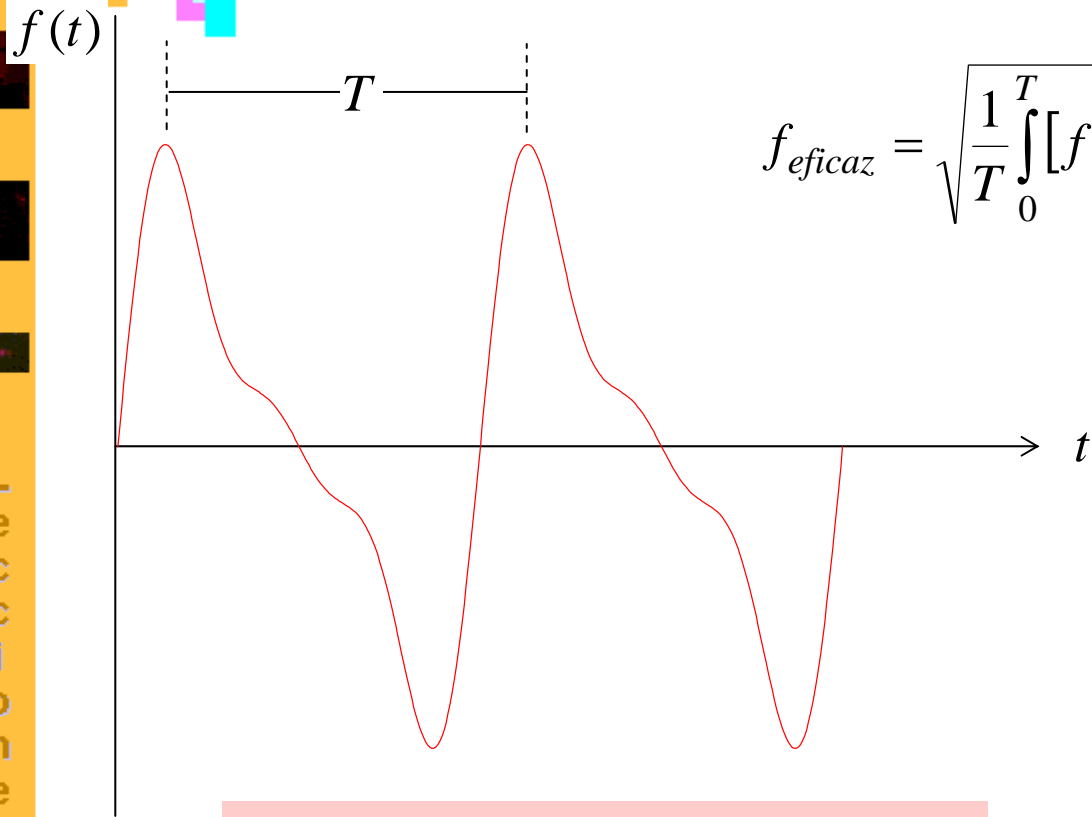


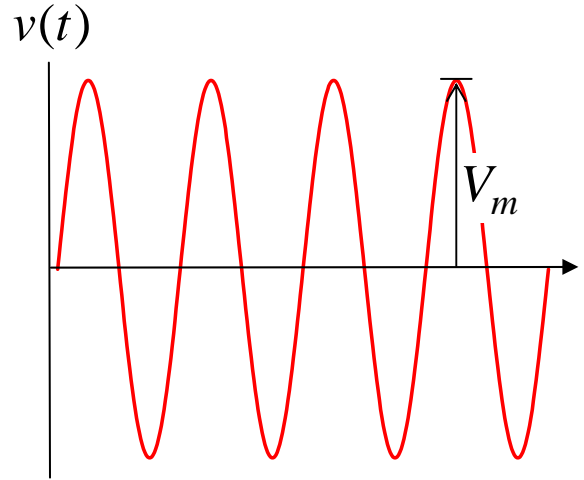
CORRIENTE ALTERNA

Antonio J. Barbero
Departamento de Física Aplicada
Universidad de Castilla-La Mancha

VALOR EFICAZ DE UNA FUNCIÓN PERIÓDICA



$$f_{eficaz} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [f(t)]^2 dt}$$



VALOR EFICAZ FUNCIÓN SENOIDAL

$$V_{eficaz} = V = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$$

← $v(t) = V_m \cos(\omega t \pm \varphi)$

También denominado valor RMS

FASORES

Una función sinusoidal del tiempo de una frecuencia determinada se caracteriza únicamente con dos parámetros, su amplitud y su ángulo de fase.

La representación compleja de dicha función (de una frecuencia determinada) se caracteriza también con esos dos mismos parámetros.

Fórmula de Euler

$$e^{\pm j\alpha} = \cos \alpha \pm j \cdot \text{sen } \alpha$$

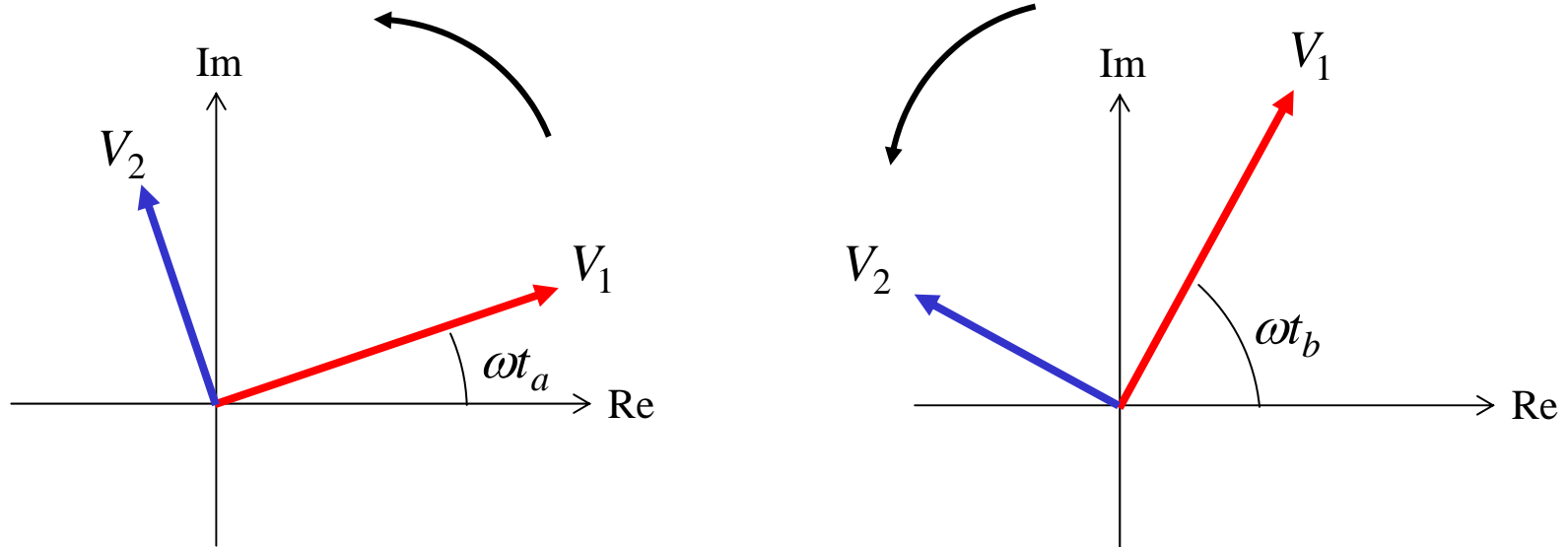
La función $V_m \cdot \cos(\omega t + \varphi)$ se puede representar como $\text{Re}\{V_m \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}\}$

El fasor es una representación compleja abreviada en la que, una vez establecida la frecuencia, se omite ésta representando la función sinusoidal por el **VALOR EFICAZ** de la misma y su **ÁNGULO DE FASE**:



FASORES (II)

Los fasores pueden interpretarse como vectores rotatorios que giran con frecuencia angular ω en sentido contrario a las agujas del reloj.



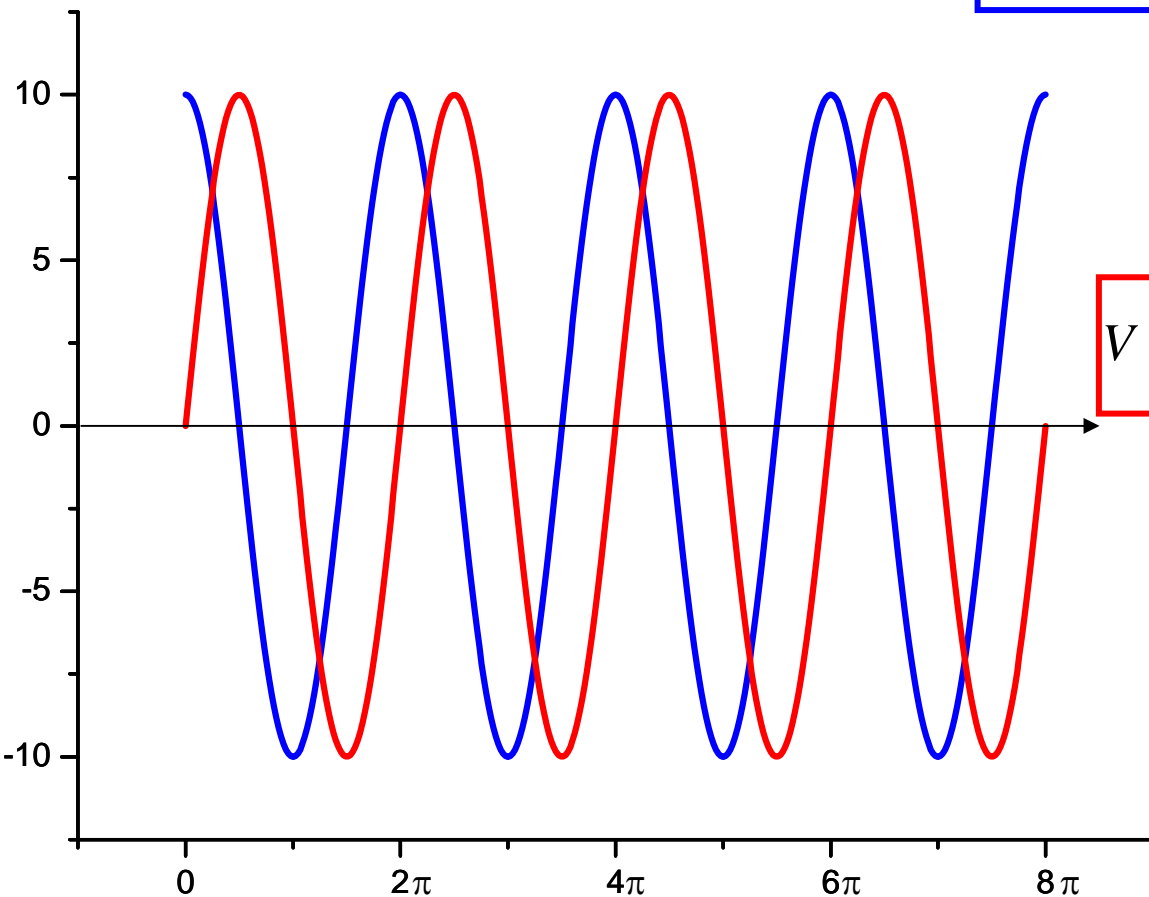
La relación de fases entre ellos permanece invariable

FASORES (EJEMPLO)

$$V_m \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

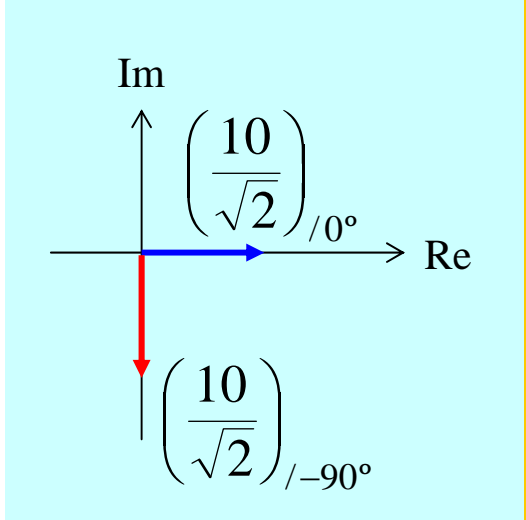
$$V_m = 10 \quad \varphi = 0$$

$$V \cdot e^{j\varphi} = \frac{10}{\sqrt{2}} \cdot e^{j0} = \left(\frac{10}{\sqrt{2}} \right)_{/0^\circ}$$



$$V_m = 10 \quad \varphi = -\pi/2$$

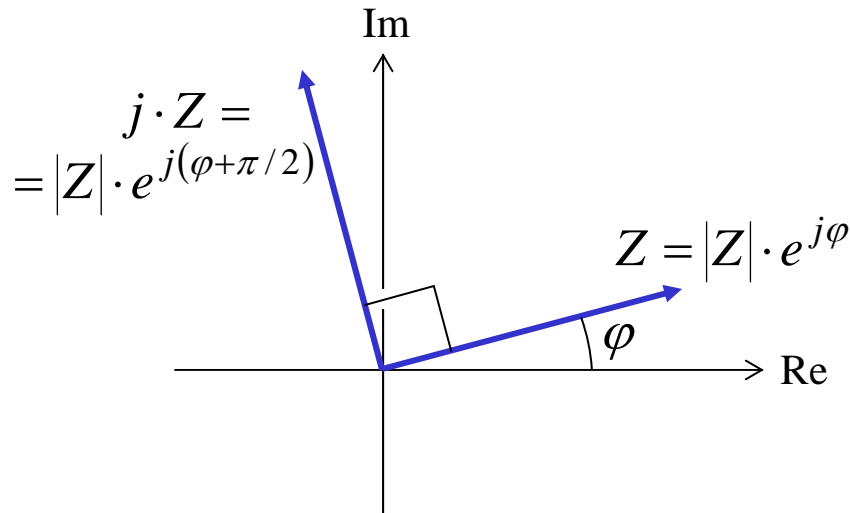
$$V \cdot e^{j\varphi} = \frac{10}{\sqrt{2}} \cdot e^{-j\pi/2} = -\frac{10}{\sqrt{2}} j$$



Fasores representados en $t = 0$

OPERACIONES CON FASORES

SON VÁLIDAS LAS MISMAS OPERACIONES DEFINIDAS EN EL
ÁLGEBRA DE NÚMEROS COMPLEJOS

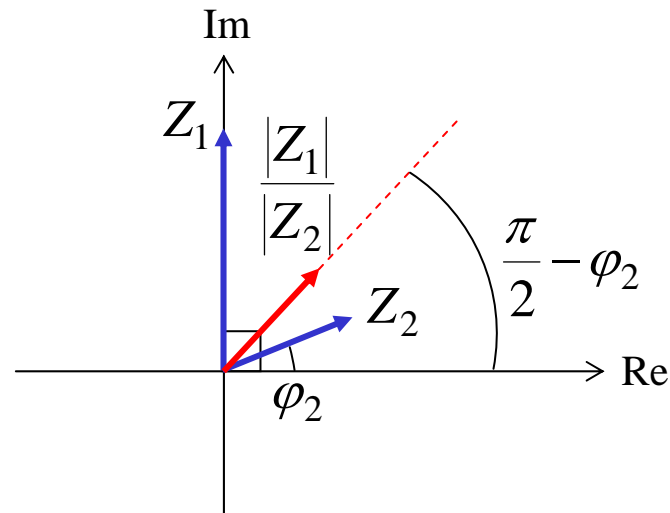


Multiplicar Z por j equivale a ADELANTAR $\pi/2$ su fase

Dividir Z entre j equivale a RETRASAR $\pi/2$ su fase

Multiplicación: multiplicar módulos, sumar fases

División: dividir módulos, restar fases

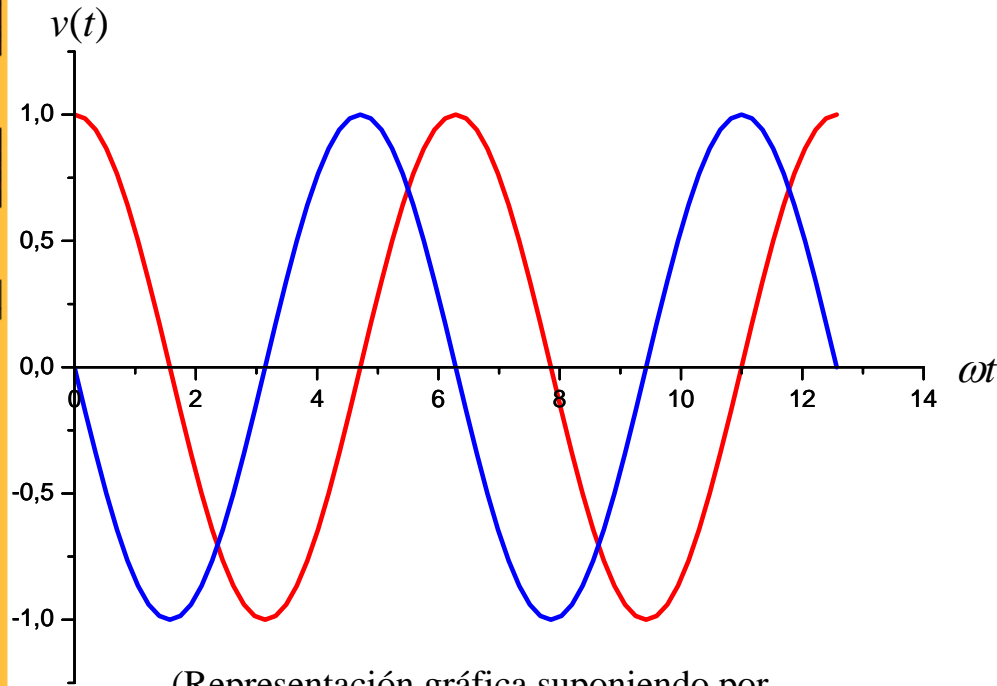


OPERACIONES CON FASORES

Derivación de funciones sinusoidales

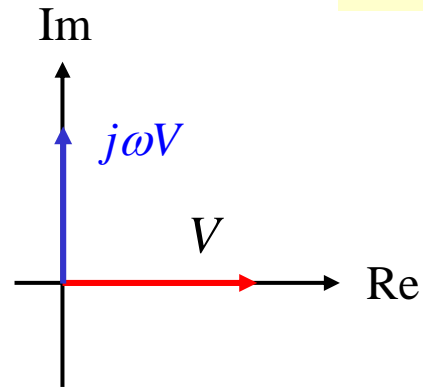
$$v(t) = \cos \omega t$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = -\omega \text{sen } \omega t = \omega \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$



