Curso de Estadística Aplicada a las Ciencias Sociales

Tema 11. Estimación de una media

(Cap. 21 del libro)

Tema 11. Estimación de una media

Introducción

- Tema anterior: tenemos una muestra. Calculamos una proporción primero en la muestra y luego en la población.
- Ahora: lo que queremos inferir es la media de una variable en la población
- Ejemplos: gasto, edad, puntuación de un líder, número de hijos de cada familia...

Introducción (2)

- Procedimiento (como antes):
  - tomar una muestra aleatoria simple (lo vimos en tema 8);
  - Calcular la media que tiene la variable en la muestra (estimador)
  - Calcular el valor de la media en la población, para lo que tenemos que tener una idea sobre la "precisión" del estimador

Introducción (3)

- El mismo estimador puede tener niveles de precisión muy diferentes
- Ejemplo, estimación de tres variables de gasto con una muestra de 5 estudiantes

	Est 1	Est 2	Est 3	Est 4	Est 5	Media muestral
Desplaz.	2.000	2.200	2.000	1.800	2.000	2.000
Ocio	1.000	3.500	4.000	1.500	0	2.000
Libros	0	0	0	0	10.000	2.000

Introducción (4)

- La media muestral es igual en los 3 casos
- Es fácil deducir que la estimación no es igualmente precisa en los tres
- La precisión dependerá de
  - La variabilidad de los datos en la población: más variabilidad, menos precisa la estimación
  - El tamaño muestral: más grande la muestra, más precisa la estimación

1. Distribución de la media en el muestreo

- Como en lección anterior, vamos a imaginar situación ficticia con una variable con distribución conocida
- Ejemplo: variable número de hijos en las familias
- Distribución en la población es:
- La media es 1,95
- La desviación típica es

  1,359

Número	Proporción
0	0,15
1	0,25
2	0,30
3	0,15
4	0,10
5	0,05

1. Distribución de la media en el muestreo

- Partimos de una población muy grande
  - Representamos la población como una urna con bolas. Una bola por familia, con valor de 0 a 5 (urna A), en proporción correspondiente
  - Sacamos muestra con 10 elementos. Calculamos media de la muestra. Ejemplo 1,6. Escribimos la media en una papeleta: otra urna distinta (urna B)
  - Devolvemos bolas a urna A y seguimos sacando muestras de 10 elementos

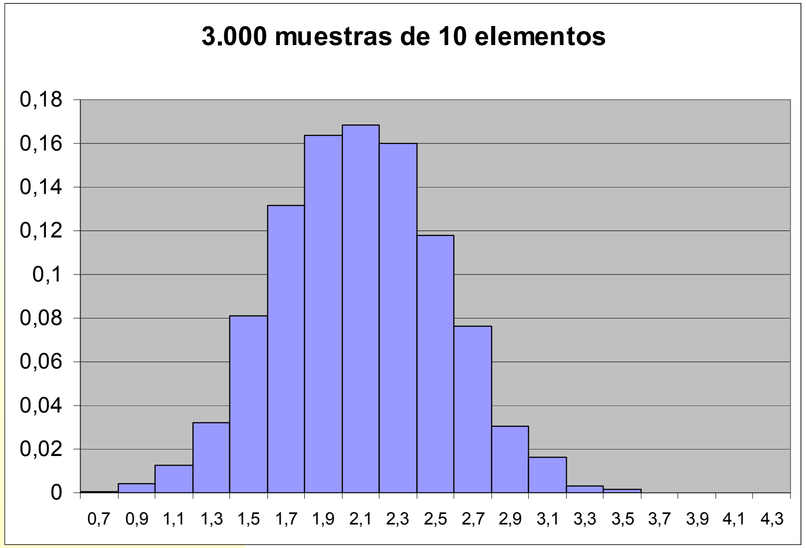
1. Distribución de la media en el muestreo

