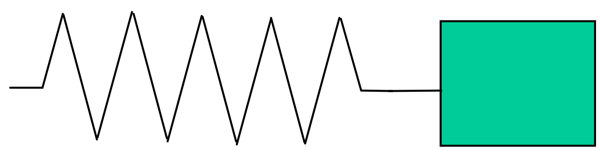
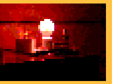
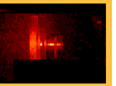
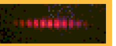
OSCILADOR ARMÓNICO SIMPLE







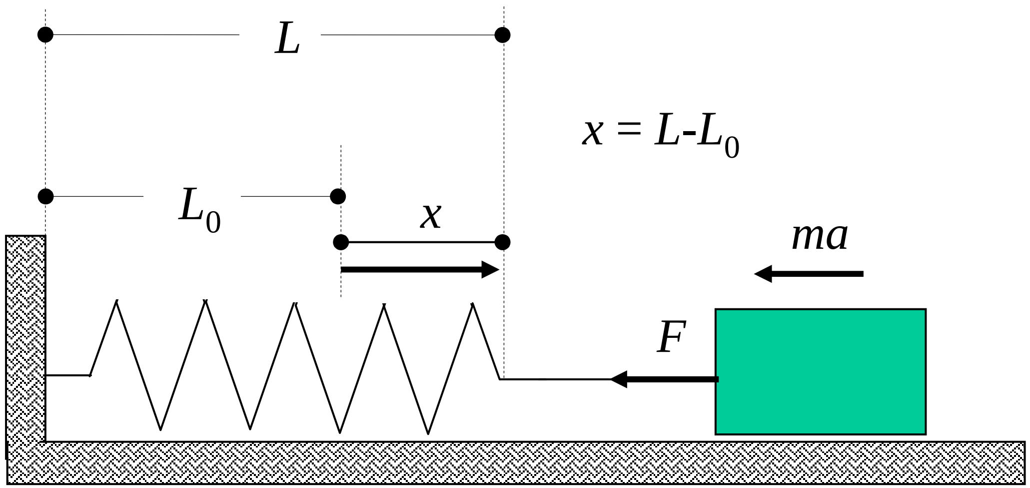


Ley de Hooke

$$\boxed{F = -kx}$$

2ª ley de Newton:

$$F = ma$$



$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

Ecuación diferencial de 2º orden: solución de la forma $x(t) = A\cos(\omega t + \delta)$

Caracterización del M.A.S.

Solución de la ecuación:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \boxed{\frac{k}{m}}\,x = 0 \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + \boxed{\omega^2}\,x = 0$$

Fase

$$x(t) = A\cos\boxed{(\omega t + \delta)}$$

Constantes A, δ

- Amplitud
- Fase inicial

Frecuencia angular $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ (rad/s)

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad f = \frac{1}{T}$$

Periodo (s) Frecuencia (Hz)

Comprobación de la forma armónica de la solución

Por derivación de $x(t) = A\cos(\omega t + \delta)$ y sustitución en $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{k}{m}x = 0$

Derivada primera: $\dfrac{dx}{dt} = -A\omega\,\mathrm{sen}(\omega t + \delta)$

Derivada segunda: $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\cos(\omega t + \delta) = -\omega^2 x$

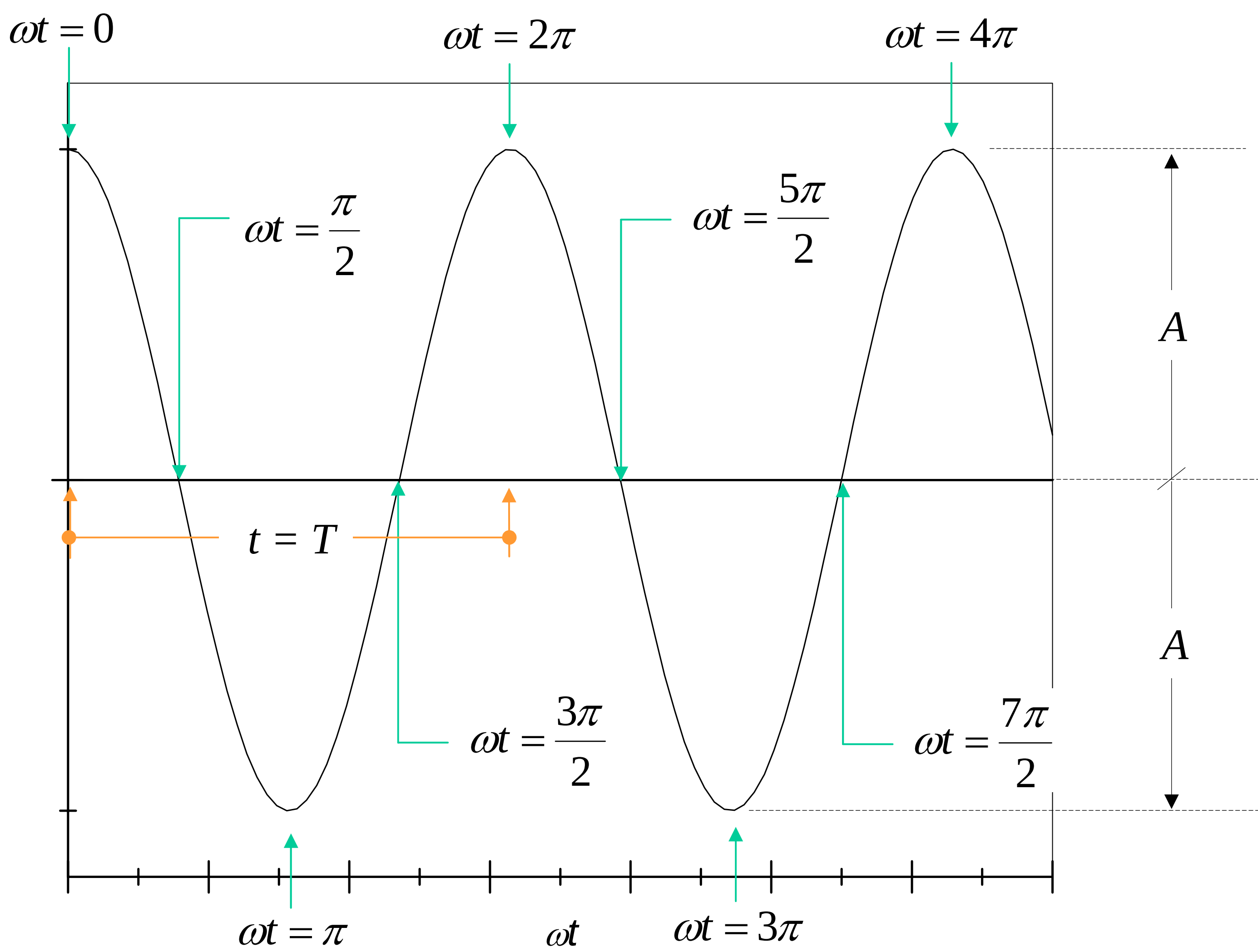
$$-\omega^2 x + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\left(-\omega^2 + \frac{k}{m}\right)x = 0$$

