias al buen rendimiento y correcta gestión de la cantera se dispone de una cantidad de dinero con la que se podrían hacer dos posibles mejoras, o bien incorporar dos nuevos camiones a la explotación (en propiedad) o incorporar una nueva excavadora (en alquiler). ¿Es recomendable alguna de estas dos inversiones?, en caso afirmativo indicar cual es la más ventajosa.*