- Al final, urna B, llena de papeletas que representan las medias de cada una de las muestras
- ¿Qué valores tendríamos en urna B?
- La mayor parte de los valores: en torno a la media en la población (1,95)
- Si las muestras han sido pequeñas (10, 15, 25): habrá algunas muestras con valores alejados de 1,95: 0,5; 1; 2,5; 3
- Si muestras más grandes (más de 30 elementos): casi todas las muestras con poca variación respecto a 1,95

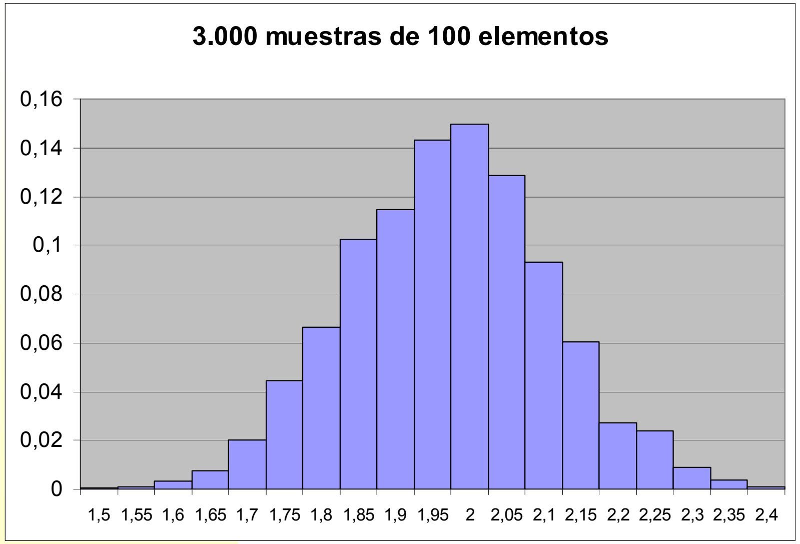
1. Distribución de la media en el muestreo

- La forma del histograma de las medias muestrales es la de una distribución normal (propiedades conocidas)
- Como en lección anterior: cuanto mayor sea la muestra, más se acerca la forma de la distribución de las medias muestrales a la distribución normal

1. Distribución de la media en el muestreo



1. Distribución de la media en el muestreo



2. La media muestral es centrada

- La variable media muestral estimada (la variable cuyos valores están en la urna B) se puede describir como cualquier variable
- Se puede demostrar que la media de la urna B = media de la urna A
- Lógico: media urna B = media valores urna A contados muchas veces

3. El error típico

- Recuperamos el concepto visto en el tema 10
- El error típico de estimación es la desviación típica de la variable aleatoria constituida por los valores de la media de todas las muestras que potencialmente podríamos sacar
- Es una medida de la dispersión de los estimadores respecto de su media

3. El error típico

- La fórmula es la misma que veíamos en el tema anterior:

$$ET = \frac{s_x}{\sqrt{n}}$$

- Es decir, como entonces:
  - el error típico es siempre menor que la desviación típica en la población
  - Y será menor cuanto mayor sea la muestra
- Pero tenemos el mismo problema que en el tema anterior: si la fórmula para calcular ET incluye la desviación típica en la población (s_x), estamos en un círculo vicioso

3. El error típico

- Solución: se puede demostrar (aquí no), que la desviación típica de la población se aproxima bastante al valor modificado de la desviación típica de la muestra, según la siguiente fórmula

$$\hat{s}_x = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \overline{x})^2}{n-1}}$$

- Cuando el tamaño muestral es grande, la diferencia entre usar en el denominador *n* o *n-1* no es demasiado importante
- En resumen, calculamos ET con la fórmula

$$ET = \frac{\hat{s}_x}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{\frac{\sum (x_i - \overline{x})^2}{n-1}}}{\sqrt{n}}$$

3. El error típico

- Ejemplo: muestra de 1.000 encuestados. Preguntamos cuántas veces han ido al cine en el último mes. La media de la muestra es 1,3 y la desviación típica (corregida con *n-1*) es 2,1.

$$ET = \frac{\hat{s}_x}{\sqrt{n}} = \frac{2{,}1}{\sqrt{1000}} = \frac{2{,}1}{31{,}623} = 0{,}0664$$