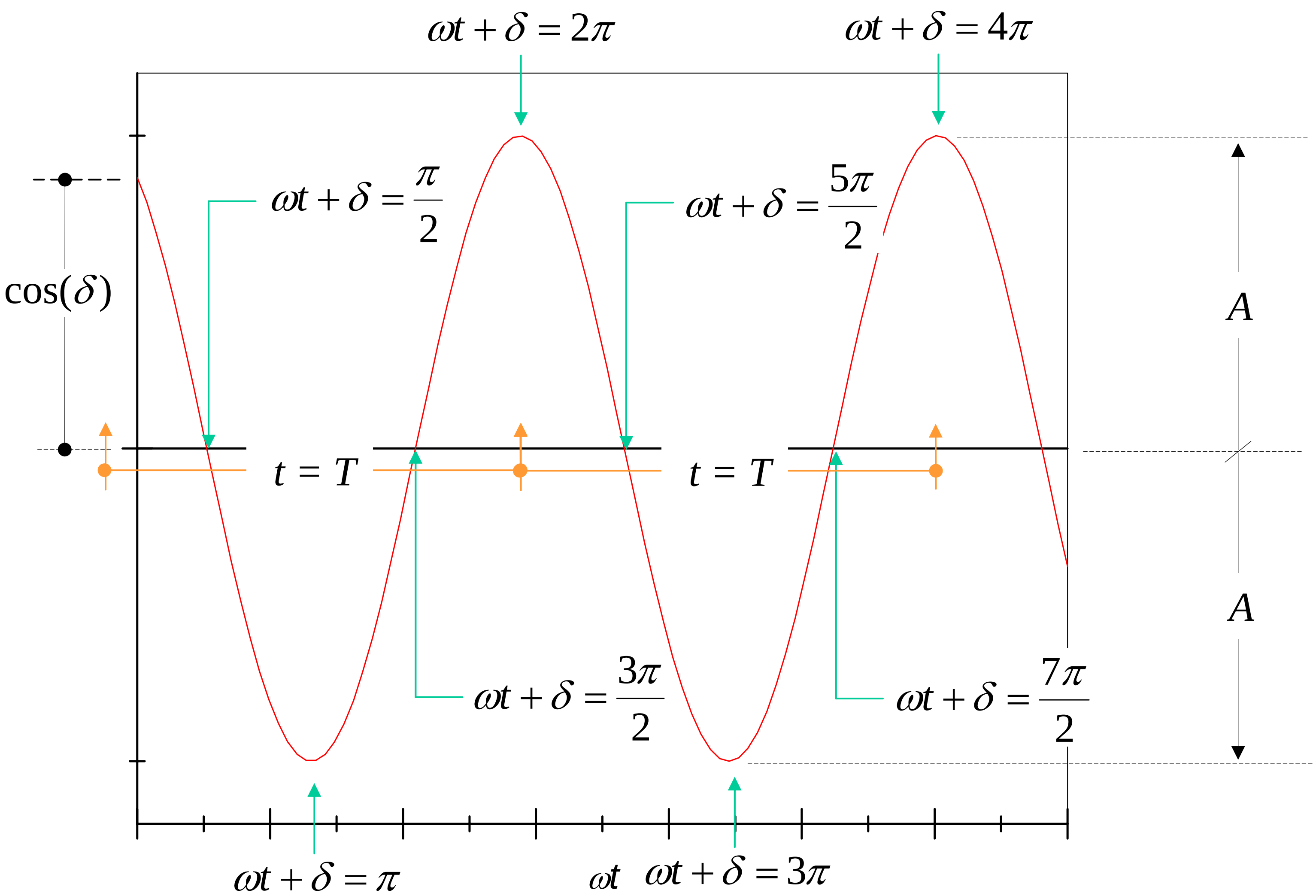
$$\left(-\omega^2 + \frac{k}{m}\right) = 0$$

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega t + \delta)\ \text{ es solución de }\ \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0\ \text{ si }\ \omega^2 = \frac{k}{m}}$$

