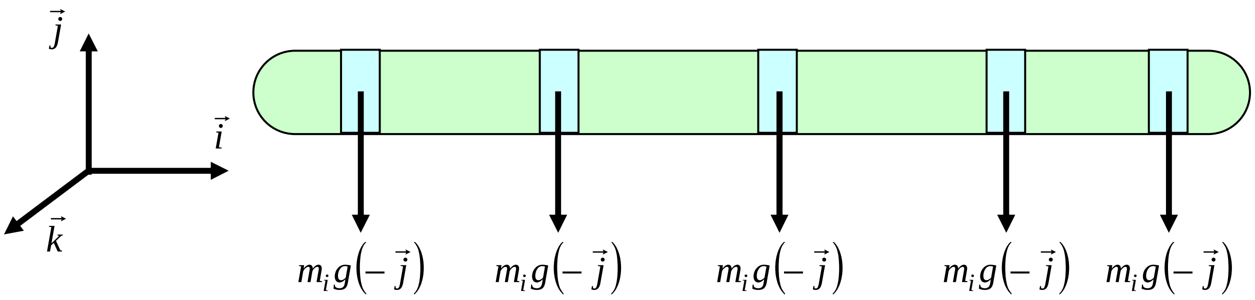
RESULTANTE DE FUERZAS PARALELAS DE IGUAL MAGNITUD

Consideremos el caso de un conjunto de fuerzas iguales y paralelas actuando sobre un cuerpo.

El mejor ejemplo de esta situación es el peso, que puede considerarse como la resultante de un conjunto de fuerzas paralelas, cada una de las cuales actúa sobre una porción m_i del cuerpo, cuya masa total es M.



(Se dibujan algunas porciones del cuerpo, y el vector peso de esa porción)

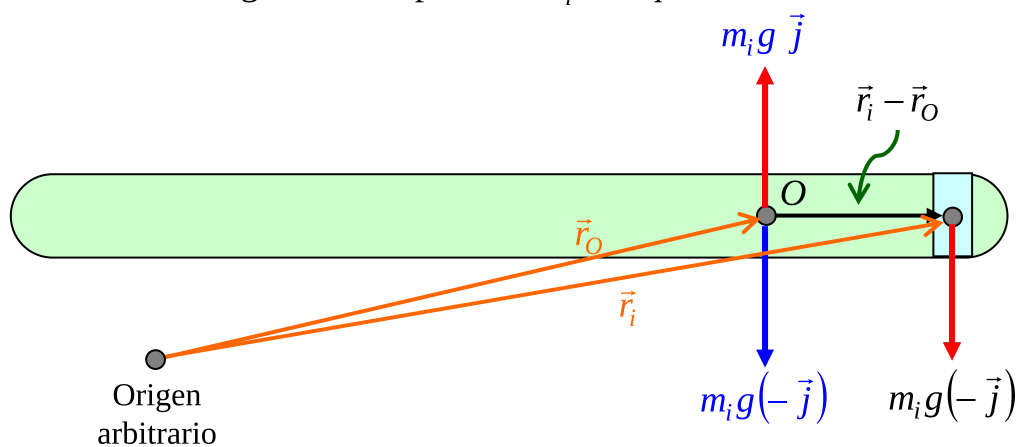
El peso del cuerpo es la resultante (suma) de los pesos de todas las porciones:

$$\vec{W} = \sum_i m_i g\left(-\vec{j}\right) = Mg\left(-\vec{j}\right)$$

Pero ¿dónde se aplica esta resultante? ¿Cómo debemos proceder si escogemos arbitrariamente un punto O donde aplicar esta resultante?