(Representación gráfica suponiendo por simplicidad $\omega=1$. Unidades arbitrarias)

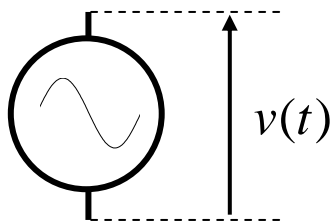
Derivar $v(t)$ equivale a **MULTIPLICAR** por ω el fasor V y **ADELANTAR** $\pi/2$ su fase



FUENTES DE VOLTAJE SINUSOIDALES



$$v(t) = V_m \cos(\omega t \pm \varphi)$$



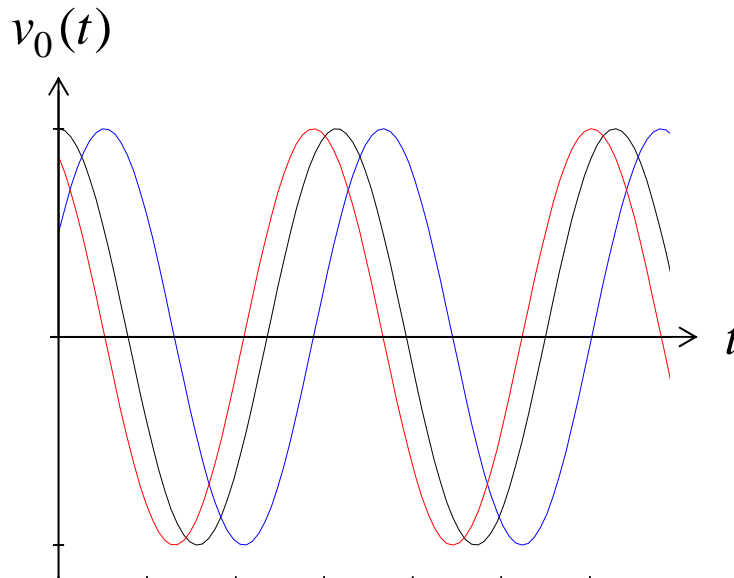
ADELANTA

$$\varphi > 0$$

$$\varphi = 0$$

$$\varphi < 0$$

ATRASA



Representación compleja
(función del tiempo)

$$v(t) = \text{Re} \left\{ V_m \cdot e^{j(\omega t \pm \varphi)} \right\}$$

Representación fasorial
(función de frecuencia dada)

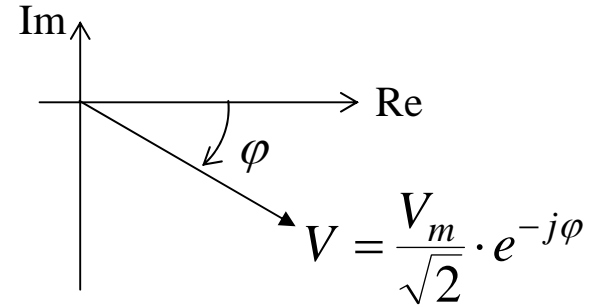
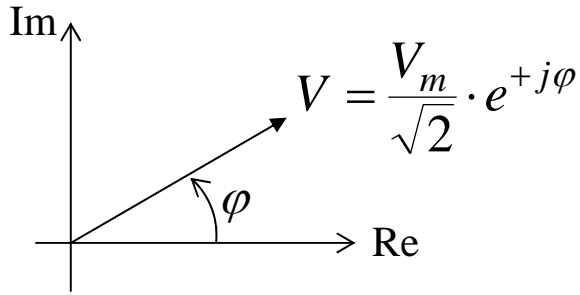
$$V_{/\pm\varphi} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \cdot e^{\pm j\varphi}$$

$$V_{/\pm\varphi} = \left(\frac{V_m}{\sqrt{2}} \right)_{/\pm\varphi}$$

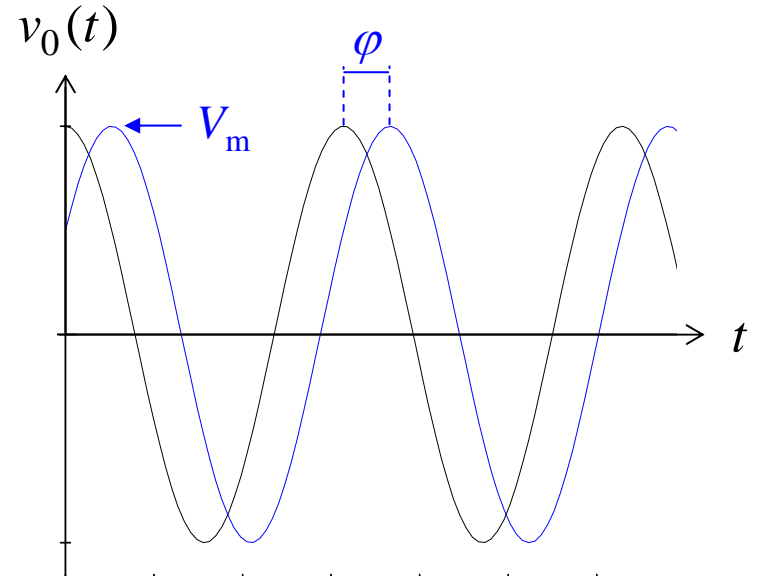
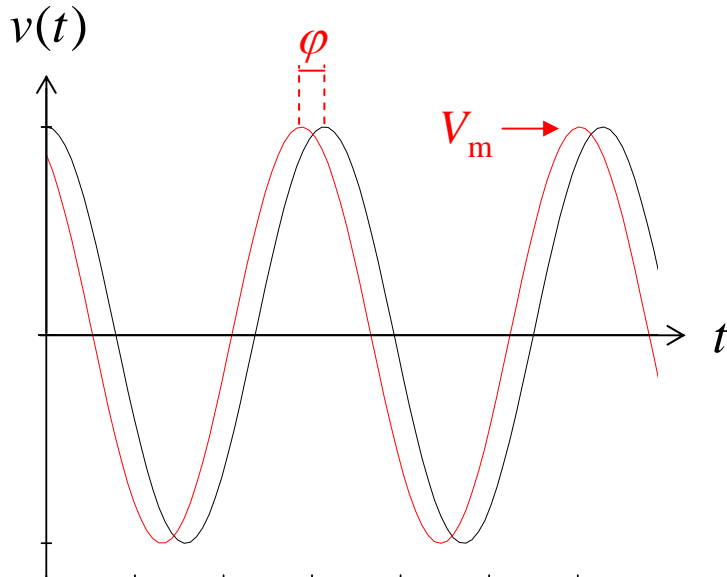
FUENTES DE VOLTAJE SINUSOIDALES (II)

Si la frecuencia es conocida...

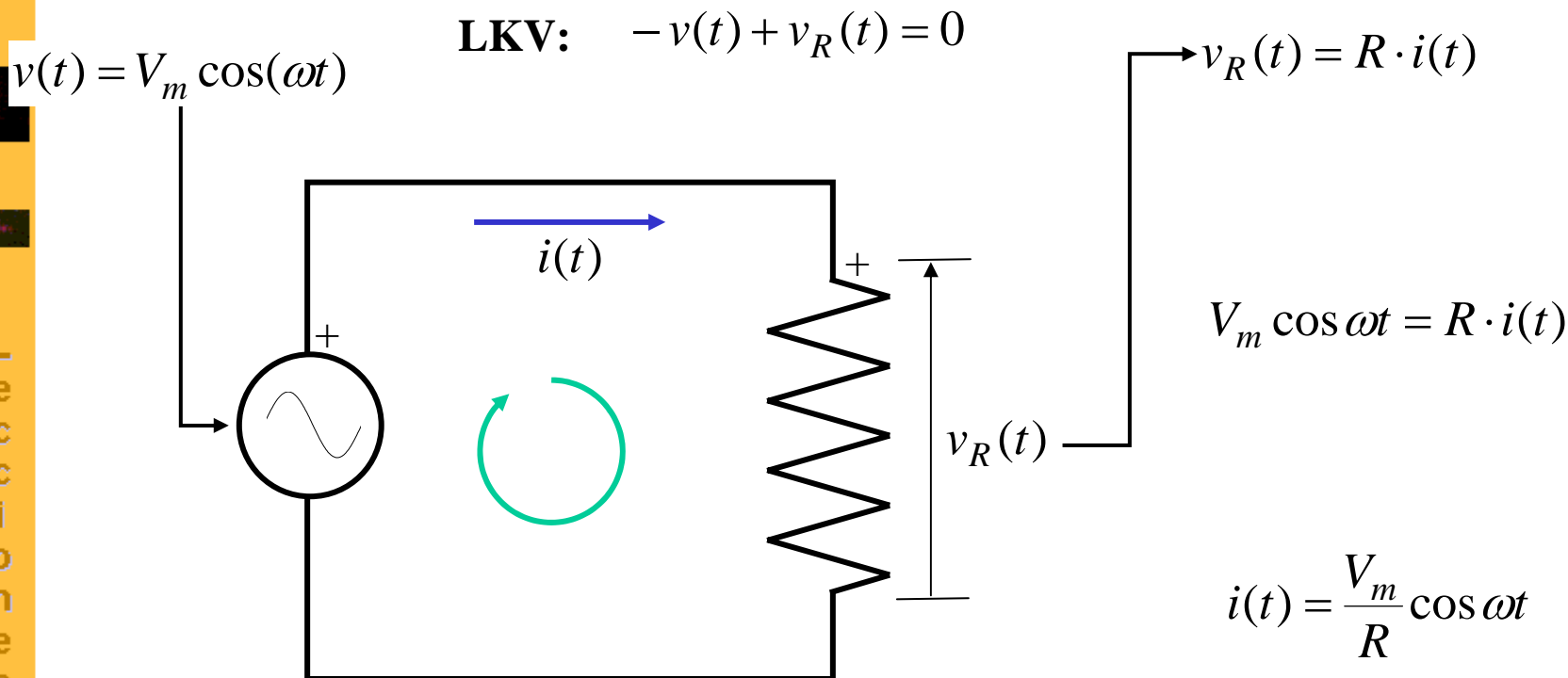
las representaciones...



...contienen la misma información que



ELEMENTOS DE CIRCUITO: RESISTENCIA



La **intensidad** ESTÁ EN
FASE con el voltaje

ELEMENTOS DE CIRCUITO: RESISTENCIA (II)

FASORES

$$V_{/0^\circ} = \left(\frac{V_m}{\sqrt{2}} \right)_{/0^\circ}$$

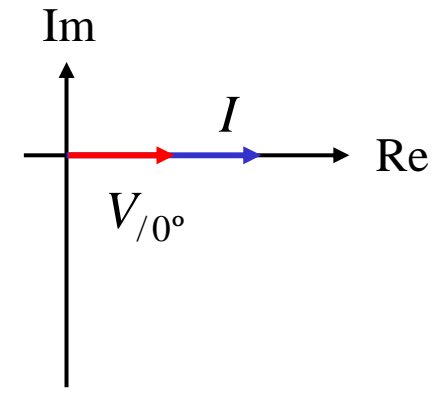
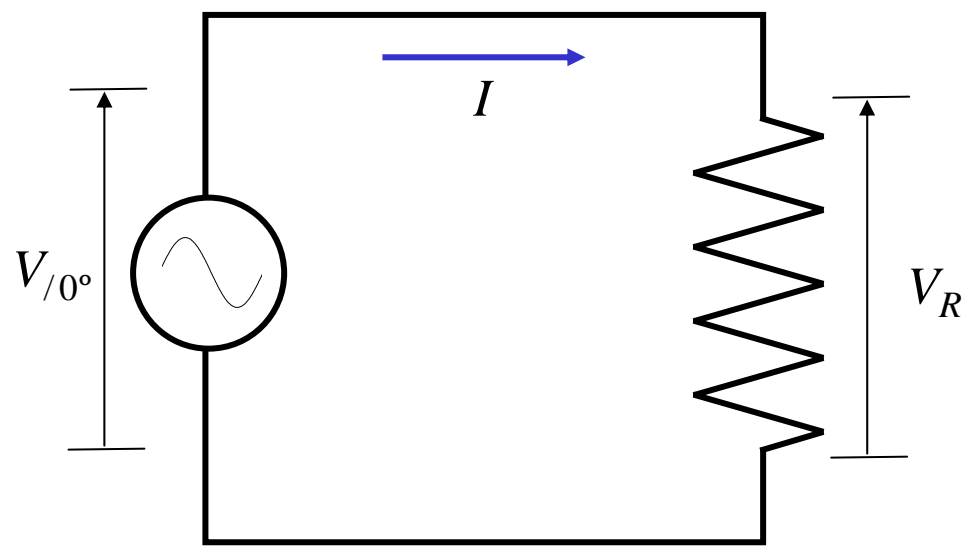
$$V_{/0^\circ} = V_R$$

Ohm c.a.

$$V_R = I \cdot R$$

$$I = \frac{V_R}{R} = \frac{V_{/0^\circ}}{R}$$

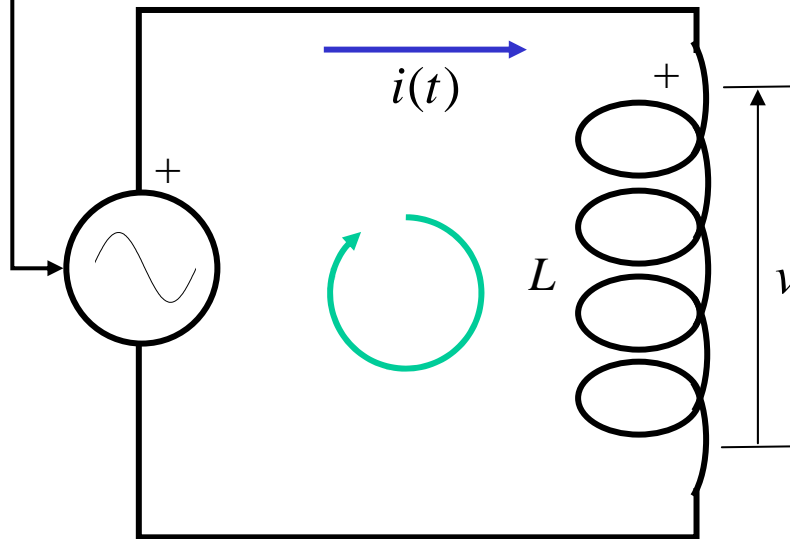
$$I = \left(\frac{V}{R} \right)_{/0^\circ}$$



ELEMENTOS DE CIRCUITO: INDUCTANCIA

$$v(t) = V_m \cos(\omega t)$$

$$\text{LKV: } -v(t) + v_L(t) = 0$$



$$v_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

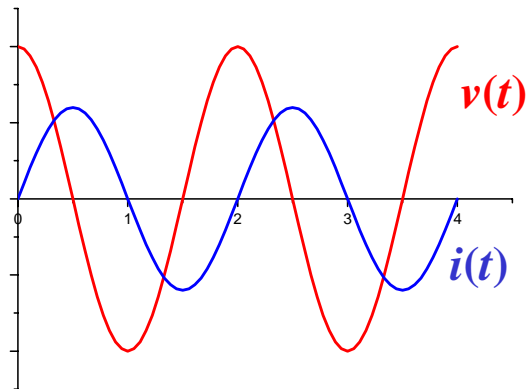
$$V_m \cos \omega t = L \frac{di(t)}{dt}$$

$$di(t) = \frac{V_m}{L} \cos \omega t \cdot dt$$

$$i(t) = \frac{V_m}{L} \int \cos \omega t \cdot dt$$

$$i(t) = \frac{V_m}{L\omega} \text{sen } \omega t = \frac{V_m}{L\omega} \cos(\omega t - \pi/2)$$

La **intensidad** ATRASA $\pi/2$ respecto al voltaje



ELEMENTOS DE CIRCUITO: INDUCTANCIA (II)

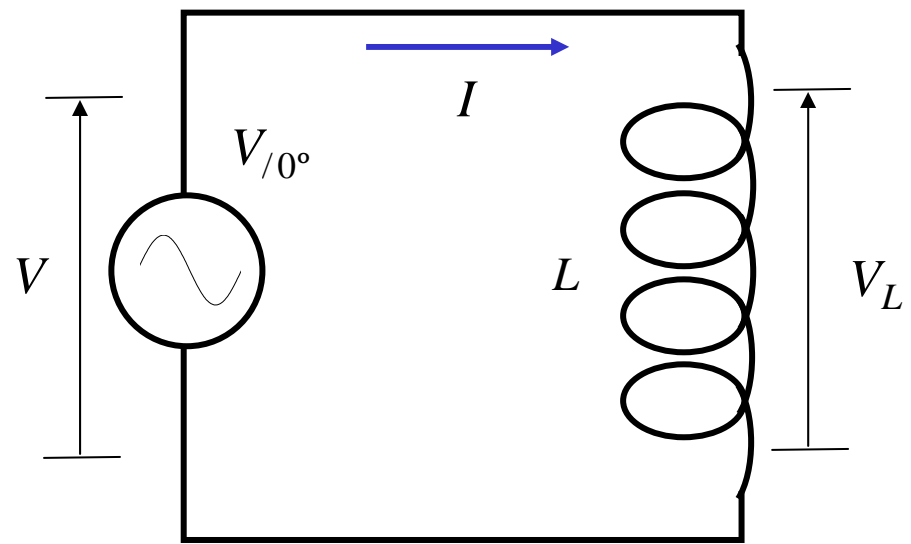
FASORES

$$V_{/0^\circ} = \left(\frac{V_m}{\sqrt{2}} \right)_{/0^\circ}$$

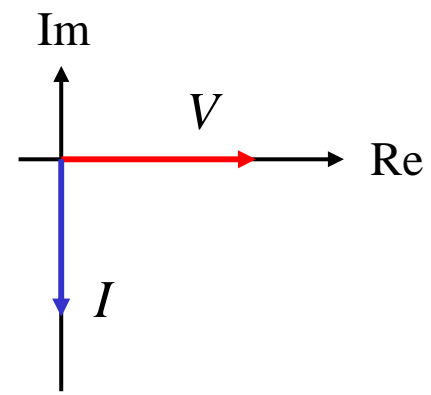
$$V = V_L$$

Ohm c.a.