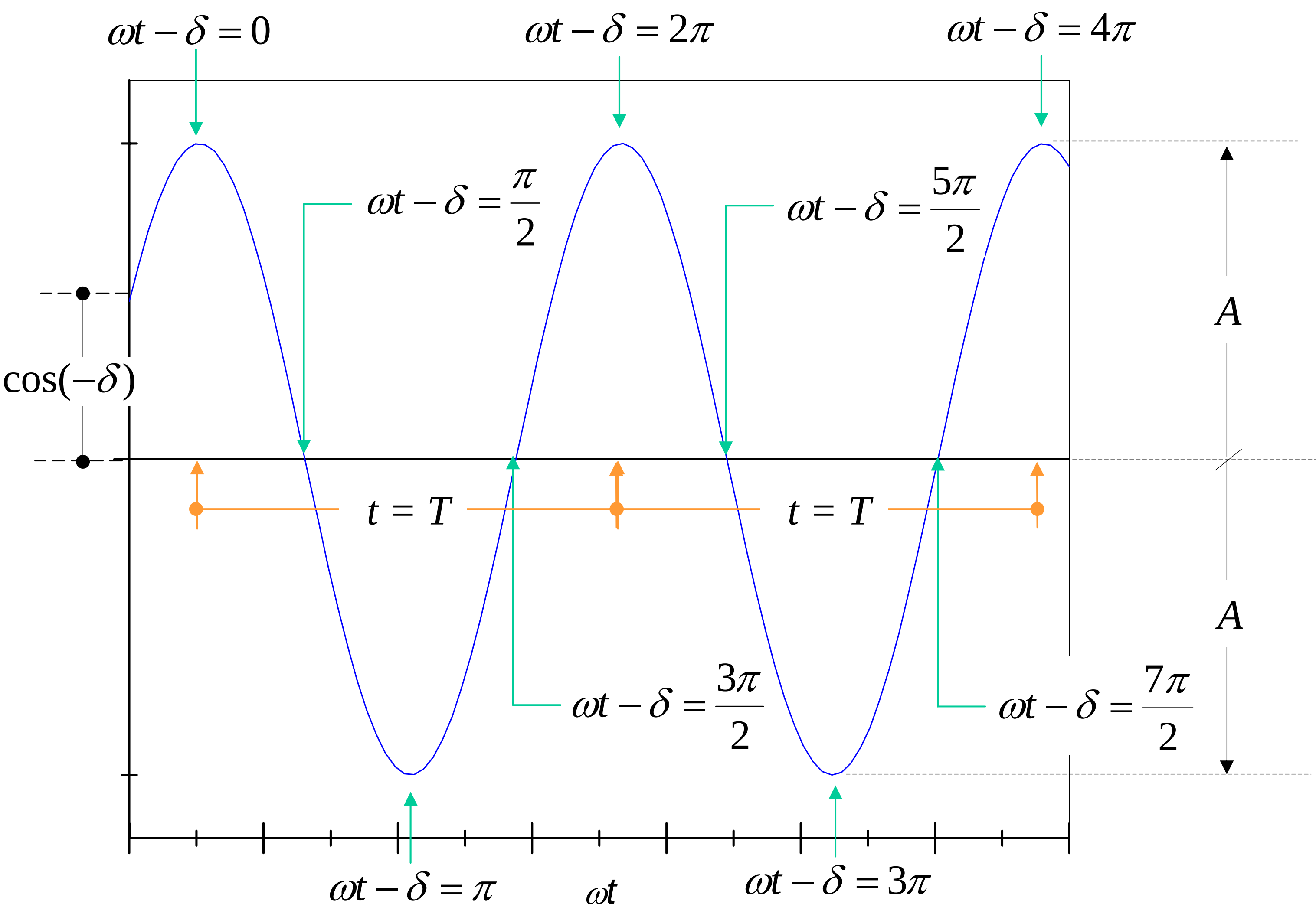
$$y = A\cos(\omega t)$$



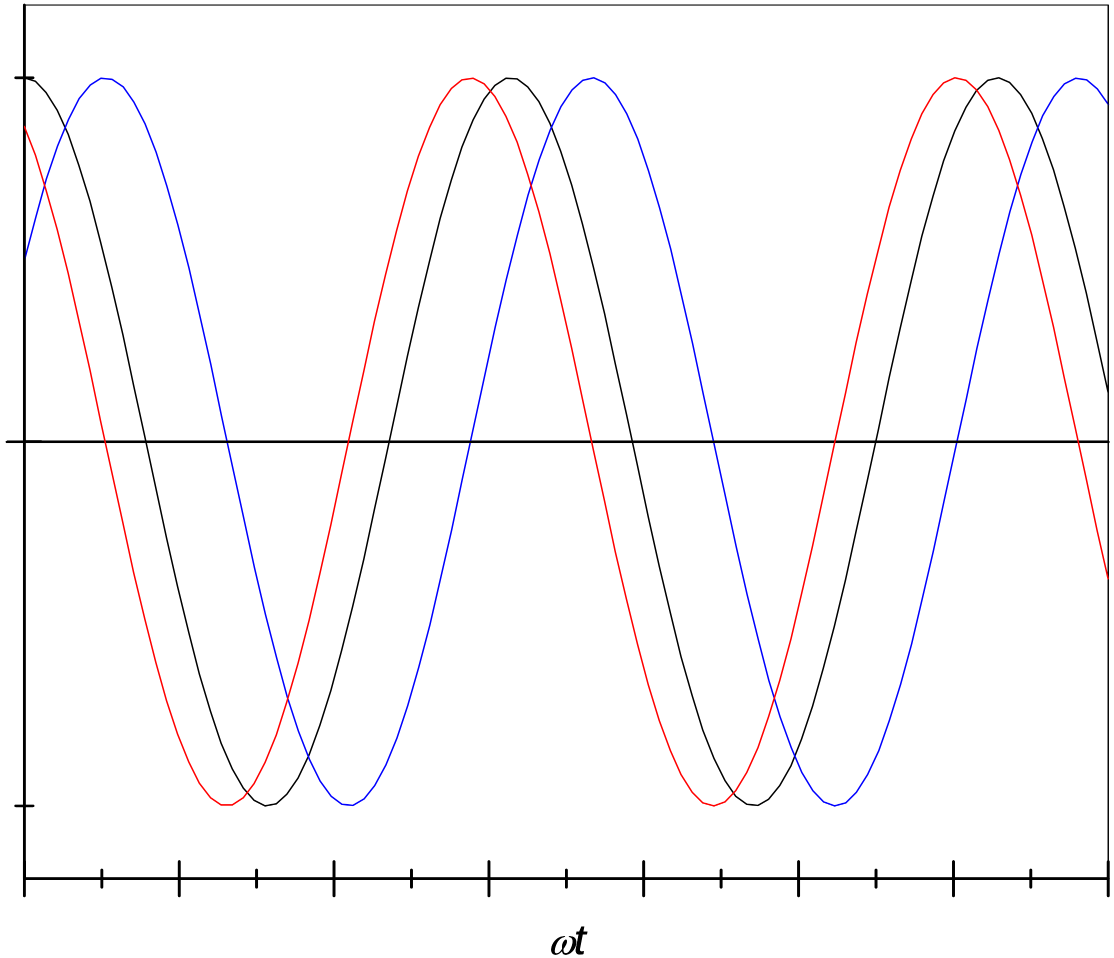
$y = A\cos(\omega t + \delta) \quad \delta > 0$



$$y = A\cos(\omega t - \delta) \qquad \delta > 0$$



Resumen



$y = \cos(\omega t)$

$y = \cos(\omega t + \delta)$

Adelanta

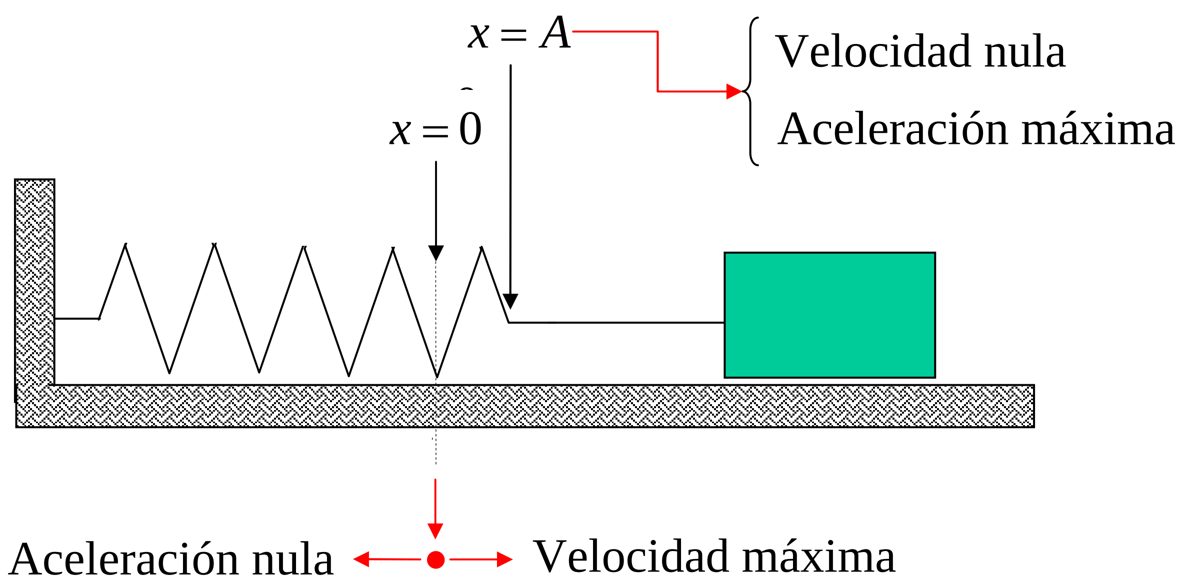
$y = \cos(\omega t - \delta)$

Atrasa

AJB

Velocidad y aceleración en el M.A.S.

$$x(t) = A\cos(\omega t + \delta) \begin{cases} \text{Velocidad} \quad \dot{x} = \dfrac{dx(t)}{dt} = -A\omega\,\mathrm{sen}(\omega t + \delta) \\ \text{Aceleración} \quad \ddot{x} = \dfrac{d^2x(t)}{dt^2} = -A\omega^2\cos(\omega t + \delta) = -\omega^2 \cdot x(t) \end{cases}$$



Lecciones de Física

Física Aplicada UCLM

Ejemplo. Resorte en posición horizontal.