Razonaremos eligiendo una porción m_i cualquiera:

1. Sumamos dos vectores iguales y opuestos en O.



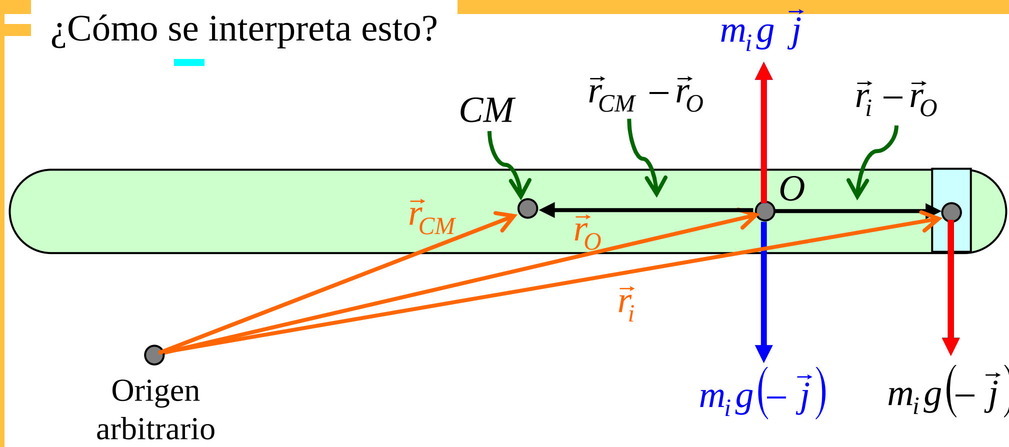
Al ser iguales y opuestos, sus efectos se contrarrestan en lo que a fuerzas se refiere…

… pero ahí tenemos un par junto con un vector en dirección vertical y sentido hacia abajo aplicado en el punto O.

2. Tomamos un origen arbitrario

RESULTANTE DE FUERZAS PARALELAS DE IGUAL MAGNITUD (Cont.)

¿Cómo se interpreta esto?



Nosotros podemos sustituir el peso de cada porción m_i aplicado en el lugar donde se encuentra la porción m_i por un vector de igual módulo y dirección que esté aplicado en el punto *O* **más** el momento del vector peso de la porción m_i con respecto al punto *O*.

3. Cálculo del momento respecto a *O*

El momento de **todos** los elementos m_i respecto a *O* está dado por:

$$\vec{\tau}_O = \sum_i \left(\vec{r}_i - \vec{r}_O\right)\times m_i g\left(-\vec{j}\right) = \sum_i \left(m_i\,\vec{r}_i - m_i\,\vec{r}_O\right)\times g\left(-\vec{j}\right) = M\left(\vec{r}_{CM} - \vec{r}_O\right)\times g\left(-\vec{j}\right)$$

Recordemos cómo se calcula la posición del C.M.

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i\,\vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{1}{M}\sum_i m_i\,\vec{r}_i$$

RESUMEN: Podemos considerar que el sistema de fuerzas paralelas iguales es equivalente al vector peso del cuerpo - ecuación **(1)** - aplicado en el punto arbitrario *O* más el momento creado por el peso aplicado *O* respecto al C.M. – ecuación **(2)** -.

$$\vec{W} = \sum_i m_i g\left(-\vec{j}\right) = Mg\left(-\vec{j}\right) \qquad \textbf{(1)}$$

$$\vec{\tau}_O = M\left(\vec{r}_{CM} - \vec{r}_O\right)\times g\left(-\vec{j}\right) \qquad \textbf{(2)}$$

Consecuencia: si hacemos coincidir el punto *O* con el propio C.M., entonces el momento es nulo y el sistema equivalente a todas las fuerzas paralelas es el peso aplicado en el centro de masas.

RESULTANTE DE FUERZAS PARALELAS DE IGUAL MAGNITUD (Cont.)