$$V = I \cdot Z_L$$



$$I = \frac{V}{Z_L} = \frac{V_{/0^\circ}}{jL\omega} = \frac{V_{/0^\circ}}{L\omega_{/\pi/2}} = \left(\frac{V}{L\omega} \right)_{/-\pi/2}$$



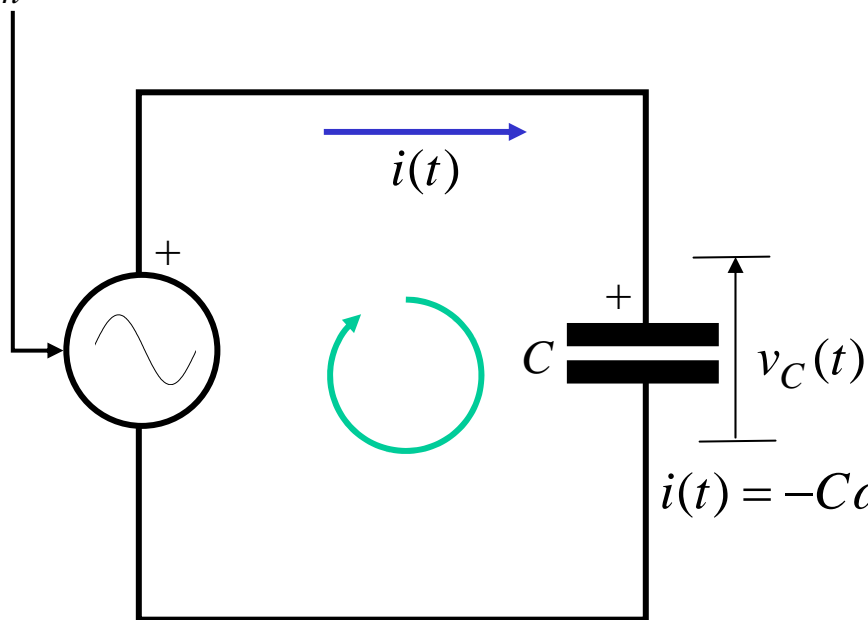
Impedancia compleja: $Z_L = jL\omega = L\omega_{/+90^\circ}$

Reactancia (inductiva): $X_L = L\omega$

ELEMENTOS DE CIRCUITO: CAPACITOR

$$v(t) = V_m \cos(\omega t)$$

$$\text{LKV: } -v(t) + v_C(t) = 0$$



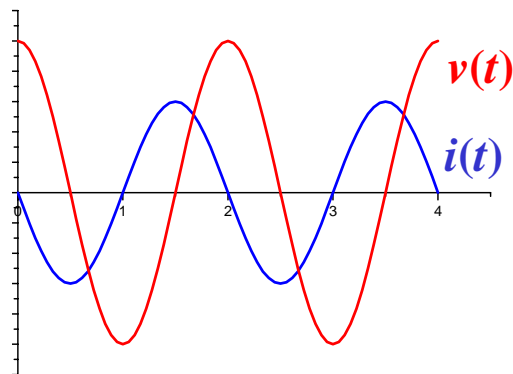
$$v_C(t) = \frac{q(t)}{C}$$

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C \cdot \frac{dv_C(t)}{dt}$$

$$i(t) = C \cdot V_m \frac{d}{dt}(\cos \omega t)$$

$$i(t) = -C\omega \cdot V_m \text{sen } \omega t = C\omega \cdot V_m \cos(\omega t + \pi/2)$$

$$i(t) = C\omega \cdot V_m \cos(\omega t + \pi/2)$$



La **intensidad** ADELANTA
 $\pi/2$ respecto al voltaje

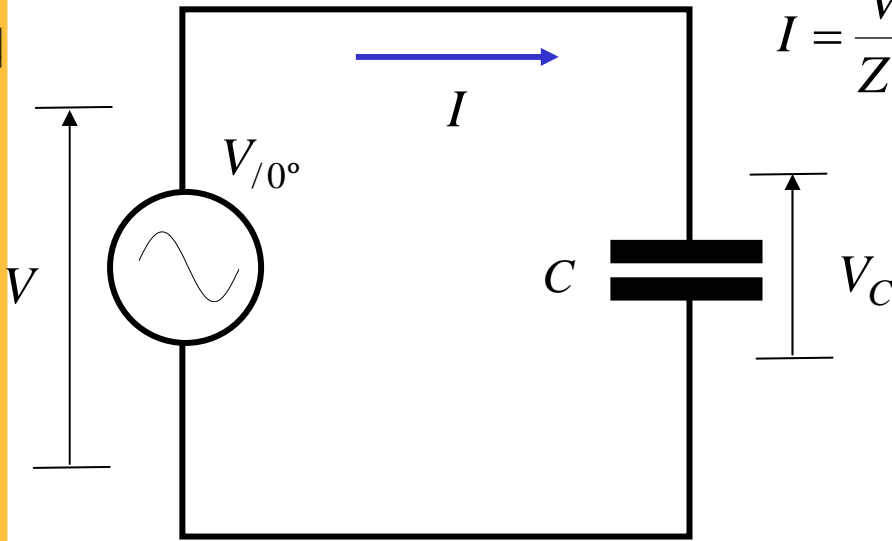
ELEMENTOS DE CIRCUITO: CAPACITOR (II)

FASORES

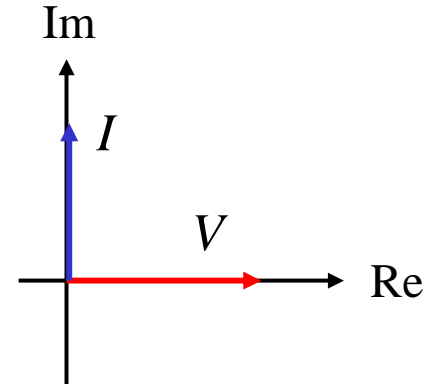
$$V_{/0^\circ} = \left(\frac{V_m}{\sqrt{2}} \right)_{/0^\circ}$$

$$V = V_C$$

Ohm c.a. $V = I \cdot Z_C$



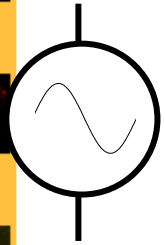
$$I = \frac{V}{Z_C} = \frac{V_{/0^\circ}}{-j \frac{1}{C\omega}} = \frac{V_{/0^\circ}}{\left(\frac{1}{C\omega} \right)_{/-\pi/2}} = (V \cdot C\omega)_{/\pi/2}$$



Impedancia compleja: $Z_C = -j \frac{1}{C\omega} = \left(\frac{1}{C\omega} \right)_{/-90^\circ}$

Reactancia (capacitiva): $X_C = \frac{1}{C\omega}$

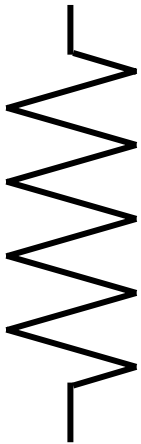
ELEMENTOS DE CIRCUITO (RESUMEN)



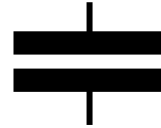
Fuente de tensión alterna ideal.
Representada por el fasor

$$V = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\varphi}$$

Relación entre frecuencia f
y pulsación: $\omega = 2\pi f$



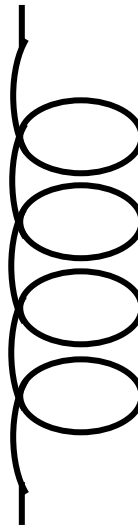
Resistencia óhmica
Número real
(R , medida en Ω)



Condensador (capacidad C).
Su impedancia compleja es

$$Z_C = -j \cdot X_C = -j \frac{1}{C\omega}$$

Donde X_C es la reactancia
capacitiva, se expresa en Ω

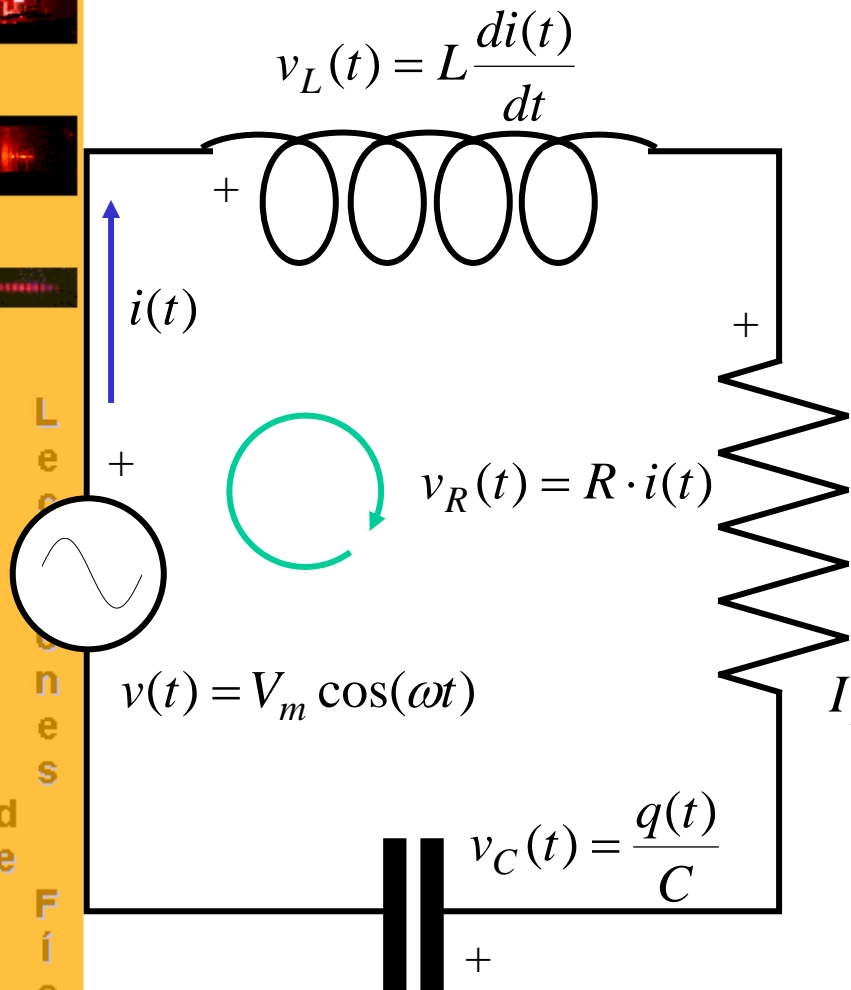


Bobina ideal (inductancia L).
Su impedancia compleja es

$$Z_L = j \cdot X_L = jL\omega$$

Donde X_L es la reactancia
inductiva, se expresa en Ω

CIRCUITO RCL SERIE



$$\text{LKV: } -v(t) + v_L(t) + v_R(t) + v_C(t) = 0$$

$$L \frac{di}{dt} + R \cdot i + \frac{q}{C} = V_m \cos(\omega t)$$

$$L \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = -V_m \omega \text{sen}(\omega t)$$

Solución de la forma:

$$i(t) = I_m \cos(\omega t - \varphi)$$

$$I_m = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$$

$$\text{tg } \varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} = \frac{X_L - X_C}{R}$$

CIRCUITO RCL SERIE (II)

DEMOSTRACIÓN FORMA DE LA SOLUCIÓN

$$i(t) = I_m \cos(\omega t - \varphi)$$

$$\frac{di}{dt} = -I_m \omega \operatorname{sen}(\omega t - \varphi)$$

$$\frac{d^2i}{dt^2} = -I_m \omega^2 \cos(\omega t - \varphi)$$

$$-L \cdot I_m \omega^2 \cos(\omega t - \varphi) - R \cdot I_m \omega \operatorname{sen}(\omega t - \varphi) + \frac{1}{C} \cdot I_m \cos(\omega t - \varphi) = -V_m \omega \operatorname{sen} \omega t$$

$$-L \cdot I_m \omega^2 [\cos \omega t \cdot \cos \varphi + \operatorname{sen} \omega t \cdot \operatorname{sen} \varphi] - R \cdot I_m \omega [\operatorname{sen} \omega t \cdot \cos \varphi - \cos \omega t \cdot \operatorname{sen} \varphi]$$

$$+ \frac{1}{C} \cdot I_m [\cos \omega t \cdot \cos \varphi + \operatorname{sen} \omega t \cdot \operatorname{sen} \varphi] = -V_m \omega \operatorname{sen} \omega t$$

CIRCUITO RCL SERIE (III)

DEMOSTRACIÓN (CONT.)

$$\left[-L \cdot I_m \omega^2 \cos \varphi + R \cdot I_m \omega \sin \varphi + \frac{1}{C} I_m \cos \varphi \right] \cos \omega t$$
$$+ \left[-L \cdot I_m \omega^2 \sin \varphi - R \cdot I_m \omega \cos \varphi + \frac{1}{C} I_m \sin \varphi \right] \sin \omega t = -V_m \omega \sin \omega t$$

Igualando coeficientes (término coseno)

$$-L \cdot I_m \omega^2 \cos \varphi + R \cdot I_m \omega \sin \varphi + \frac{1}{C} I_m \cos \varphi = 0$$

$$-\left[L\omega^2 - \frac{1}{C} \right] \cos \varphi + R\omega \sin \varphi = 0$$

$$R \sin \varphi = \left[L\omega - \frac{1}{C\omega} \right] \cos \varphi$$

$$X_L = L\omega$$

$$X_C = \frac{1}{C\omega}$$

$$X = X_L - X_C$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\left[L\omega - \frac{1}{C\omega} \right]}{R} = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{X}{R}$$

CIRCUITO RCL SERIE (IV)

DEMOSTRACIÓN (CONT 2)

Igualando coeficientes (término seno)

$$-L \cdot I_m \omega^2 \operatorname{sen} \varphi - R \cdot I_m \omega \cos \varphi + \frac{1}{C} I_m \operatorname{sen} \varphi = -V_m \omega$$

$$I_m \left[\left(-L\omega^2 + \frac{1}{C} \right) \operatorname{sen} \varphi - R\omega \cos \varphi \right] = -V_m \omega$$

$$I_m \left[\left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \operatorname{sen} \varphi + R \cos \varphi \right] = V_m$$

$$I_m [X \operatorname{sen} \varphi + R \cos \varphi] = V_m$$

$$I_m = \frac{V_m}{X \operatorname{sen} \varphi + R \cos \varphi}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X}{R}$$

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} = \frac{X^2}{R^2}$$

$$\operatorname{sen}^2 \varphi = \frac{X^2}{R^2} \cos^2 \varphi = \frac{X^2}{R^2} (1 - \operatorname{sen}^2 \varphi)$$

CIRCUITO RCL SERIE (V)

DEMOSTRACIÓN (CONT 3)

$$\text{sen}^2 \varphi = \frac{X^2/R^2}{1 + X^2/R^2} = \frac{X^2}{R^2 + X^2}$$

$$\text{cos}^2 \varphi = 1 - \frac{X^2}{R^2 + X^2} = \frac{R^2}{R^2 + X^2}$$

$$\text{sen} \varphi = \frac{X}{\sqrt{R^2 + X^2}}$$

$$\text{cos} \varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X^2}}$$

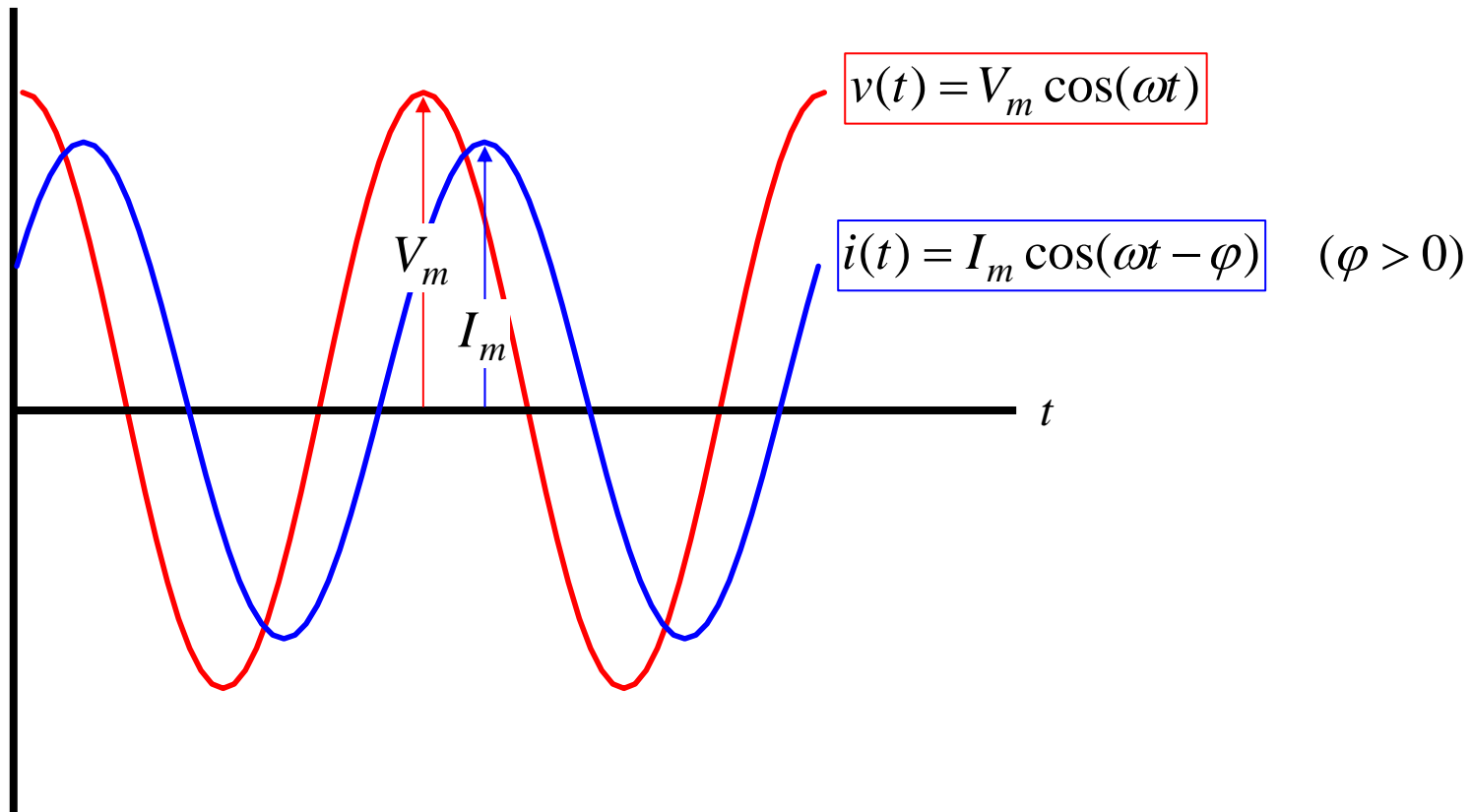
$$I_m = \frac{V_m}{X \text{sen} \varphi + R \text{cos} \varphi} = \frac{V_m}{X \frac{X}{\sqrt{R^2 + X^2}} + R \frac{R}{\sqrt{R^2 + X^2}}} = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + X^2}}$$

$$I_m = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + X^2}} = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$$