4. Intervalos de confianza

- Como en el tema anterior: podemos usar el ET para estimar un rango de valores, o intervalo dentro del que debe de estar el valor medio en la población
- Ejemplo anterior: muestra de 1.000 personas, media de 1,3 y ET de 0,0664
- Cuando la muestra es grande (más de 30 elementos), la variable aleatoria formada por las medias de las muestras tiene también una distribución normal
  - Su media es la media de la población
  - Su desviación típica es ET
  - Sabemos exactamente qué proporción de los casos está a diferentes distancias de la media, medidas en ET (valores *z*)

4. Intervalos de confianza

- Recordamos que las las distribuciones normales tienen esta propiedad:
  - 68,3% de los valores a menos de 1dt de la media
  - 95,5% de los valores a menos de 2dt de la media
  - 99,7% de los valores a menos de 3 dt de la media

4. Intervalos de confianza

- Por esa razón, cuando tenemos una muestra, en la que hemos calculado una media y un ET (que es la desviación típica de las muestras)
- Podemos decir que la media en la población estará con un
  - 68,3% de confianza (o de probabilidad) en el intervalo: estimador ± ET
  - 95,5% de confianza (o de probabilidad) en el intervalo: estimador ± 2·ET
  - 99,7% de confianza (o de probabilidad) en el intervalo: estimador ± 3·ET
- El intervalo de confianza es rango de valores que incluye, con una determinada probabilidad, el valor del parámetro en la población

4. Intervalos de confianza

- En el ejemplo que poníamos (media de 1,3 y ET de 0,0664)
- Podemos decir que el verdadero parámetro, con un
  - 68,3% de confianza está en en el intervalo de 1,3 ± 0,0664 (es decir, entre 1,2336 y 1,3664)
  - 95,5% de confianza está en el intervalo de 1,3 ± 2*0,0664 (es decir, entre 1,1672 y 1,4328)
  - 99,7% de confianza está en el intervalo de 1,3 ± 3*0,0664 (es decir, entre 1,1008 y 1,4992)
- (Precisión exagerada)

5. Estimación en poblaciones pequeñas

- Al igual que sucedía con la estimación de proporciones, cuando el tamaño de la población es pequeño comparado con el tamaño de la muestra y se hace un muestreo sin reposición (por ejemplo, se entrevista a 60 alumnos de clase de 90): la fórmula del ET cambia
- La media de las muestras sigue siendo la media de la población

5. Estimación en poblaciones pequeñas

- Pero: el error típico (la desviación típica de las medias en las muestras respecto a la media de la población) es menor que el caso de población muy grande
- Fórmula: si la fracción de muestreo es *f= n/N*

$$ET = \frac{\hat{s}_x}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{1-f}$$

5. Estimación en poblaciones pequeñas

- Ejemplo. Si el estudio anterior sobre entradas de cine estuviera hecho de una población de 5.000 personas (*f* = 1.000/5.000=0,2)

$$ET = \frac{\hat{s}_x}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{1-f} = \frac{2{,}1}{\sqrt{1000}} \cdot \sqrt{1-0{,}2} =$$

$$\frac{2{,}1}{31{,}623} \cdot \sqrt{0{,}8} = 0{,}0664 \cdot 0{,}894 = 0{,}05936$$

- Correspondiente, los intervalos de confianza serán también más pequeños

Resumen

- Distribución en el muestreo
- Media de las medias de las muestras= media población
- Desviación típica de las medias muestrales= error típico
- Fórmula del ET $ET = \frac{\hat{s}_x}{\sqrt{n}}$
- Intervalos de confianza: para el 95,5% de confianza, media muestral ± 2 ET
- ET corregido en poblaciones pequeñas

Ejercicios recomendados

- Del manual:
  - 21.4 (El intervalo con confianza del 95% es la media ± 1,96 ET)
  - 21.6
- De los exámenes:
  - Feb04: 12
  - Jul04: 11
  - Feb06: 8
  - Jul06: 9
  - Jul07: 8
  - Ene08, Jun08: 9