Un resorte ideal de constante elástica 20 N/m sujeta un bloque de masa 312.5 g sobre una superficie horizontal sin rozamiento. El resorte se estira 8 cm, se suelta y la masa oscila libremente alrededor de la posición de equilibrio. Se pide:

a) Ecuación del movimiento armónico simple resultante y periodo de las oscilaciones.

b) Aceleración del bloque cuando se encuentra en un extremo, y velocidad cuando pasa por la posición de equilibrio.

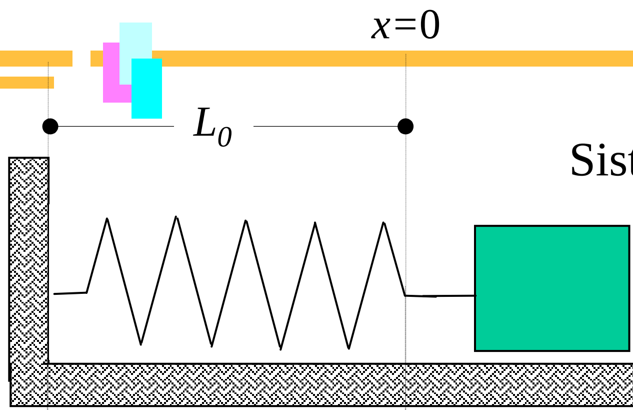
c) Velocidad y aceleración del bloque cuando ha transcurrido 1 s.

$$x(t) = A\cdot\cos(\omega t+\delta) \quad \begin{cases} A = 0.08\ \text{m} \\ \omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \sqrt{\dfrac{20}{0.3125}} = 8\ \text{rad/s} \longrightarrow T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{8} = \dfrac{\pi}{4}\ \text{s} = 0.785\ \text{s} \end{cases}$$

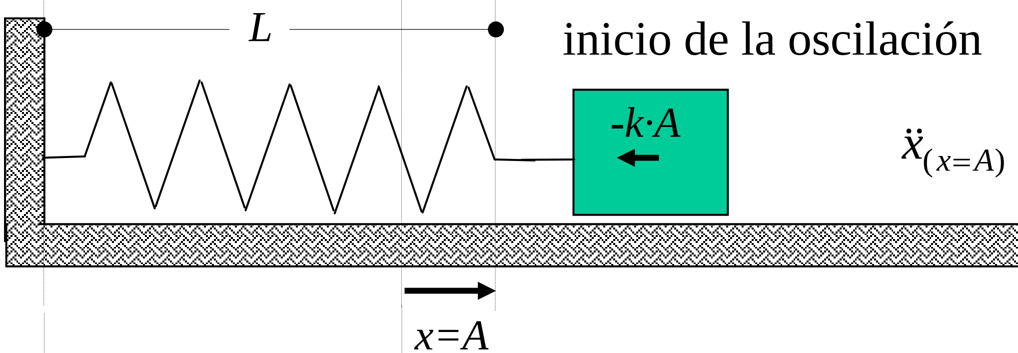
$$x(t) = A\cdot\cos(\omega t+\delta)$$

$$x(0) = A\cdot\cos(0+\delta) = A \longrightarrow \cos\delta = 1 \longrightarrow \cos\delta = \pm 2n\pi \quad (n = 0,1,2\ldots)$$

$$x(t) = A\cdot\cos\omega t = 0.08\cdot\cos 8t \ \text{(unidades S.I.)}$$



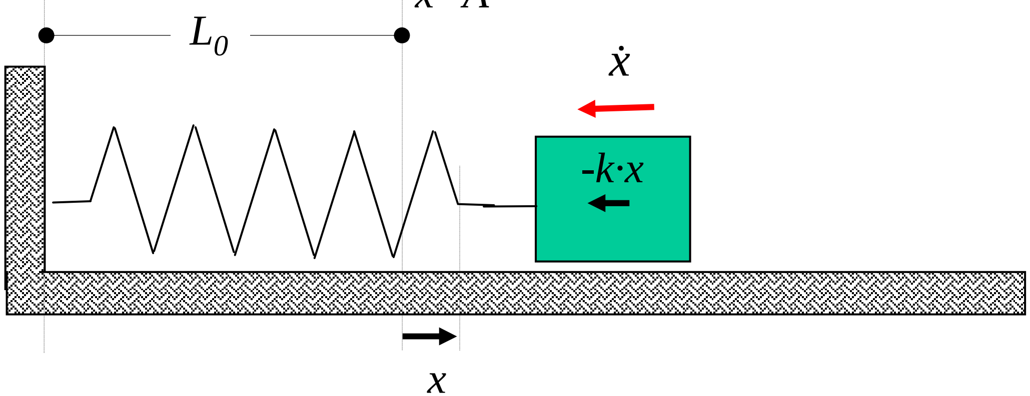
Sistema en reposo



Resorte extendido:
inicio de la oscilación

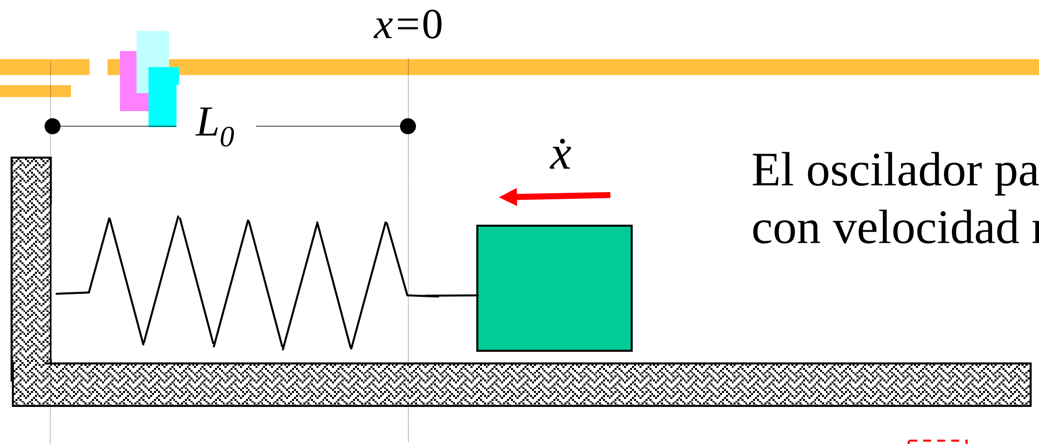
$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 \cdot x$$

$$\ddot{x}_{(x=A)} = -\omega^2 \cdot A = -8^2 \cdot 0.08 = -5.12\ \mathrm{m/s^2}$$