Impedancia $Z = |Z| \cdot e^{j\varphi}$ $\varphi = \text{tg}^{-1}\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right)$ $|Z| = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$

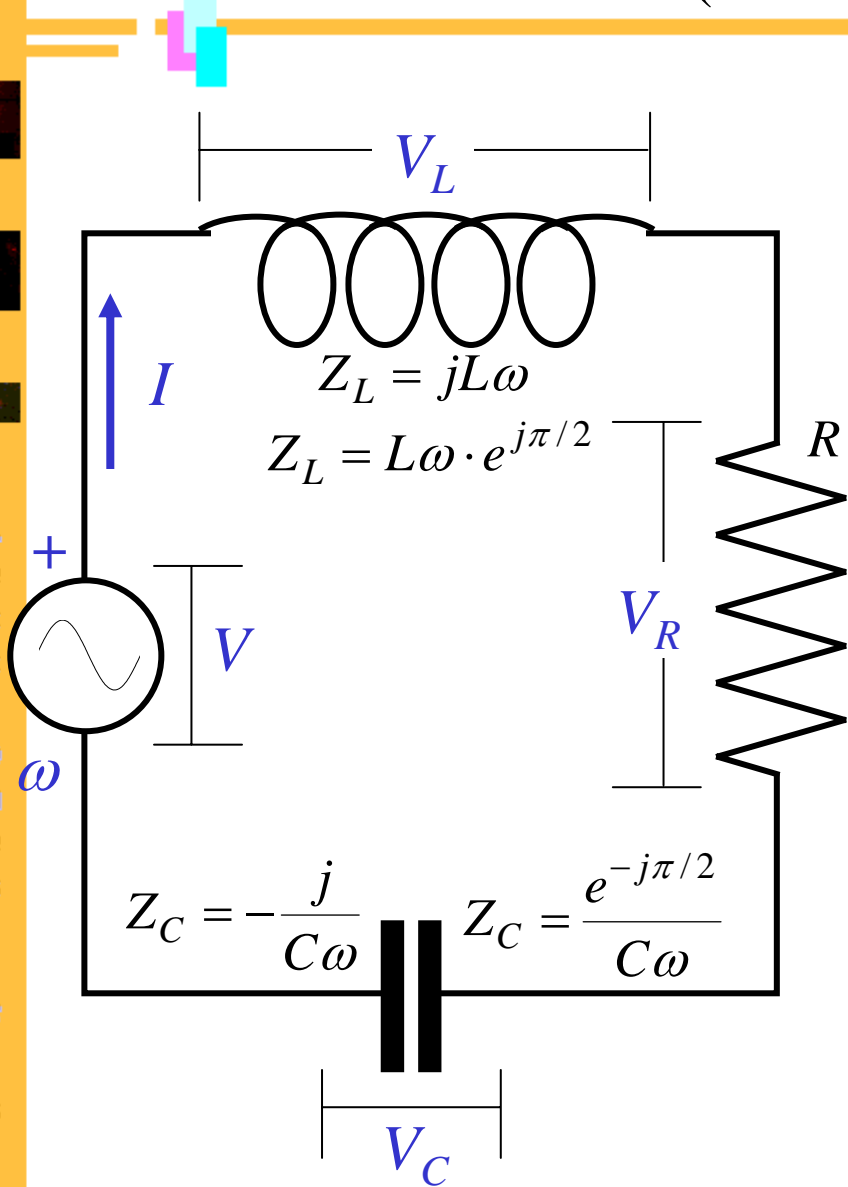
CIRCUITO RCL SERIE (VI)

REPRESENTACIÓN GRÁFICA

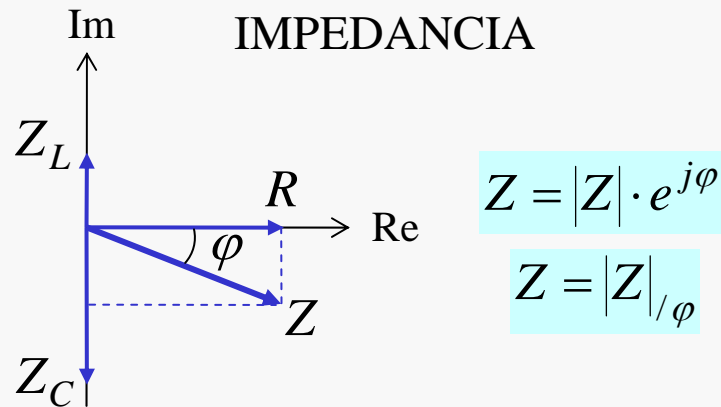


$\varphi > 0$	Circuito inductivo	$X_L > X_C$	La corriente atrasa respecto al voltaje
$\varphi < 0$	Circuito capacitivo	$X_L < X_C$	La corriente adelanta respecto al voltaje

CIRCUITO RCL SERIE (FASORES)



$$V = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \cdot e^{j0}$$



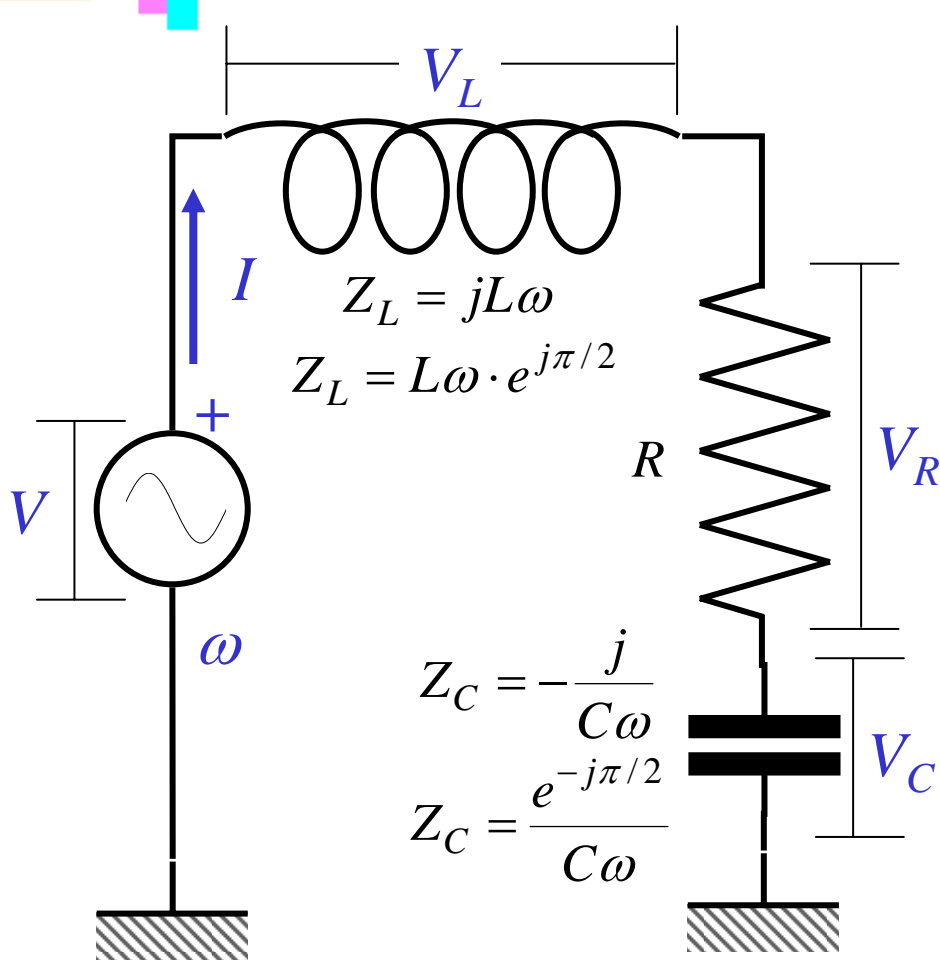
$$|Z| = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

$$\text{tg } \varphi = \frac{X_L - X_C}{R}$$

Ley de Ohm c.a.

$$V = I \cdot Z$$

CIRCUITO RCL SERIE (CONEXIÓN A TIERRA)



$$V = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \cdot e^{j0}$$

$V = V_L + V_R + V_C$ (Fasores)

$|V| \neq |V_L| + |V_R| + |V_C|$ (Módulos)

DIVISOR DE TENSIÓN

$$\left\{ \begin{array}{l} V_L = \frac{Z_L}{Z} V \\ V_C = \frac{Z_C}{Z} V \\ V_R = \frac{R}{Z} V \end{array} \right.$$

RESONANCIA CIRCUITO SERIE

A la frecuencia a la que $X_L = X_C$

$$I_m = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0}\right)^2}} = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} \quad \Rightarrow \quad I_m \text{ adopta el máximo valor posible}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0}}{R} = \frac{X_L - X_C}{R} \quad \Rightarrow \quad \varphi = 0$$

Pulsación de resonancia

$$L\omega_0 = \frac{1}{C\omega_0}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Si I_m adopta el máximo valor cuando $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$... también I_{eficaz} es máxima

RESONANCIA CIRCUITO SERIE (CONT)

$$I_{eficaz} = \frac{V_{eficaz}}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

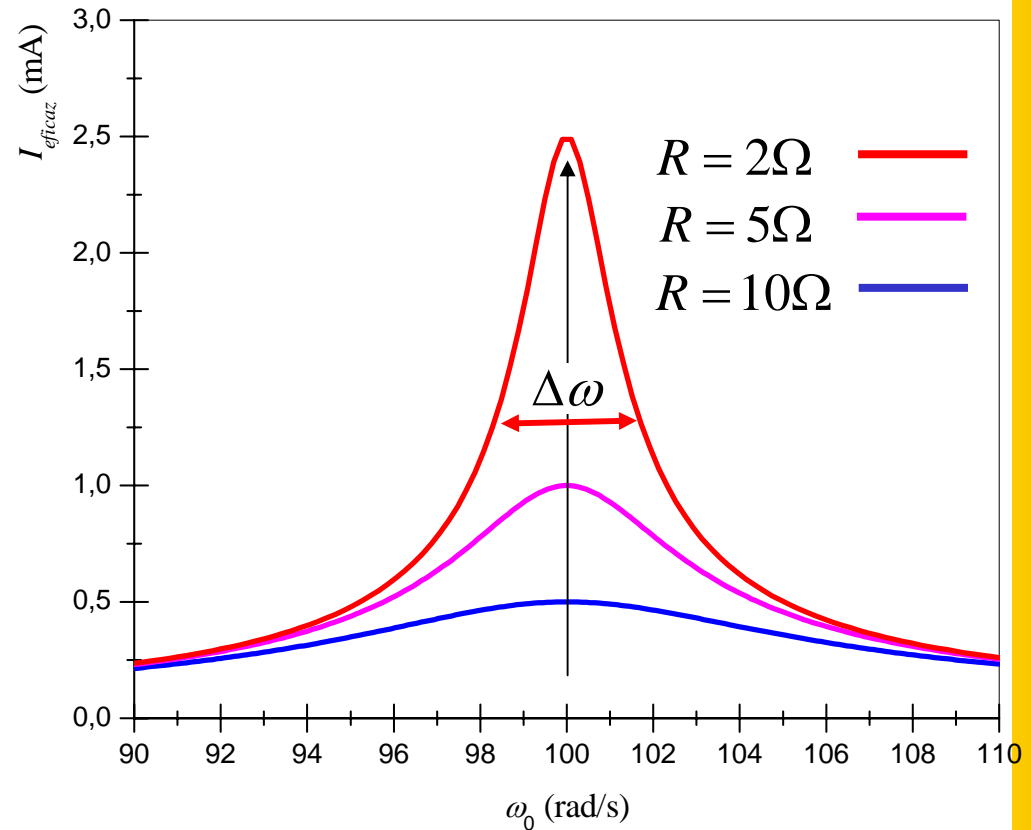
EJEMPLO:

Circuito RCL serie con $L = 1$ H,
 $C = 100 \mu\text{F}$ y $V_{eficaz} = 5$ mV.

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{1 \cdot 10^{-4}}} = 100 \text{ rad/s}$$

Factor de calidad

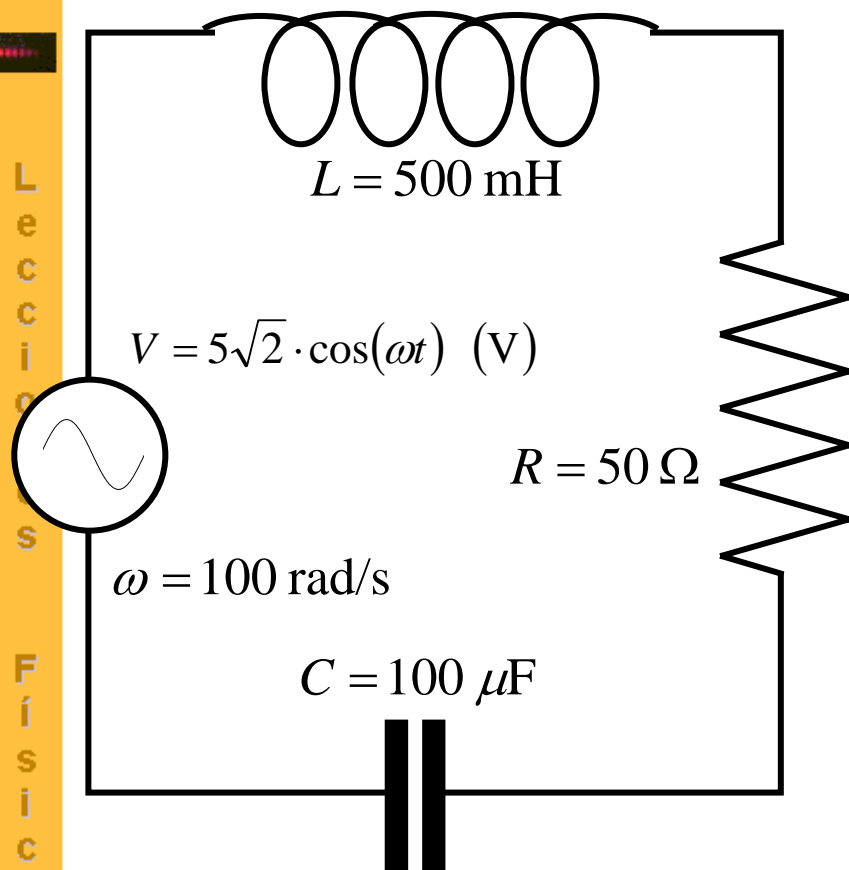
$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\omega_0 L}{R}$$



A medida que disminuye el valor de la resistencia el pico de resonancia se hace más agudo

CIRCUITO RCL SERIE (EJEMPLO 1)

Determinar la corriente que circula por el circuito siguiente y su desfase con el voltaje. Representar gráficamente voltaje e intensidad frente al tiempo.