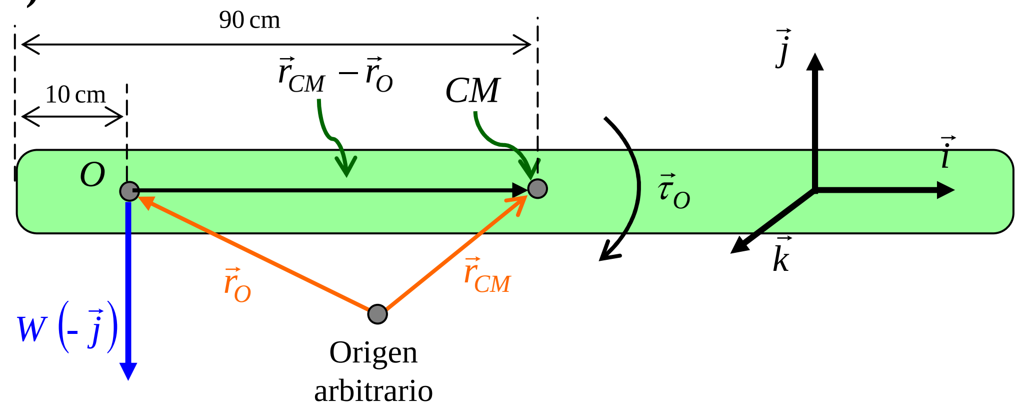
EJEMPLO

Considere una varilla delgada homogénea de 20 kg y longitud 1.80 m en posición horizontal. Encuentre el momento, según la ecuación (2), si suponemos: a) que el peso se aplica a 10 cm del extremo izquierdo. b) que el peso se aplica a 80 cm del extremo derecho.

$$\vec{W} = \sum_i m_i g\left(-\vec{j}\right) = Mg\left(-\vec{j}\right) \quad \textbf{(1)}$$

$$\vec{\tau}_O = M\left(\vec{r}_{CM} - \vec{r}_O\right)\times g\left(-\vec{j}\right) \quad \textbf{(2)}$$

a)



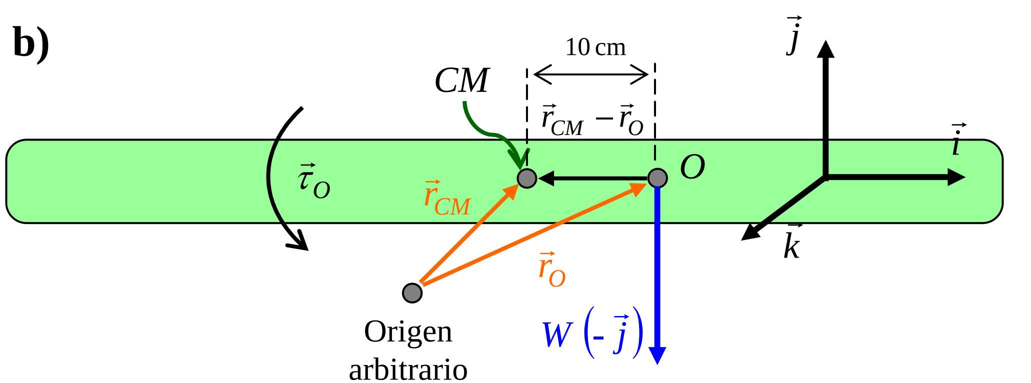
$$\vec{r}_{CM} - \vec{r}_O = 0.80\,\vec{i}\ \text{ m}$$

$$W\left(-\vec{j}\right) = 196\left(-\vec{j}\right)\text{N}$$

$$\vec{\tau}_O = 20\cdot 0.80\,\vec{i}\times 9.8\left(-\vec{j}\right)$$

$$\vec{\tau}_O = 156.8\left(-\vec{k}\right)\ \text{N}\cdot\text{m}$$

b)



$$\vec{r}_{CM} - \vec{r}_O = 0.10\left(-\vec{i}\right)\ \text{m}$$

$$W\left(-\vec{j}\right) = 196\left(-\vec{j}\right)\text{N}$$

$$\vec{\tau}_O = 20\cdot 0.10\left(-\vec{i}\right)\times 9.8\left(-\vec{j}\right)$$

$$\vec{\tau}_O = 19.6\,\vec{k}\ \ \text{N}\cdot\text{m}$$