Punto intermedio: el oscilador
se dirige hacia el origen

$$\frac{T}{4} > t > 0$$



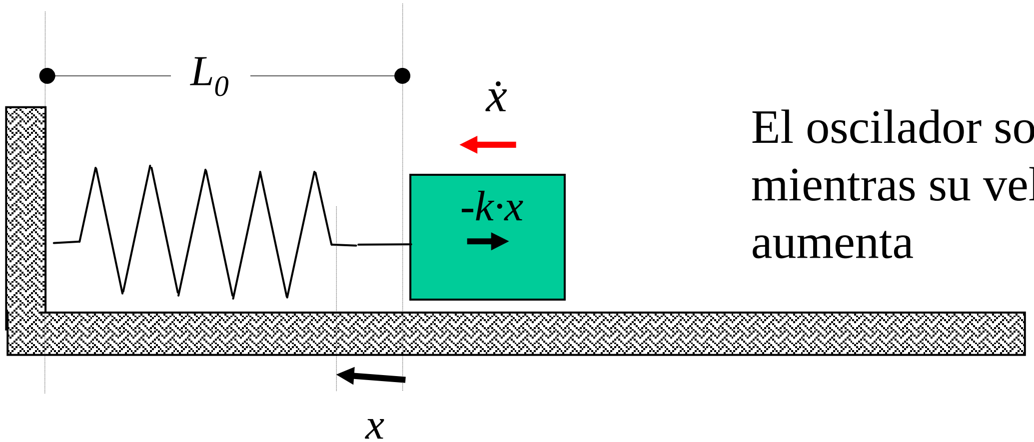
El oscilador pasa por la posición de equilibrio con velocidad máxima y aceleración nula

$$t = \frac{T}{4}$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = -A\omega \cdot \operatorname{sen} \omega t \longrightarrow \dot{x}_{(x=0)} = -A\omega \cdot \operatorname{sen}\left(\boxed{\frac{2\pi}{T}} \frac{T}{4}\right)$$

Cuando pasa por *x=0* ha transcurrido un cuarto de periodo

$$= -A\omega \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -0.08 \cdot 8 = -0.64 \text{ m/s}$$



El oscilador sobrepasa la posición de equilibrio mientras su velocidad decrece y su aceleración aumenta

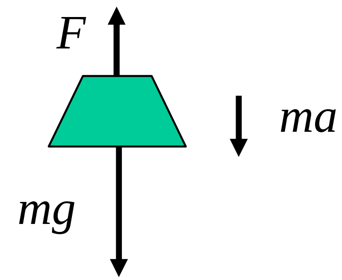
¿Qué ocurre después, hasta que $t = T$? ¿Cómo es la velocidad y la aceleración?

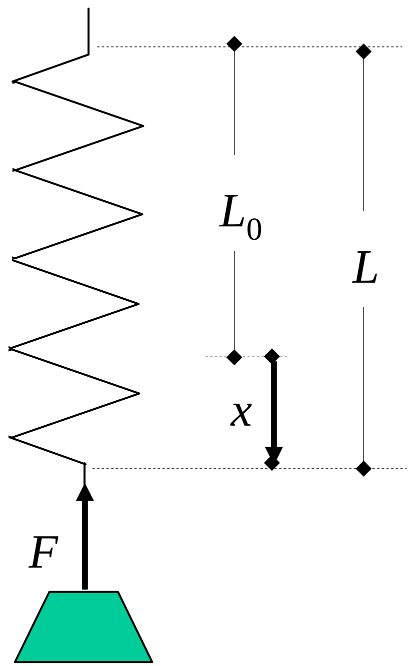
¿Cuál es la velocidad y aceleración del bloque cuando ha transcurrido 1 s?

Ejemplo 2. Resorte con una carga en posición vertical

Ley de Hooke $F = -kx$

D.S.L.





$x = L\text{-}L_0$

2ª ley de Newton:

$$m\vec{g} + \vec{F} = m\vec{a}$$

$$mg - kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = g}$$

Ecuación del oscilador armónico (resorte vertical)

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=g$$

Forma de la solución: $x(t)=\frac{mg}{k}+A\cos(\omega t+\delta)$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=g$$

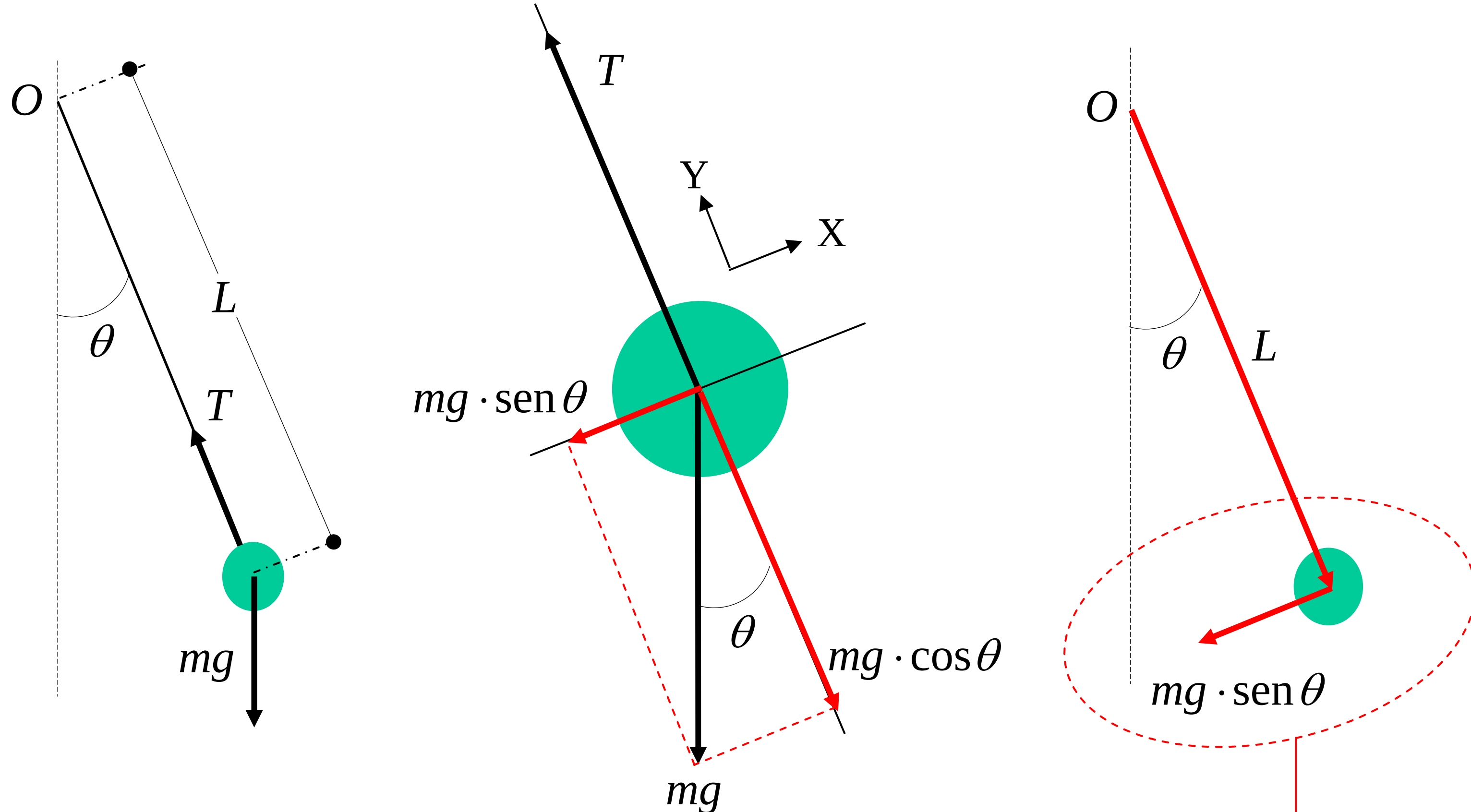
Derivadas: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=-A\omega\,\mathrm{sen}(\omega t+\delta) \\ \dfrac{d^2x}{dt^2}=-A\omega^2\cos(\omega t+\delta) \end{cases}$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2}} \qquad \boxed{\frac{k}{m}x}$$