ω (rad/s)	100	Z (Ω)
L (H)	0,5	50
C (F)	1,0E-04	100
R (Ω)		50

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

$$= \sqrt{50^2 + (100 - 50)^2} = \sqrt{2 \cdot 50^2} = 50\sqrt{2} \Omega,$$

$$\text{tg } \varphi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{50 - 100}{50} = -1$$

$$\varphi = -\frac{\pi}{4} \text{ rad} = -45^\circ$$

$$\text{Impedancia: } \begin{cases} Z = 50\sqrt{2} /_{-45^\circ} \Omega \\ Z = 50\sqrt{2} \cdot e^{-j\pi/4} \Omega \end{cases}$$

CIRCUITO RCL SERIE (EJEMPLO 1 CONTINUACIÓN)

$$V = I \cdot Z \quad I = \frac{V}{Z} = \frac{5 \cdot e^{j0}}{50\sqrt{2} \cdot e^{-j\pi/4}} = \frac{0.1}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\pi/4} \text{ A}$$

Desfase entre corriente y voltaje: la corriente ADELANTA 45° al voltaje

Representación gráfica: representamos las partes reales.

$$v(t) = V_m \cdot \cos(\omega t) = 5\sqrt{2} \cdot \cos(100t)$$

Valores eficaces de tensión e intensidad multiplicados por $\sqrt{2}$

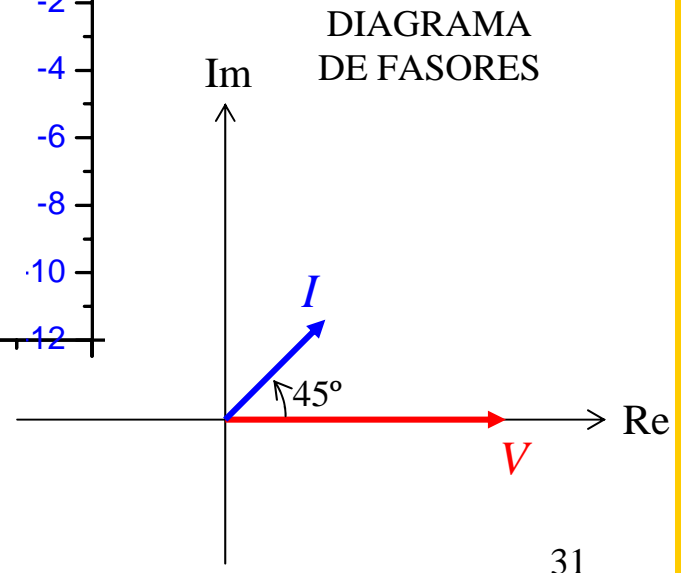
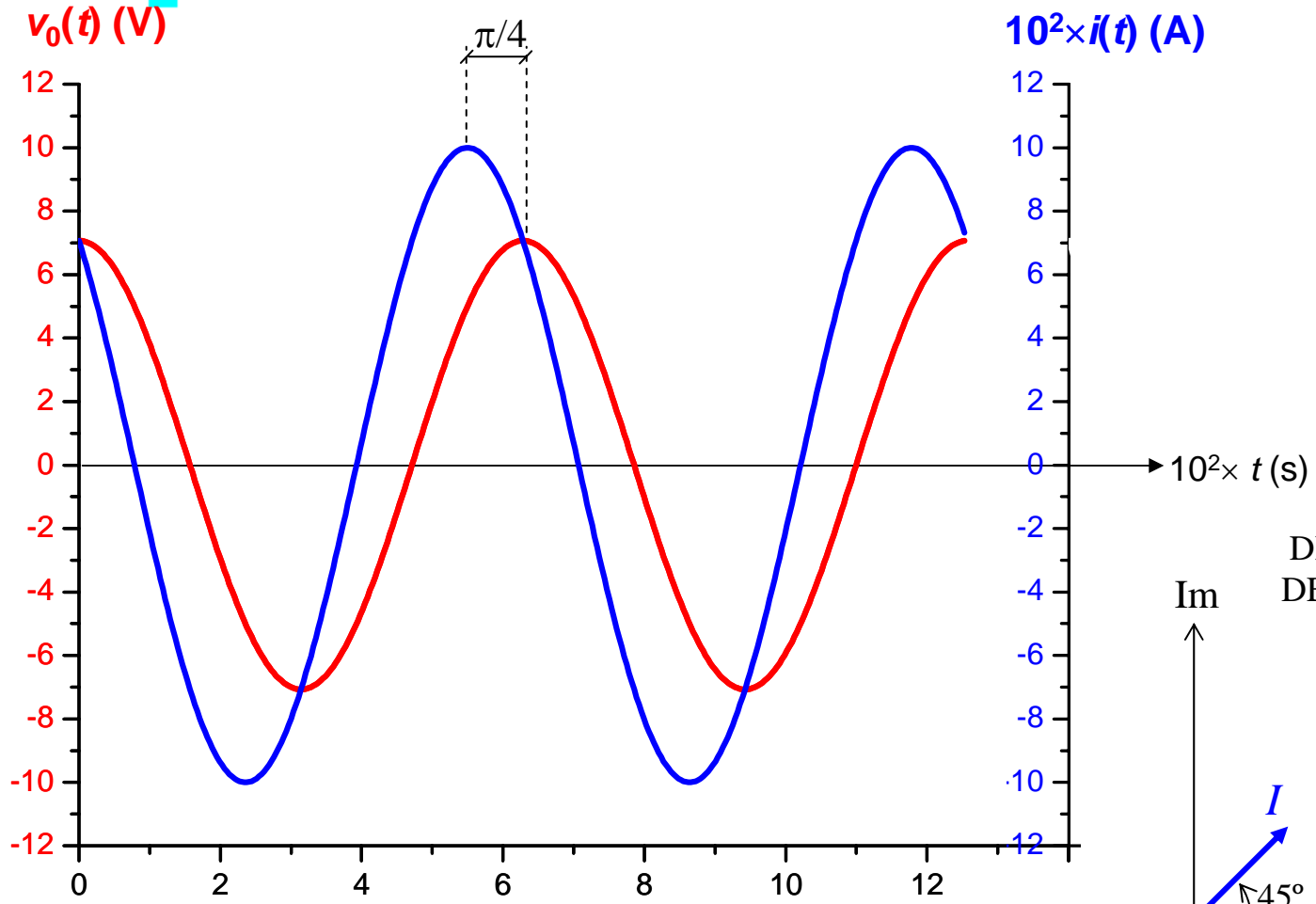
$$i(t) = I_m \cdot \cos(\omega t + 45^\circ) = 0.1 \cdot \cos(100t + 45^\circ)$$

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{100} = 0.0628 \text{ s}$$

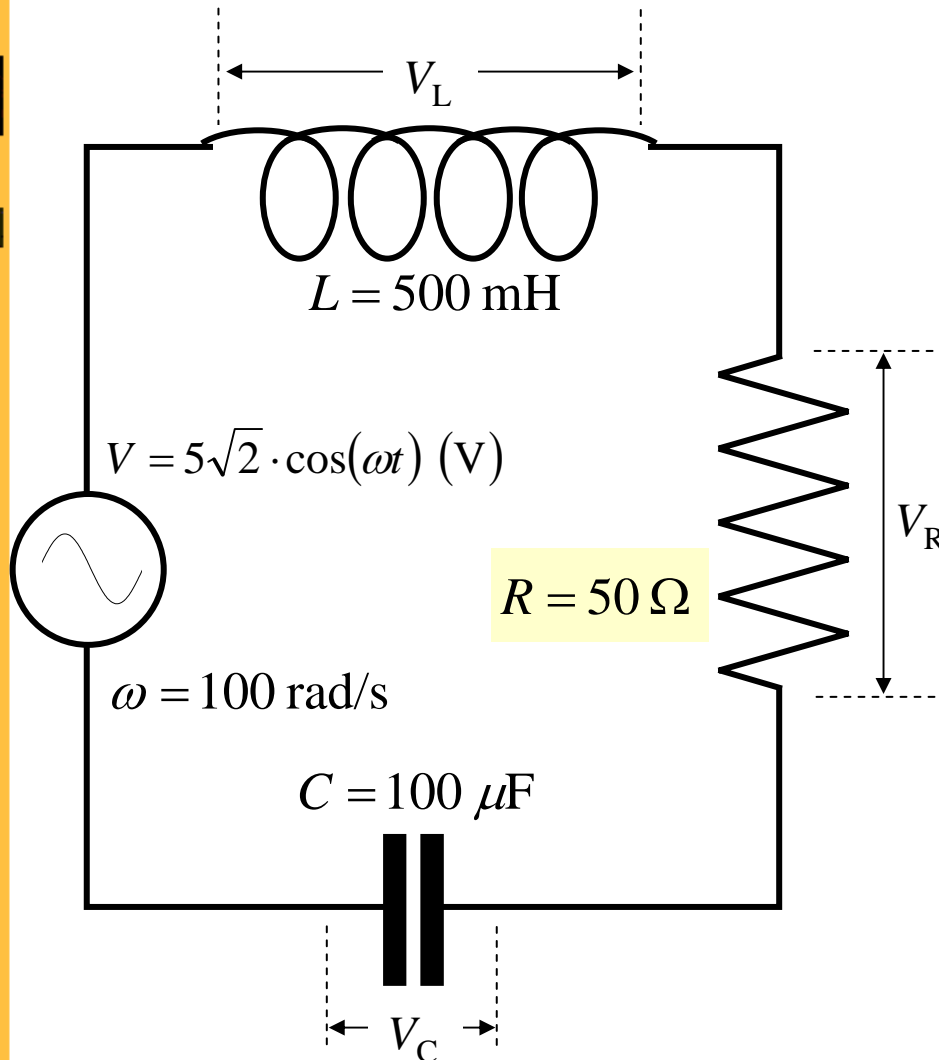
Ver gráficas 

CIRCUITO RCL SERIE (EJEMPLO 1 GRÁFICAS)



CIRCUITO RCL SERIE (EJEMPLO 2)

Determinar las diferencias de potencial en cada una de las impedancias del circuito del ejemplo anterior. Hágase una representación fasorial.



De la resolución de EJEMPLO 1:

Impedancia:
$$\begin{cases} Z = 50\sqrt{2} /_{-45^\circ} \Omega \\ Z = 50\sqrt{2} \cdot e^{-j\pi/4} \Omega \end{cases}$$

$$Z_L = j50 \Omega = 50 /_{+90^\circ} \Omega$$

$$Z_C = -j100 \Omega = 100 /_{-90^\circ} \Omega$$

Aplicamos a cada impedancia la fórmula del divisor de tensión:

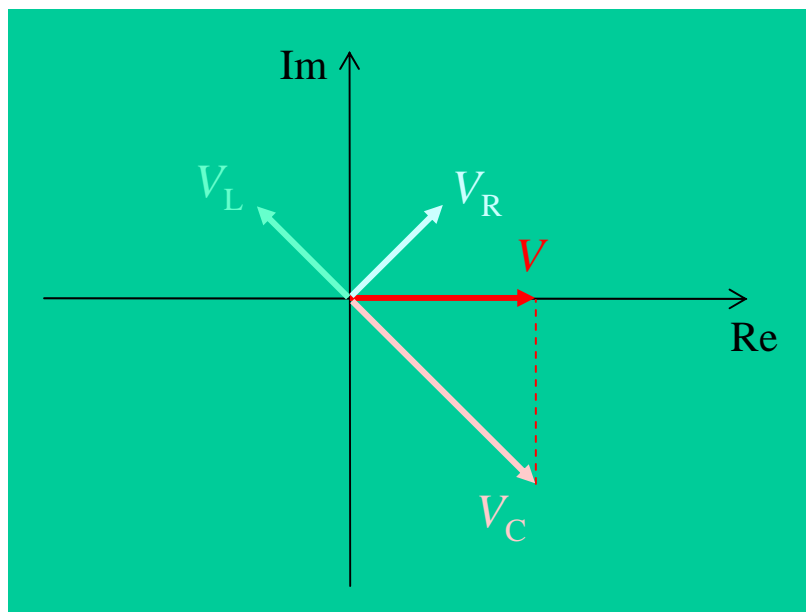
$$V_i = \frac{Z_i}{Z} V$$

CIRCUITO LCR SERIE (EJEMPLO 2 CONTINUACIÓN)

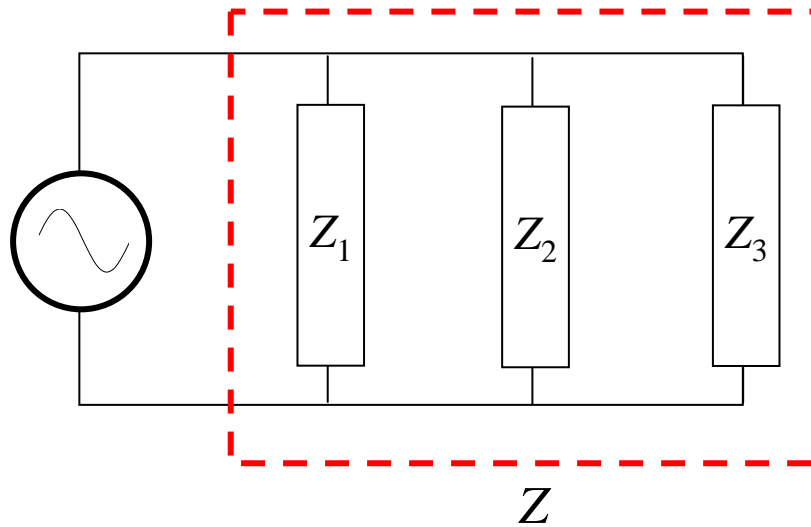
Inductancia:
$$V_L = \frac{Z_L}{Z} V = \frac{50_{/+90^\circ}}{50\sqrt{2}_{/-45^\circ}} 5_{/0^\circ} = \left(\frac{5}{\sqrt{2}} \right)_{/+135^\circ} = 2.5\sqrt{2}_{/+135^\circ} \text{ V}$$

Resistencia:
$$V_R = \frac{R}{Z} V = \frac{50_{/0^\circ}}{50\sqrt{2}_{/-45^\circ}} 5_{/0^\circ} = \left(\frac{5}{\sqrt{2}} \right)_{/+45^\circ} = 2.5\sqrt{2}_{/+45^\circ} \text{ V}$$

Condensador:
$$V_C = \frac{Z_C}{Z} V = \frac{100_{/-90^\circ}}{50\sqrt{2}_{/-45^\circ}} 5_{/0^\circ} = \left(\frac{10}{\sqrt{2}} \right)_{/+45^\circ} = 5\sqrt{2}_{/-45^\circ} \text{ V}$$



CIRCUITOS EN PARALELO

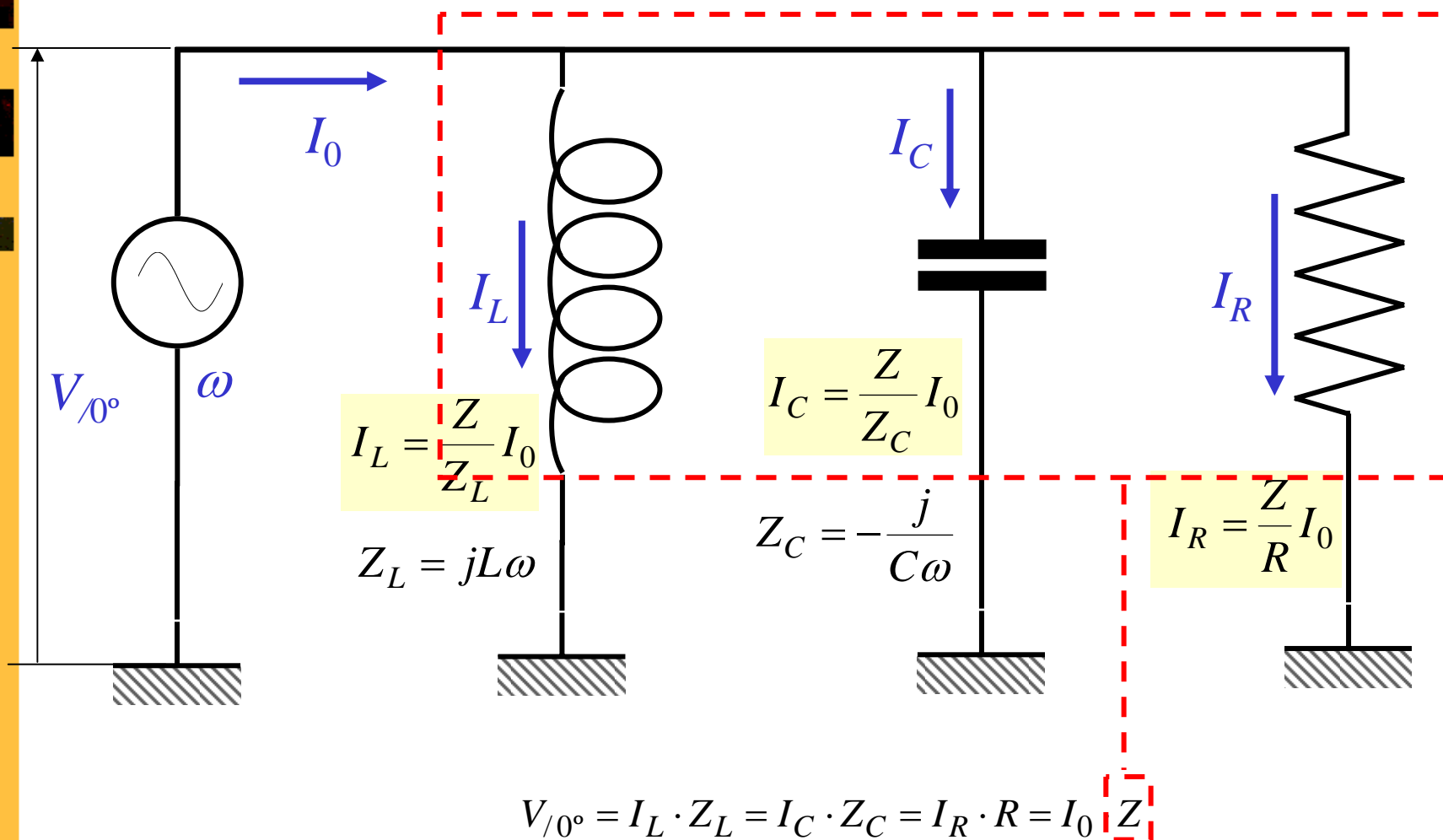


Impedancia equivalente

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}$$

La diferencia de potencial es la misma a través de cualquiera de las ramas.
Por cada una de ellas circula una intensidad diferente.

DIVISOR DE CORRIENTE



Las tres impedancias forman un divisor de corriente

DIVISOR DE CORRIENTE (II)

ADMITANCIA: Razón de la corriente fasorial al voltaje fasorial $Y = \frac{I}{V}$

La admitancia es
inversa de la impedancia

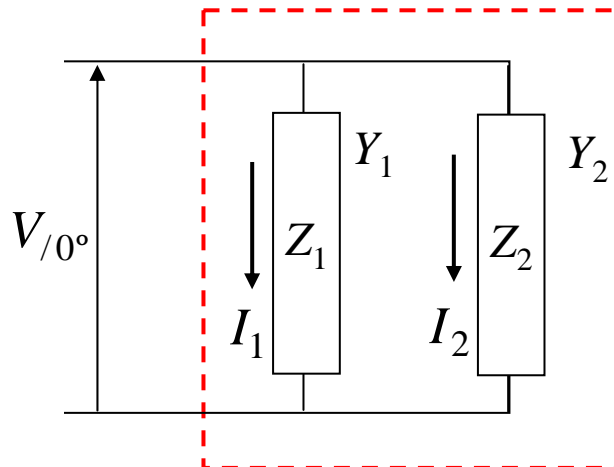
Conductancia

Unidades SI:
Siemen
($S = \Omega^{-1}$)

Susceptancia

$$Y = \frac{1}{Z} = G + jB = \frac{1}{R + jX}$$

ADMITANCIA EQUIVALENTE EN PARALELO



$$I_1 = Y_1 \cdot V_{/0^\circ}$$

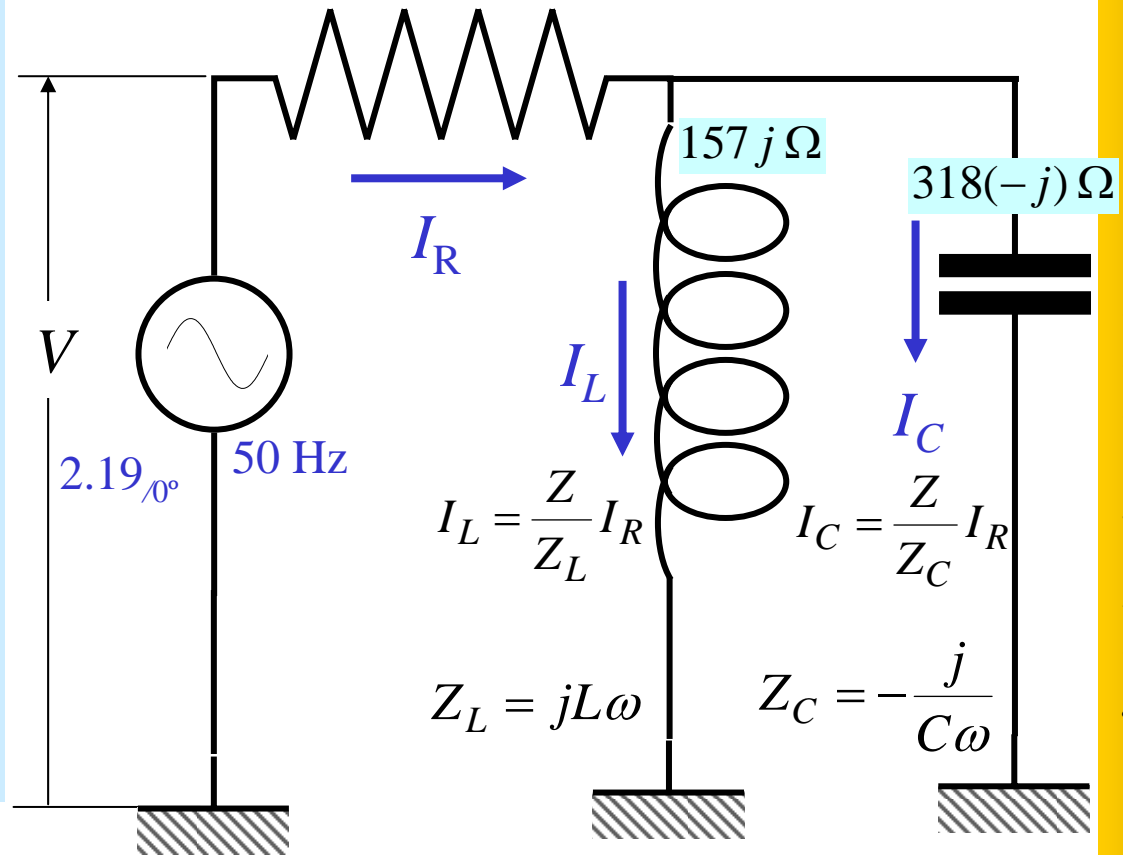
$$I_2 = Y_2 \cdot V_{/0^\circ}$$

$$Y = Y_1 + Y_2$$

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$$

CIRCUITO PARALELO (EJEMPLO 3)

Una fuente de tensión que suministra 2.19 V eficaces a 50 Hz alimenta un circuito formado por una resistencia de 310Ω en serie con un paralelo formado por una bobina de 500 mH y un condensador de $10 \mu\text{F}$. Determinar la corriente que circula por cada elemento del circuito y la diferencia de potencial en cada impedancia. Hágase una representación fasorial.



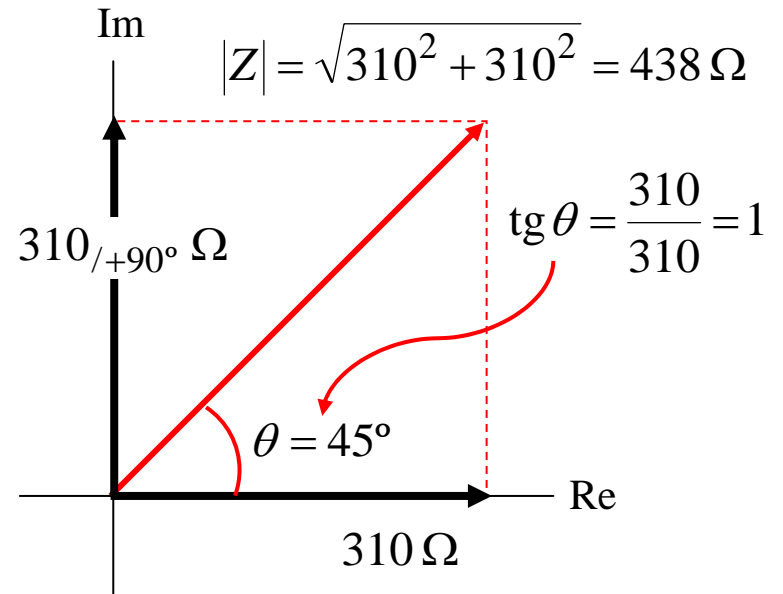
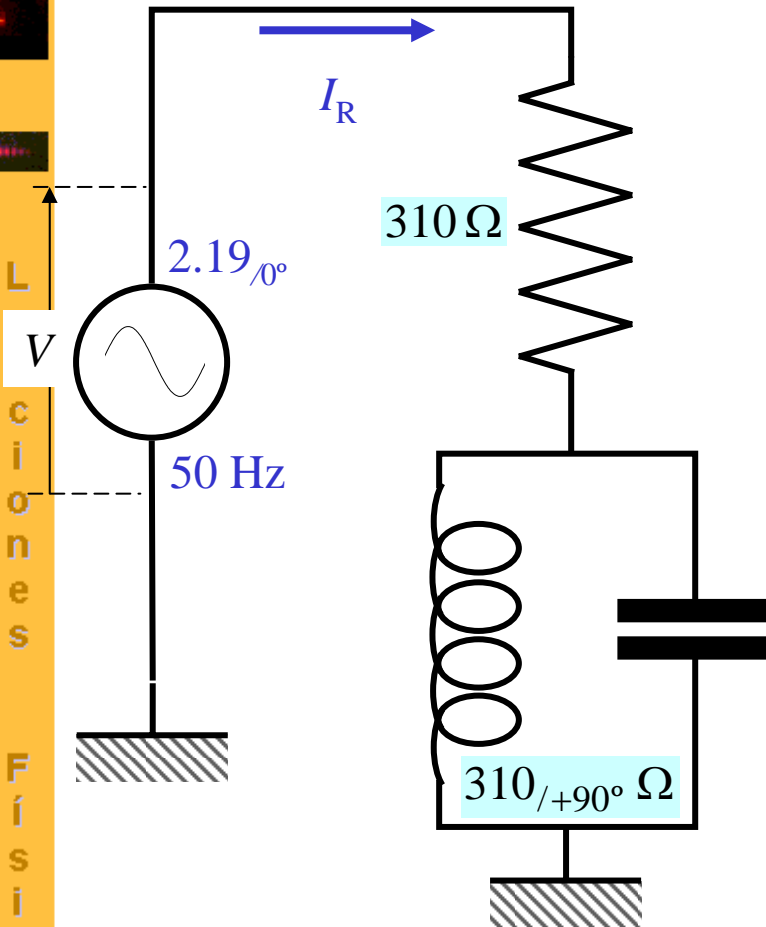
Impedancia del paralelo

$$Z_P = \frac{Z_L \cdot Z_C}{Z_L + Z_C} = \frac{157j \cdot 318(-j)}{157j - 318j} = 310j = 310 \angle +90^\circ \Omega$$

CIRCUITO PARALELO (EJEMPLO 3 CONTINUACIÓN)

Circuito equivalente:

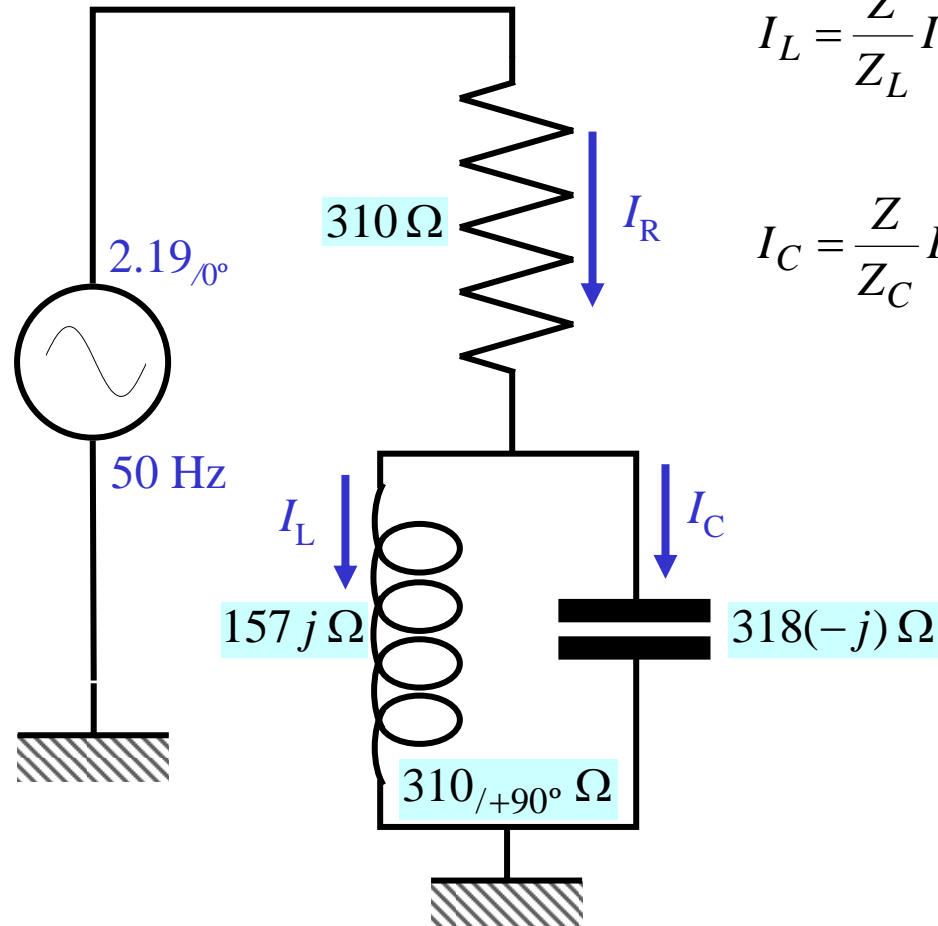
Impedancia total en circuito $Z = 438_{/+45^\circ} \Omega$



$$I_R = \frac{V}{Z} = \frac{2.19_{/0^\circ}}{438_{/+45^\circ}} = 5 \cdot 10^{-3}_{/-45^\circ} \text{ A} = 5_{/-45^\circ} \text{ mA}$$

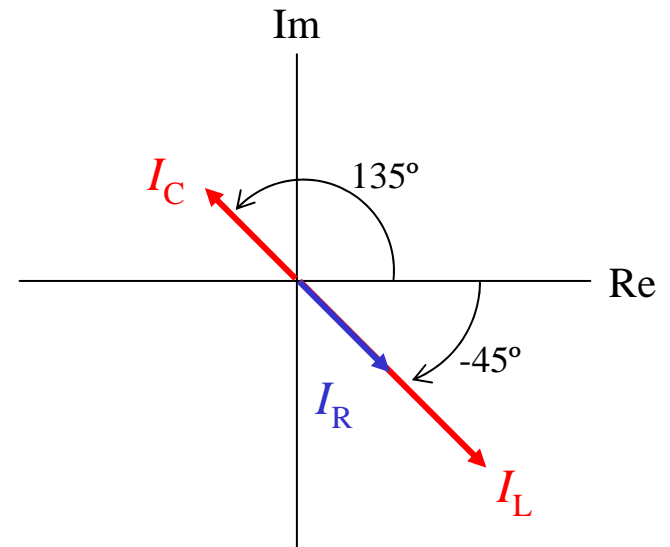
CIRCUITO PARALELO (EJEMPLO 3 CONTINUACIÓN 2)

Para el cálculo de la corriente en cada una de las impedancias en paralelo aplicamos las fórmulas del divisor de corriente.



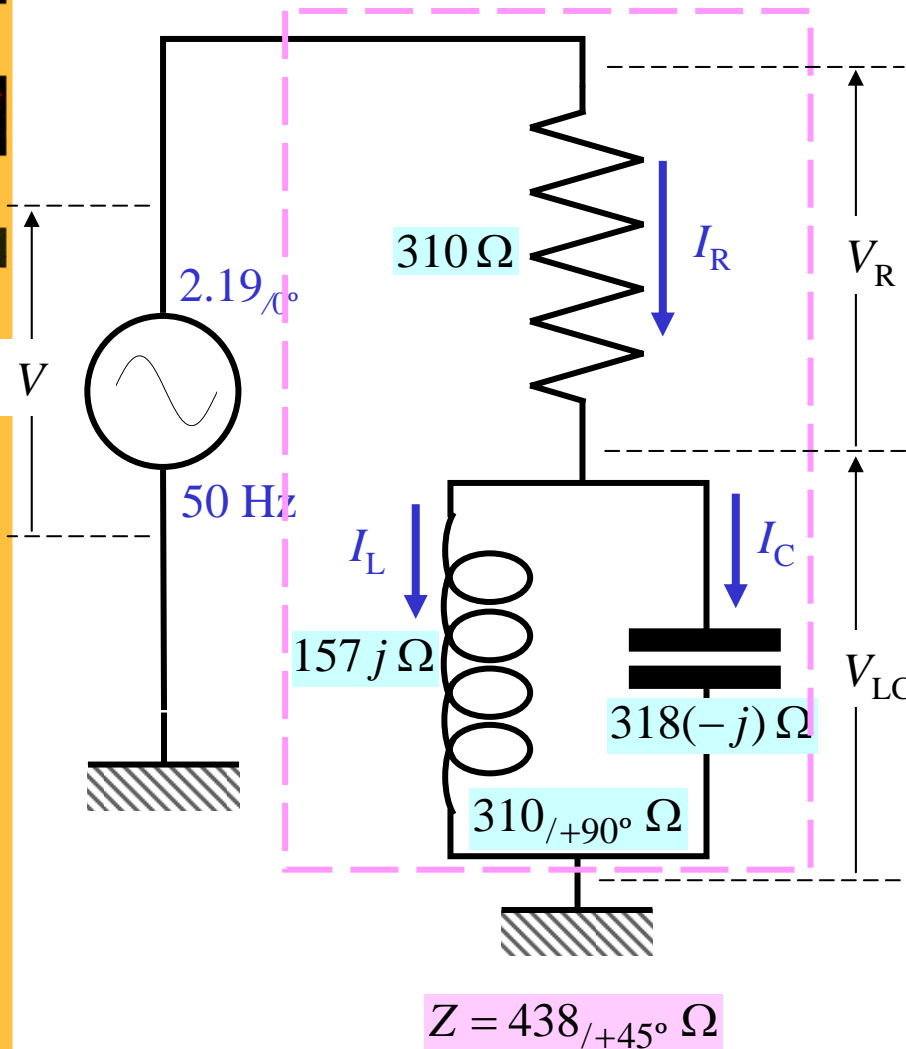
$$I_L = \frac{Z}{Z_L} I_R = \frac{310_{/+90^\circ}}{157_{/+90^\circ}} 5_{/-45^\circ} = 9.87_{/-45^\circ} \text{ mA}$$

$$I_C = \frac{Z}{Z_C} I_R = \frac{310_{/+90^\circ}}{318_{/-90^\circ}} 5_{/-45^\circ} = 4.87_{/+135^\circ} \text{ mA}$$



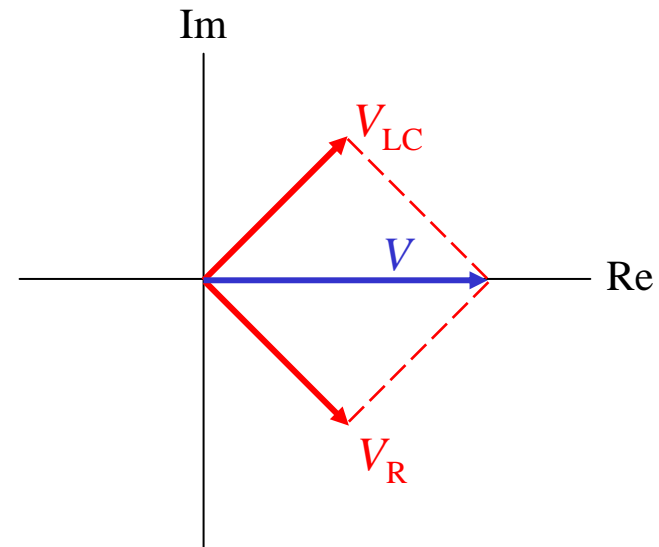
CIRCUITO PARALELO (EJEMPLO 3 CONTINUACIÓN 3)

Cálculo de la d.d.p. en cada una de las impedancias: divisor de tensión.



$$V_R = \frac{R}{Z} V = \frac{310_{/0^\circ}}{438_{/+45^\circ}} 2.19_{/0^\circ} = 1.55_{/-45^\circ} \text{ V}$$

$$V_{LC} = \frac{Z_P}{Z} V = \frac{310_{/+90^\circ}}{438_{/+45^\circ}} 2.19_{/0^\circ} = 1.55_{/+45^\circ} \text{ V}$$



POTENCIA EN CORRIENTE ALTERNA

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) \quad \left\{ \begin{array}{l} v(t) = V_m \cos \omega t \\ i(t) = I_m \cos(\omega t - \varphi) \end{array} \right.$$

$$p(t) = V_m I_m \cos \omega t \cdot \cos(\omega t - \varphi) = \frac{1}{2} V_m I_m [\cos \varphi + \cos(2\omega t - \varphi)]$$

Potencia promedio: El valor promedio de $\cos(2\omega t - \varphi)$ es nulo.