$$\overbrace{-A\omega^2\cos(\omega t+\delta)}^{\frac{d^2x}{dt^2}}+\overbrace{\frac{k}{m}\left[\frac{mg}{k}+A\cos(\omega t+\delta)\right]}^{\frac{k}{m}x}=A\left[-\omega^2+\frac{k}{m}\right]\cos(\omega t+\delta)+g=g$$

Si $\omega^2=\frac{k}{m}$ se verifica la igualdad

Péndulo simple



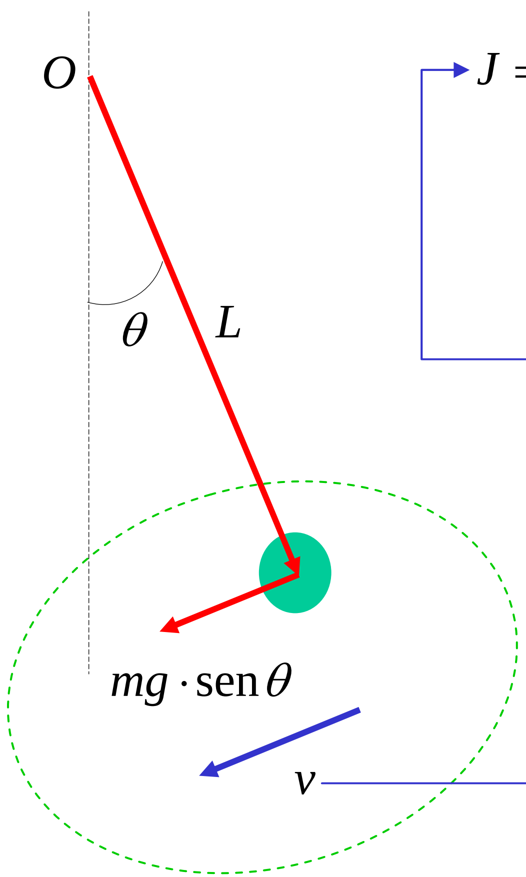
El momento M_O tiende a restaurar la posición de equilibrio → $M_O = -L \cdot mg \cdot \text{sen}\,\theta$

Momento de la componente X del peso respecto de *O*:

$$M_O = -L \cdot mg \cdot \operatorname{sen}\theta$$

Ecuación fundamental de la dinámica de rotación:

$$M_O = \frac{dJ}{dt}$$



$$v = L \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

$$J = L \cdot mv = mL^2 \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{dJ}{dt} = mL^2 \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$-L \cdot mg \cdot \operatorname{sen}\theta = mL^2 \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\operatorname{sen}\theta = 0}$$

Compárese $\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{L}\,\mathrm{sen}\,\theta=0$ con $\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0$

Péndulo simple   Resorte

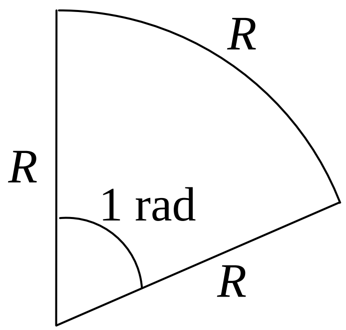
Para ángulos *pequeños* sen $\theta \to \theta$

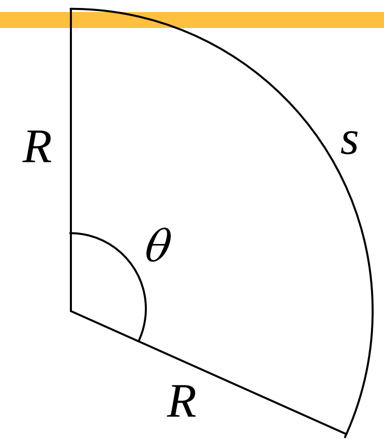
Entonces $\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{L}\,\mathrm{sen}\,\theta=0$ puede sustituirse por $\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{L}\theta=0$

Forma de la solución: $\theta(t)=A\cos(\omega t+\delta) \longrightarrow \omega=\sqrt{\frac{g}{L}}$

Periodo: $T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

¿Qué son ángulos *pequeños*?





Longitud del arco

$$\boxed{s = \theta \cdot R}$$

Radio

Ángulo (radianes)

θ(º)	θ(rad)	sin θ	dif %
0	0.0000	0.0000	0.0
2	0.0349	0.0349	0.0
5	0.0873	0.0872	0.1
8	0.1396	0.1392	0.3
10	0.1745	0.1736	0.5
12	0.2094	0.2079	0.7
15	0.2618	0.2588	1.1
18	0.3142	0.3090	1.6
20	0.3491	0.3420	2.0
22	0.3840	0.3746	2.4
25	0.4363	0.4226	3.1
28	0.4887	0.4695	3.9
30	0.5236	0.5000	4.5
32	0.5585	0.5299	5.1
35	0.6109	0.5736	6.1