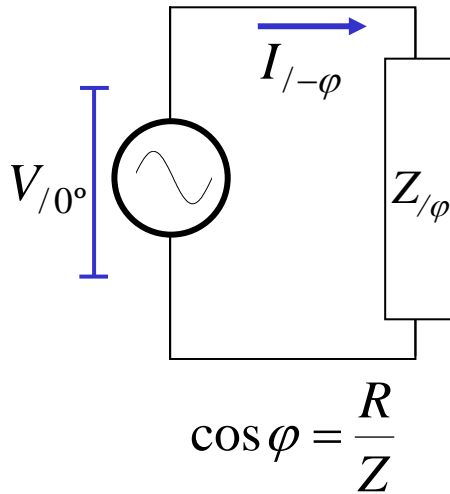
$$P_{\text{promedio}} = \frac{1}{2} V_m I_m \cos \varphi = V_{\text{eficaz}} I_{\text{eficaz}} \cos \varphi$$

Factor de potencia

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z}$$

$$V_{\text{eficaz}} = I_{\text{eficaz}} \cdot Z$$

POTENCIA COMPLEJA



$$S = V \cdot I^* = V_{/0^\circ} \cdot (I_{/-\varphi})^* = V_{/0^\circ} \cdot I_{/\varphi}$$

$$S = V_{eficaz} \cdot I_{eficaz} (\cos \varphi + j \operatorname{sen} \varphi)$$

Potencia aparente (V·A)

$$|S| = V_{eficaz} \cdot I_{eficaz} = I_{eficaz}^2 \cdot Z$$

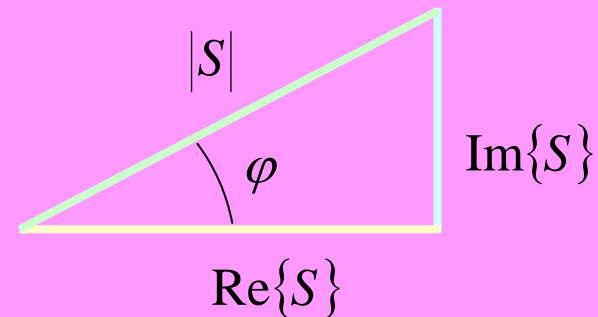
Potencia activa (W)

$$\operatorname{Re}\{S\} = P = V_{eficaz} \cdot I_{eficaz} \cdot \cos \varphi$$

Potencia reactiva (VAR)

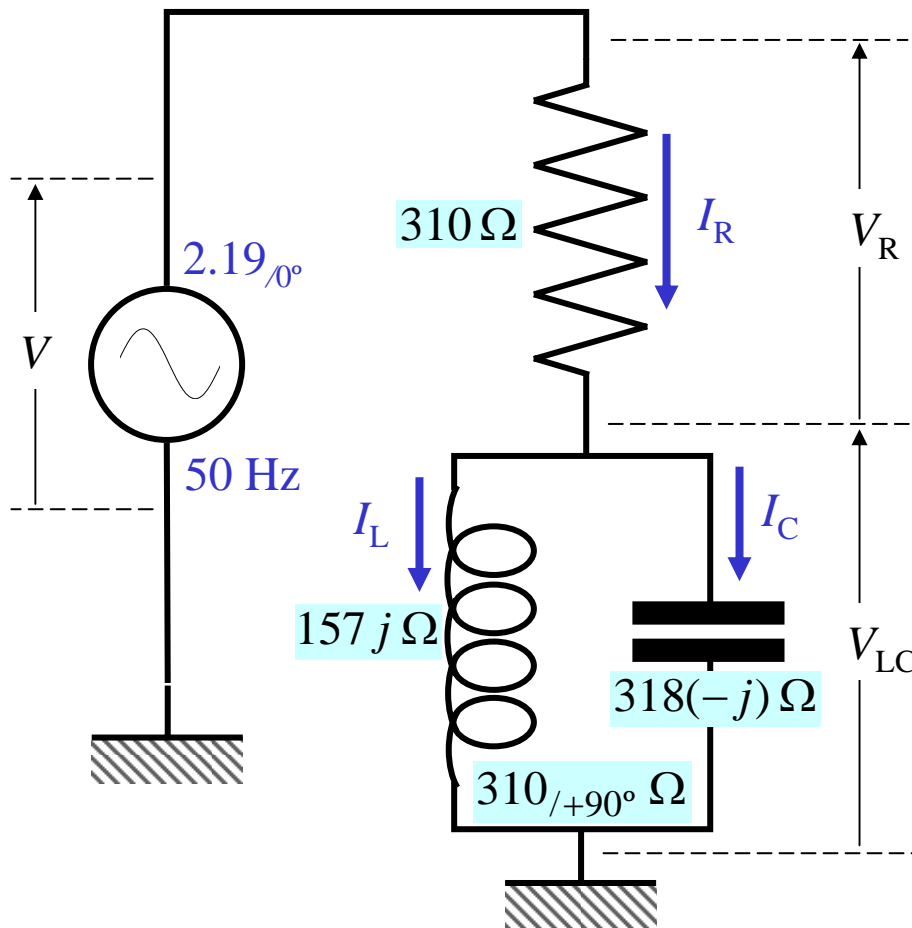
$$\operatorname{Im}\{S\} = Q = V_{eficaz} \cdot I_{eficaz} \cdot \operatorname{sen} \varphi$$

TRIÁNGULO DE POTENCIAS



POTENCIA EN ALTERNA (EJEMPLO 4)

Determinése la potencia compleja, la potencia aparente, y los términos de potencia activa y reactiva en cada una de las impedancias del ejemplo 3.



Resultados ejemplo 3

$$V_R = \frac{R}{Z} V = 1.55_{/-45^\circ} \text{ V}$$

$$V_{LC} = \frac{Z_P}{Z} V = 1.55_{/+45^\circ} \text{ V}$$

$$I_R = \frac{V}{Z} = 5 \cdot 10^{-3}_{/-45^\circ} \text{ A}$$

$$I_L = \frac{Z}{Z_L} I_R = 9.87 \cdot 10^{-3}_{/-45^\circ} \text{ A}$$

$$I_C = \frac{Z}{Z_C} I_R = 4.87 \cdot 10^{-3}_{/+135^\circ} \text{ A}$$

POTENCIA EN ALTERNA (EJEMPLO 4 CONTINUACIÓN)

Resistencia: potencia compleja

$$S_R = V_R \cdot I_R^* = 1.55_{-45^\circ} \cdot 5 \cdot 10^{-3}_{+45^\circ}$$

$$S_R = 7.75 \cdot 10^{-3}_{/0^\circ}$$

Potencia aparente:
módulo de la potencia compleja

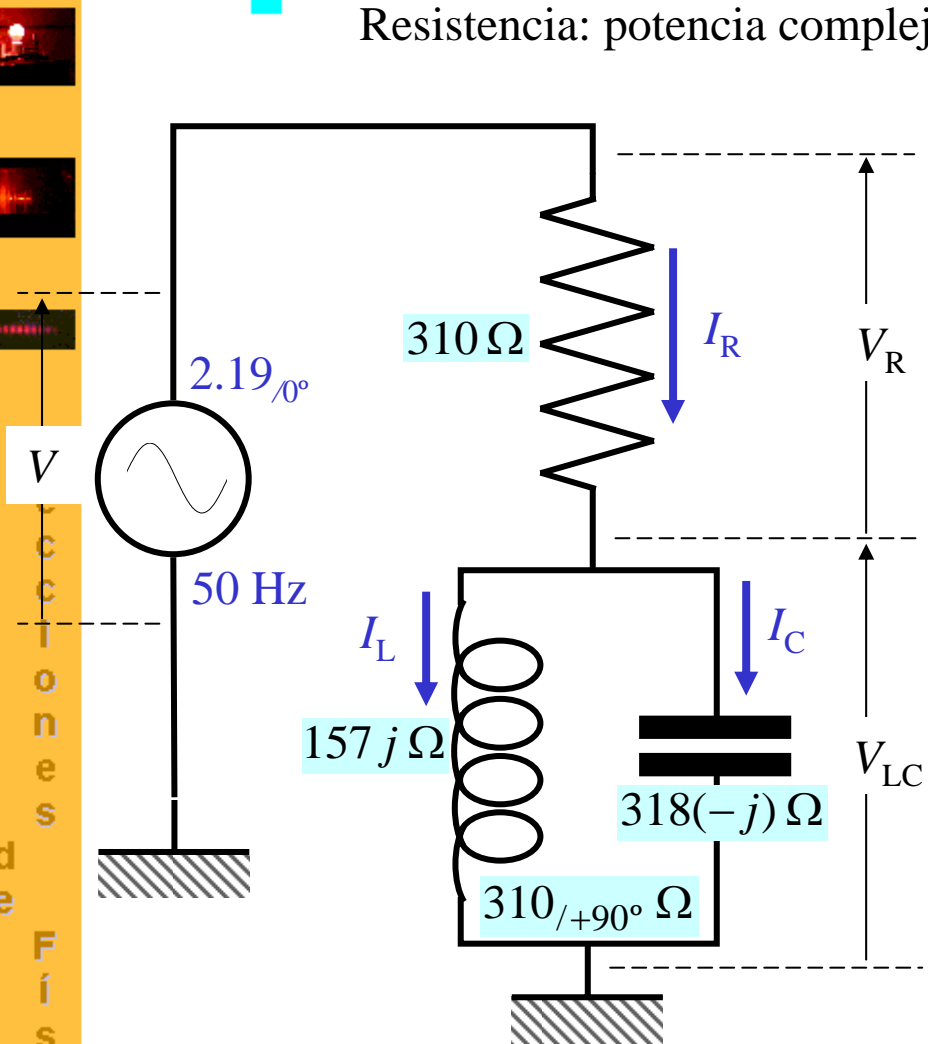
$$|S_R| = 7.75 \cdot 10^{-3} \text{ V} \cdot \text{A}$$

Potencia activa:
parte real de la potencia compleja

$$P_R = 7.75 \cdot 10^{-3} \cdot \cos 0^\circ = 7.75 \cdot 10^{-3} \text{ w}$$

Potencia reactiva:
parte imaginaria de la potencia compleja

$$Q_R = 7.75 \cdot 10^{-3} \cdot \text{sen } 0^\circ = 0$$



POTENCIA EN ALTERNA (EJEMPLO 4 CONTINUACIÓN 2)

Inductancia: potencia compleja

$$S_L = V_L \cdot I_L^* = 1.55_{/+45^\circ} \cdot 9.87 \cdot 10^{-3}_{/+45^\circ}$$

$$S_L = 15.30 \cdot 10^{-3}_{/+90^\circ}$$

Potencia aparente:
módulo de la potencia compleja

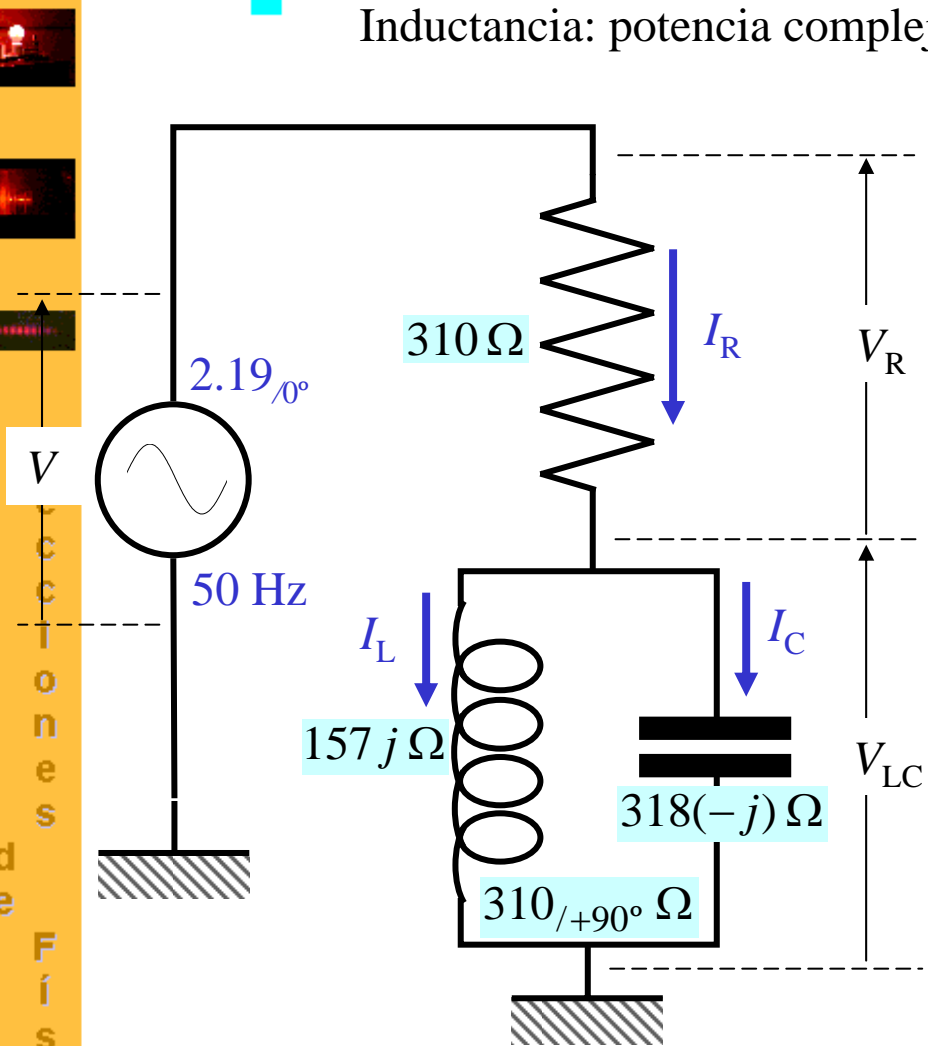
$$|S_L| = 15.30 \cdot 10^{-3} \text{ V} \cdot \text{A}$$

Potencia activa:
parte real de la potencia compleja

$$P_L = 15.30 \cdot 10^{-3} \cdot \cos 90^\circ = 0$$

Potencia reactiva:
parte imaginaria de la potencia compleja

$$Q_L = 15.30 \cdot 10^{-3} \cdot \sin 90^\circ = 15.30 \cdot 10^{-3} \text{ VAR}$$



POTENCIA EN ALTERNA (EJEMPLO 4 CONTINUACIÓN 3)

Condensador: potencia compleja $S_C = V_C \cdot I_C^* = 1.55_{/+45^\circ} \cdot 4.87 \cdot 10^{-3}_{/-135^\circ}$

$$S_C = 7.55 \cdot 10^{-3}_{/-90^\circ}$$

Potencia aparente:
módulo de la potencia compleja

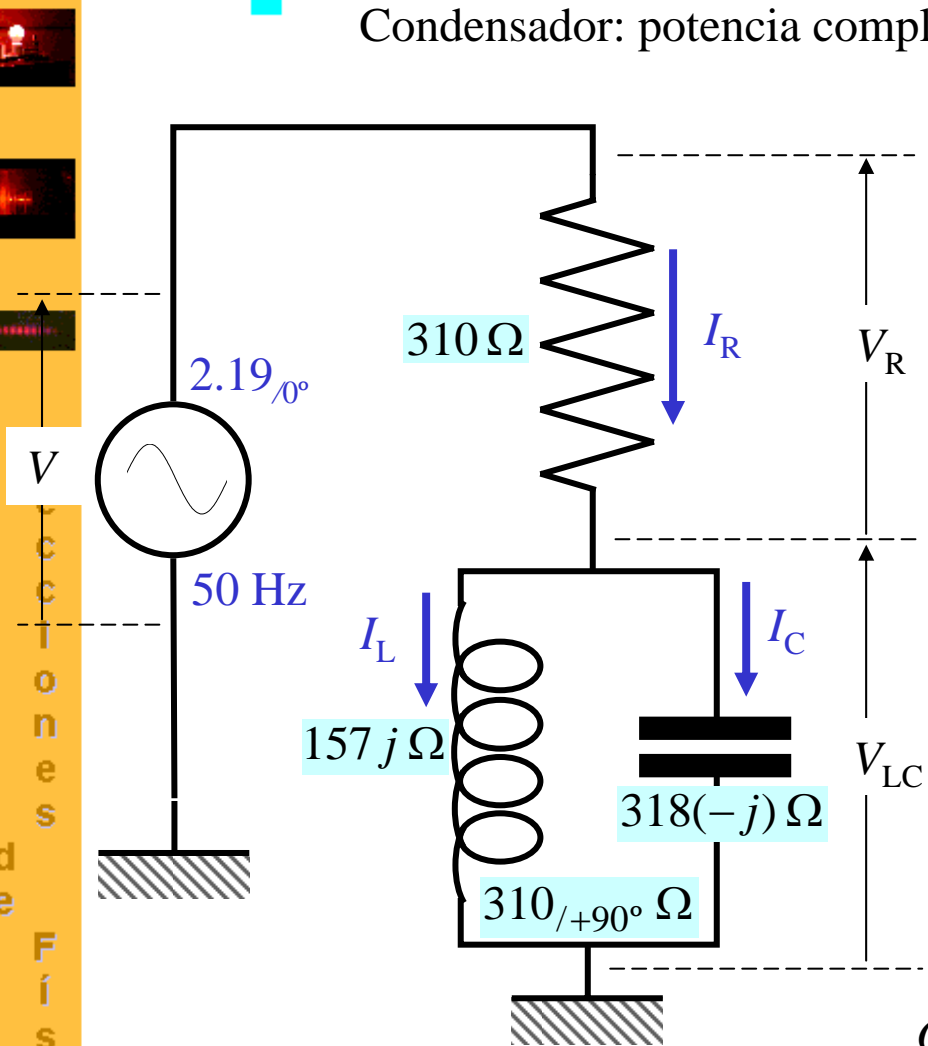
$$|S_C| = 7.55 \cdot 10^{-3} \text{ V} \cdot \text{A}$$