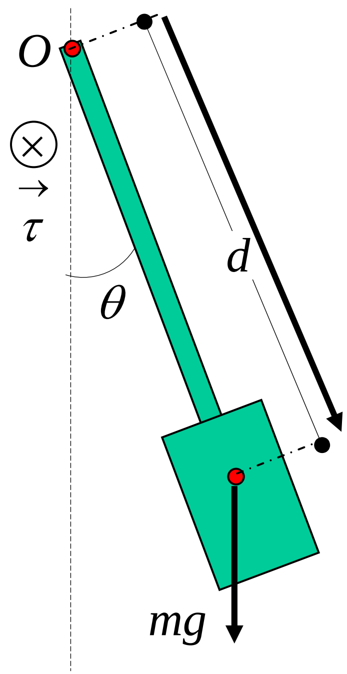
<1%

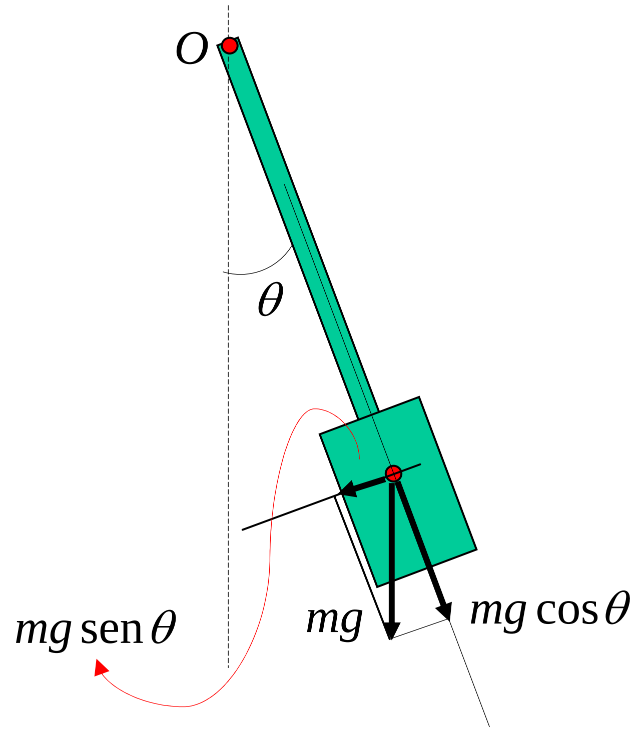
≈2%

<5%

ángulos *pequeños* <15º

Péndulo Físico





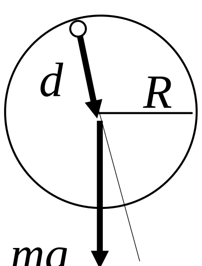
$$\left.\begin{aligned} \vec{\tau} &= \vec{d}\times m\,\vec{g} \\ \vec{\tau} &= I\,\vec{\alpha} \end{aligned}\right\} \longrightarrow I\alpha = -mgd\,\mathrm{sen}\,\theta \longrightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgd}{I}\,\mathrm{sen}\,\theta = 0$$

recuperador

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{mgd}{I}\operatorname{sen}\theta=0 \longrightarrow \text{Ángulos pequeños} \longrightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2}+\underbrace{\boxed{\frac{mgd}{I}}}_{\omega^2}\theta=0$$

$$\text{Ecuación de un M.A.S.} \longrightarrow \omega=\sqrt{\frac{mgd}{I}} \longrightarrow T=2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}$$

Ejemplo. Un disco homogéneo de radio R = 20 cm se cuelga de un clavo por un punto muy próximo a su periferia y se deja oscilar con pequeña amplitud. ¿Cuál es el periodo de las oscilaciones, despreciando el rozamiento?



$$I=\frac{1}{2}mR^2+md^2=\frac{1}{2}mR^2+mR^2=\frac{3}{2}mR^2$$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}=2\pi\sqrt{\frac{\frac{3}{2}mR^2}{mgR}}=2\pi\sqrt{\frac{3}{2}\frac{R}{g}}=2\pi\sqrt{\frac{3}{2}\cdot\frac{0.20}{9.80}}=1.1\,\mathrm{s}$$

CARACTERÍSTICAS COMUNES MOVIMIENTOS ARMÓNICOS

1º Existe una fuerza recuperadora (o momento recuperador) proporcional a la elongación.

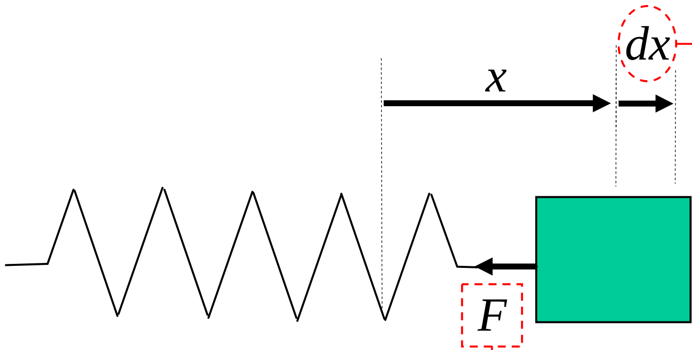
2º El sistema sobrepasa su posición de equilibrio y a partir de ese momento la fuerza recuperadora tiende a devolverlo a dicha posición de equilibrio.

3º Cuando existen fuerzas de fricción *pequeñas* el movimiento se atenúa lentamente (movimiento subamortiguado).

4º Cuando las fuerzas de fricción son lo suficientemente grandes, el movimiento puede producirse sin oscilaciones.

5º Es posible influir sobre el movimiento, variando sus características, mediante fuerzas externas (movimiento forzado).

Energía en el movimiento armónico



$$F = -kx$$

$$dW = F \cdot dx = -kx \cdot dx$$

$$W = \int_{o}^{x} F \cdot dx = -\int_{0}^{x} kx \cdot dx = -\frac{1}{2} kx^2$$

Energía potencial: $\Delta U = -W \longrightarrow \Delta U = \frac{1}{2} kx^2$

ENERGÍA CINÉTICA

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 sen^2(\omega t + \delta)$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

ENERGÍA POTENCIAL

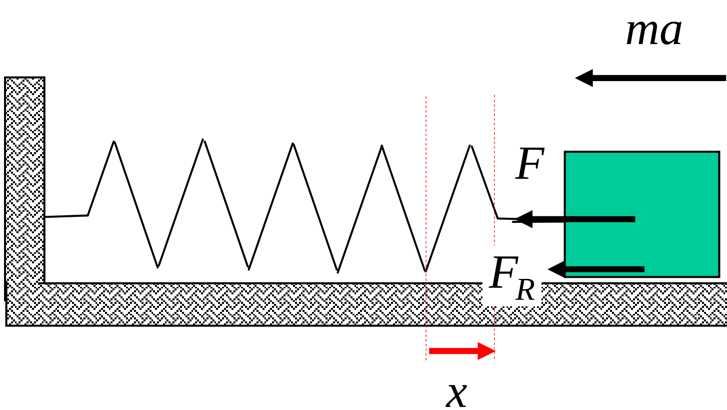
$$\Delta U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \delta) = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \cos^2(\omega t + \delta)$$

ENERGÍA MECÁNICA

$$E_C + \Delta U = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \left\{ sen^2(\omega t + \delta) + \cos^2(\omega t + \delta) \right\} = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

Movimiento armónico amortiguado

$$\vec{F}+\vec{F}_R=m\,\vec{a}\quad\left\{\begin{array}{l} F=-kx \\ F_R=-bv=-b\dot{x}\end{array}\right.$$



$$v=\dot{x}=\frac{dx}{dt}$$

$$-kx-b\dot{x}=m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{b}{m}\dot{x}+\frac{k}{m}x=0$$

$$\left\{\begin{array}{l} \gamma=\dfrac{b}{m} \\ \omega_0^2=\dfrac{k}{m}\end{array}\right\}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\gamma\dot{x}+\omega_0^2x=0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Solución de la forma:

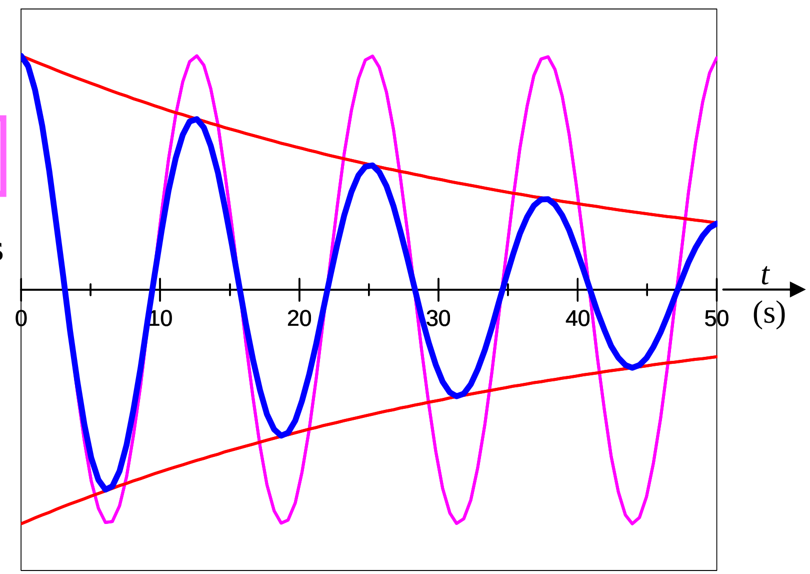
$$\boxed{x = A\exp\left[-\frac{\gamma t}{2}\right]\cos(\omega t + \delta)}$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4} = \frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}$$

$\boxed{y = \cos\omega_0 t}$

$\omega_0 = 0.5\ \text{rad/s}$

$\delta = 0$



$\boxed{y = \pm\exp(-\gamma t/2)}$ $\boxed{y = \exp(-\gamma t/2)\cdot\cos\omega t}$

$\gamma = 0.05\ \text{s}^{-1}$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$$

$$Q = \frac{0.5}{0.05} = 10$$

Factor de calidad $Q = \dfrac{\omega_0}{\gamma}$

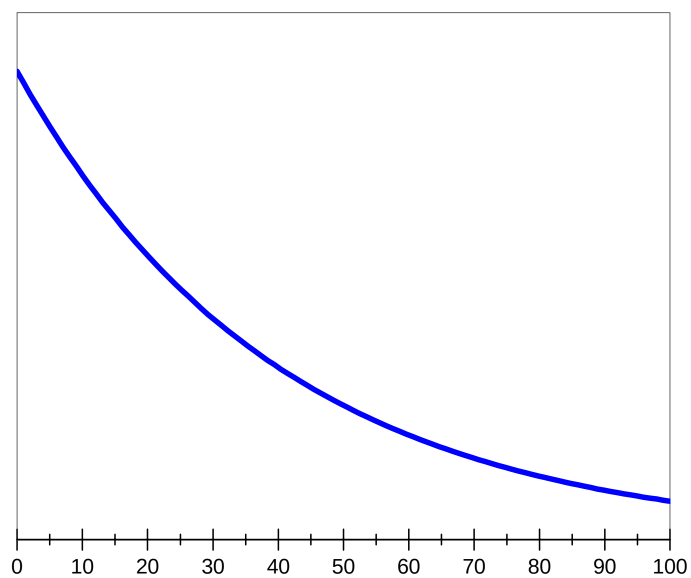
Cuando crece Q la energía del oscilador se disipa más lentamente

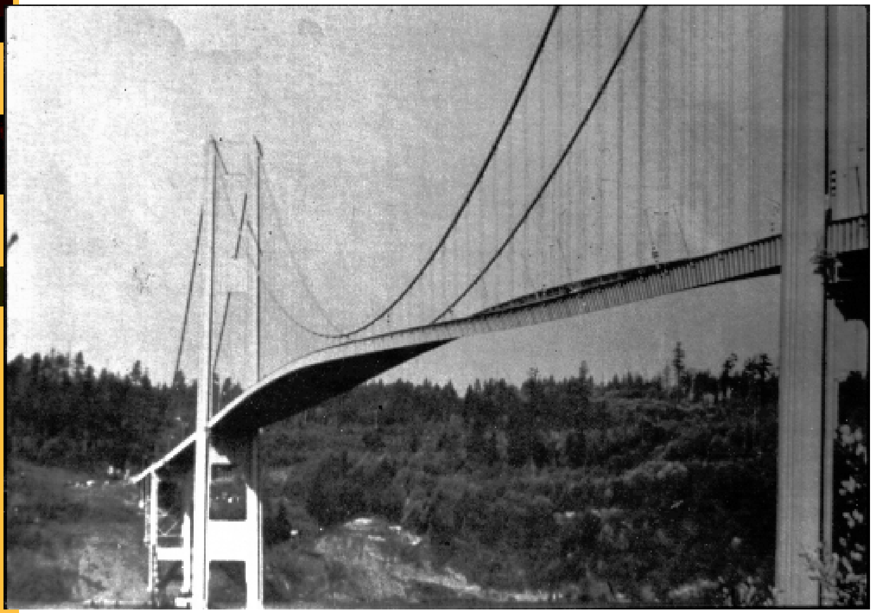
Amortiguamiento crítico

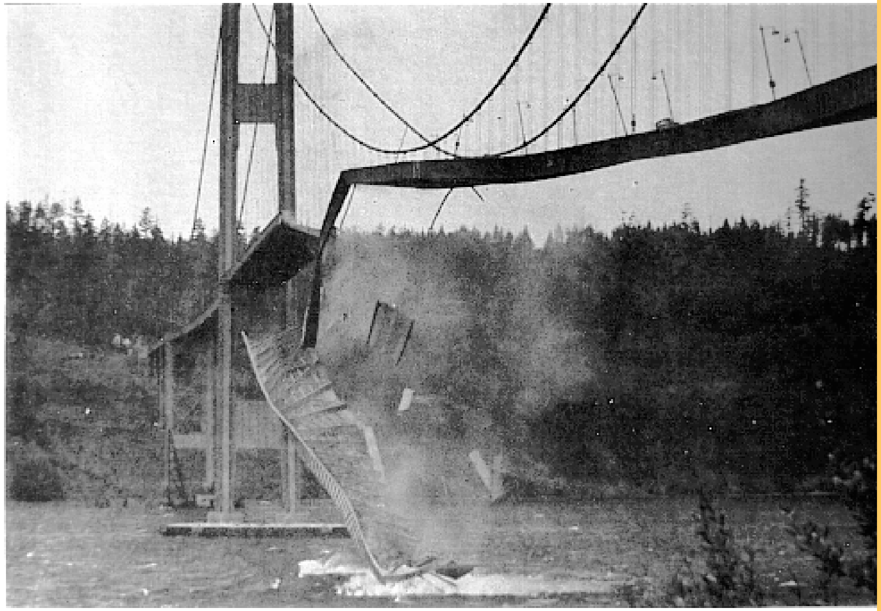
$$x = A\exp\left[-\frac{\gamma t}{2}\right]\cos(\omega t+\delta) \qquad \omega^2=\omega_0^2-\frac{\gamma^2}{4}=\frac{k}{m}-\frac{b^2}{4m^2}$$

Cuando $\omega_0^2=\dfrac{\gamma^2}{4}$ $\longrightarrow$ No hay movimiento oscilatorio

$\gamma = 0.05\,\mathrm{s}^{-1}$







http://www.physics.rutgers.edu/ugrad/193/lectures/Examples1124.ppt