Potencia activa:
parte real de la potencia compleja

$$P_C = 7.55 \cdot 10^{-3} \cdot \cos(-90^\circ) = 0$$

Potencia reactiva:
parte imaginaria de la potencia compleja

$$Q_C = 7.55 \cdot 10^{-3} \cdot \text{sen}(-90^\circ) = -7.55 \cdot 10^{-3} \text{ VAR}$$



POTENCIA EN ALTERNA (EJEMPLO 4 CONTINUACIÓN 4)

Impedancia paralelo LC: potencia compleja $S_{LC} = V_{LC} \cdot I_R^* = 1.55_{/+45^\circ} \cdot 5 \cdot 10^{-3}_{/+45^\circ}$

$$S_{LC} = 7.75 \cdot 10^{-3}_{/+90^\circ}$$

Potencia aparente:
módulo de la potencia compleja

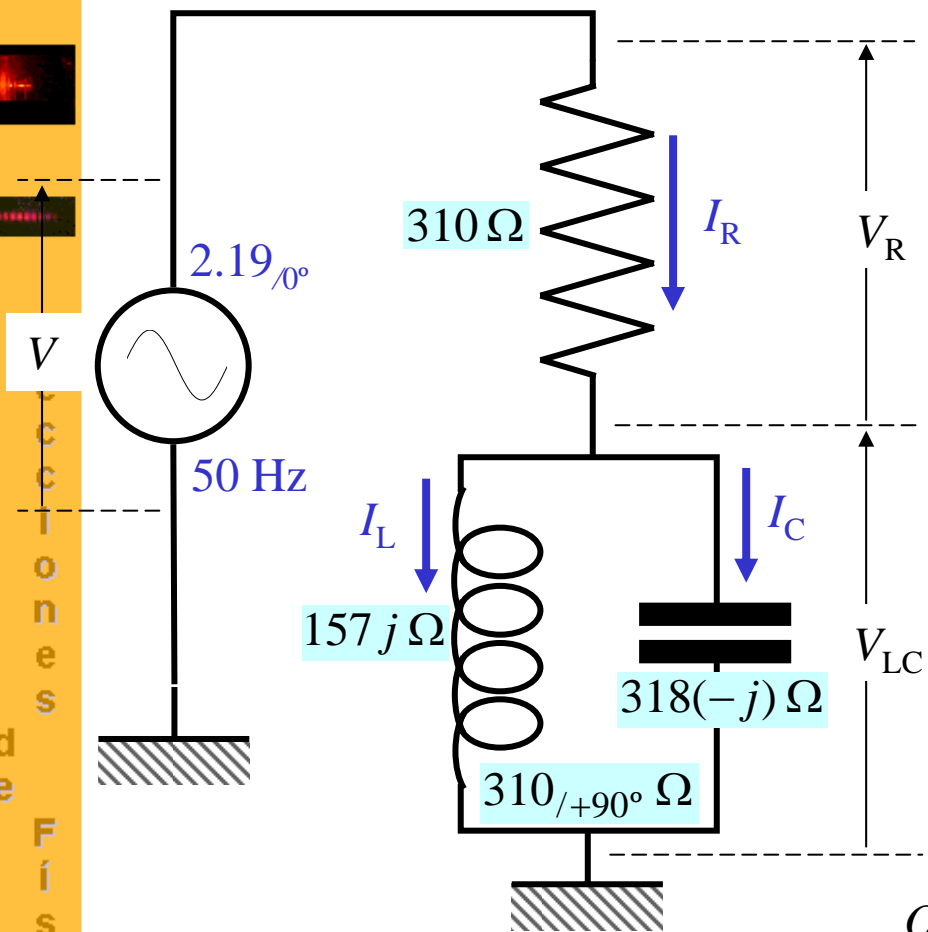
$$|S_{LC}| = 7.75 \cdot 10^{-3} \text{ V} \cdot \text{A}$$

Potencia activa:
parte real de la potencia compleja

$$P_{LC} = 7.75 \cdot 10^{-3} \cdot \cos(+90^\circ) = 0$$

Potencia reactiva:
parte imaginaria de la potencia compleja

$$Q_{LC} = 7.75 \cdot 10^{-3} \cdot \text{sen}(+90^\circ) = 7.75 \cdot 10^{-3} \text{ VAR}$$



POTENCIA EN ALTERNA (EJEMPLO 4 CONTINUACIÓN 5)

Impedancia Z del circuito: potencia compleja

$$S_Z = V_Z \cdot I_R^* = 2.19_{/0^\circ} \cdot 5 \cdot 10^{-3}_{/+45^\circ}$$

$$S_Z = 10.95 \cdot 10^{-3}_{/+45^\circ}$$

Potencia aparente:
módulo de la potencia compleja

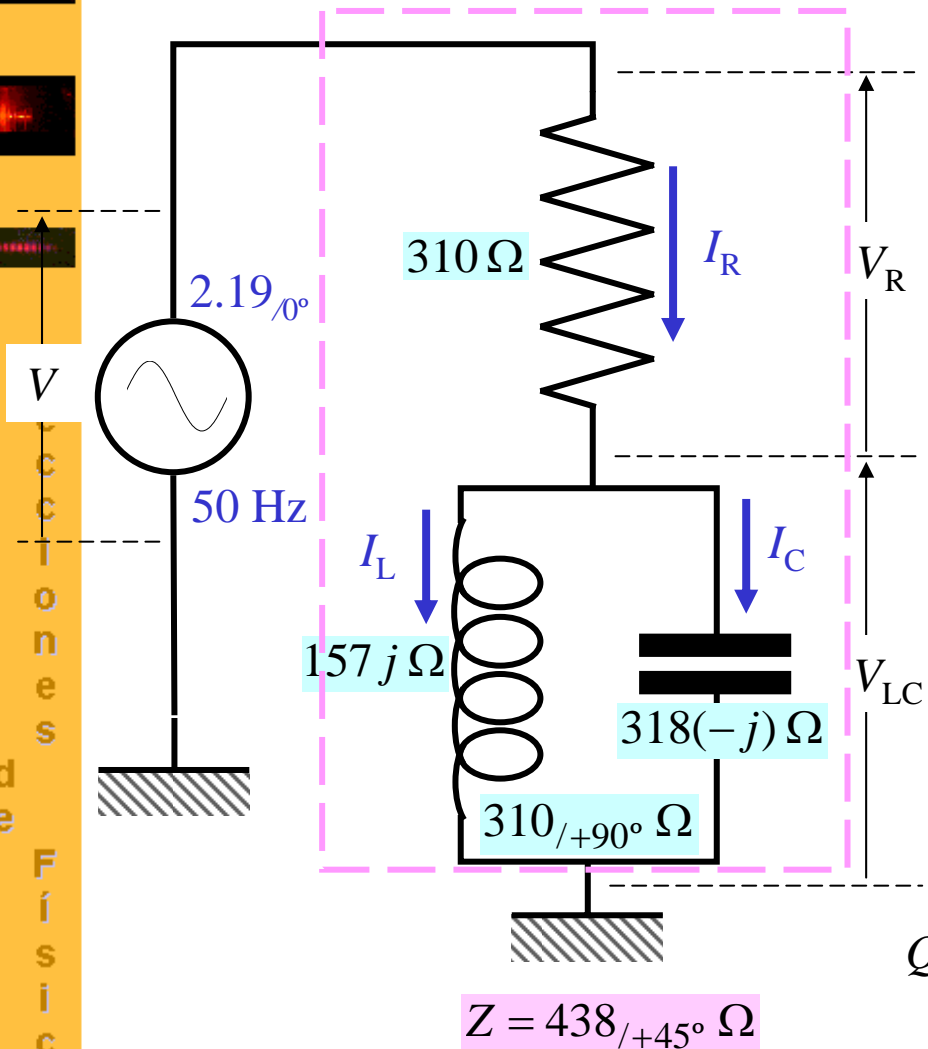
$$|S_Z| = 10.95 \cdot 10^{-3} \text{ V} \cdot \text{A}$$

Potencia activa:
parte real de la potencia compleja

$$P_Z = 10.95 \cdot 10^{-3} \cdot \cos(+45^\circ) = 7.75 \cdot 10^{-3} \text{ w}$$

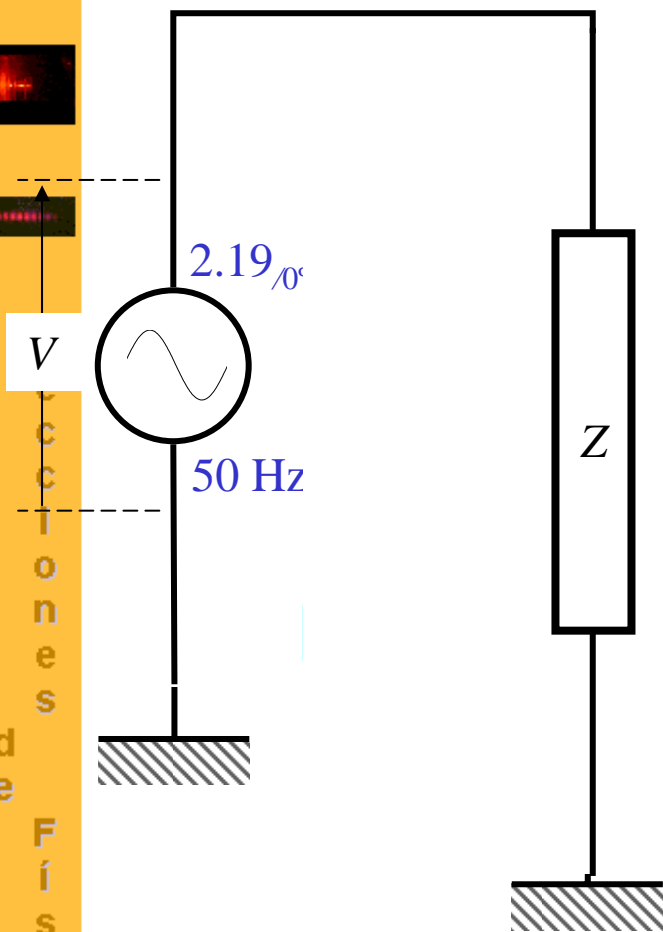
Potencia reactiva:
parte imaginaria de la potencia compleja

$$Q_Z = 10.95 \cdot 10^{-3} \cdot \text{sen}(+45^\circ) = 7.75 \cdot 10^{-3} \text{ VAR}$$

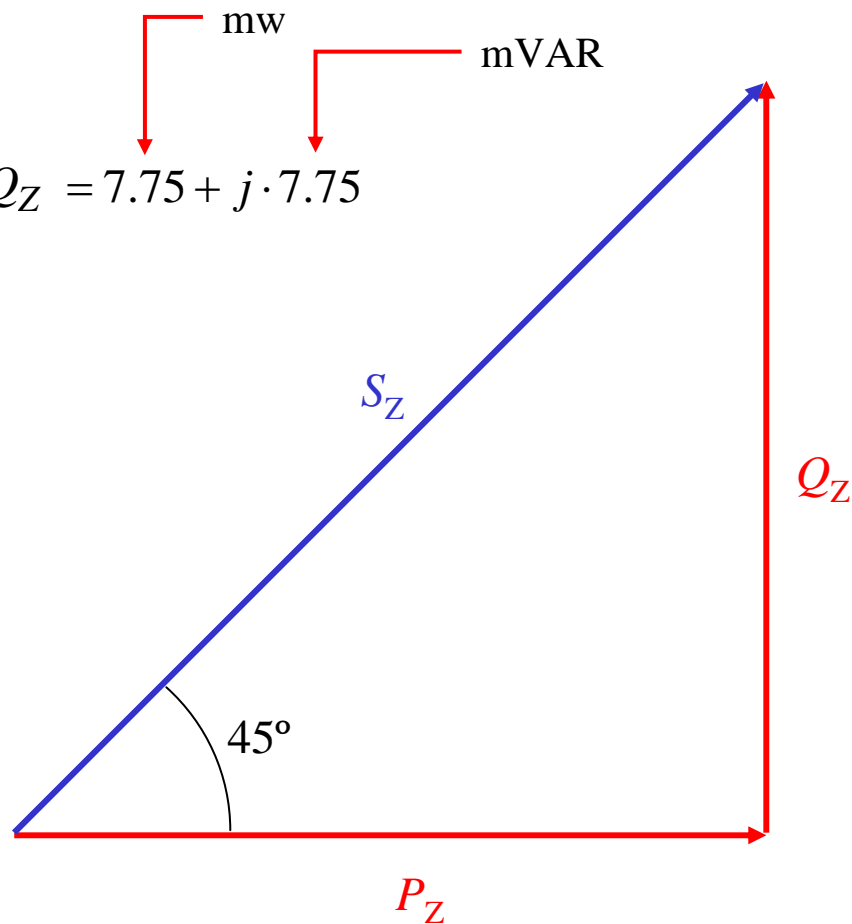


POTENCIA EN ALTERNA (EJEMPLO 4 CONTINUACIÓN 6)

Triángulo de potencias (impedancia Z)



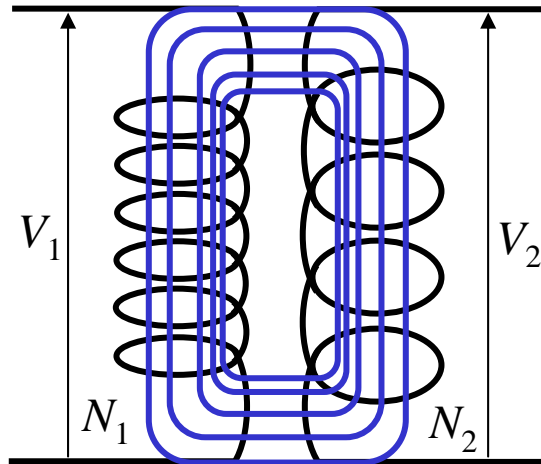
$$S_Z = P_Z + jQ_Z = 7.75 + j \cdot 7.75$$



TRANSFORMADORES

Un transformador es un conjunto de bobinados que comparten el mismo flujo magnético.

El paso de AC por uno de ellos produce en cambio de flujo magnético, el cual a su vez origina un cambio de voltaje en el resto.

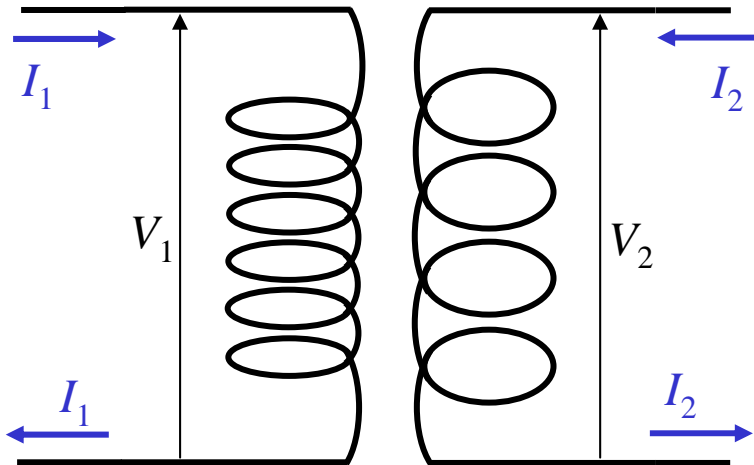


Para mantener el campo magnético confinado en los bobinados, éstos se arrollan sobre un núcleo ferromagnético

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= -N_1 \frac{d\Phi}{dt} \\ V_2 &= -N_2 \frac{d\Phi}{dt} \end{aligned} \right\} \frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2}$$

Usando una relación apropiada $\frac{N_1}{N_2}$ puede elevarse o disminuirse el voltaje

TRANSFORMADORES (II)



$$POTENCIA = I \cdot V \cdot \cos \varphi$$

$$I_1 \cdot V_1 = I_2 \cdot V_2$$

A diferencias de potencial bajas corresponden altas intensidades, y viceversa

Para el transporte de corriente conviene que la intensidad sea lo más baja posible (disminución de pérdidas por efecto Joule)

BIBLIOGRAFÍA



Joseph A. Edminister. *Circuitos eléctricos. Teoría y 391 problemas resueltos* (2ª edición). Serie Schaum. Editorial McGraw-Hill.

William H. Hayt, Jr y Jack E. Kemmerly. *Análisis de circuitos en ingeniería*. Editorial McGraw-Hill.

http://www.wfu.edu/~ucerkb/Phy114/Lecture_11_AC_Circuits.ppt