

Mecánica del Sólido Rígido

Cinemática, Dinámica y Estática

1.- Introducción

2.- Cinemática. Tipos de movimiento del sólido:

Traslación,

Rotación

Movimiento Plano General

Movimiento General

3.- Cinética. Fuerzas y aceleraciones. Energía y cantidad de movimiento.

Momento Angular y Momento de Inercia

Ecuaciones Fundamentales de la Dinámica

4.- Estática. Equilibrio.

Mecánica del Sólido Rígido

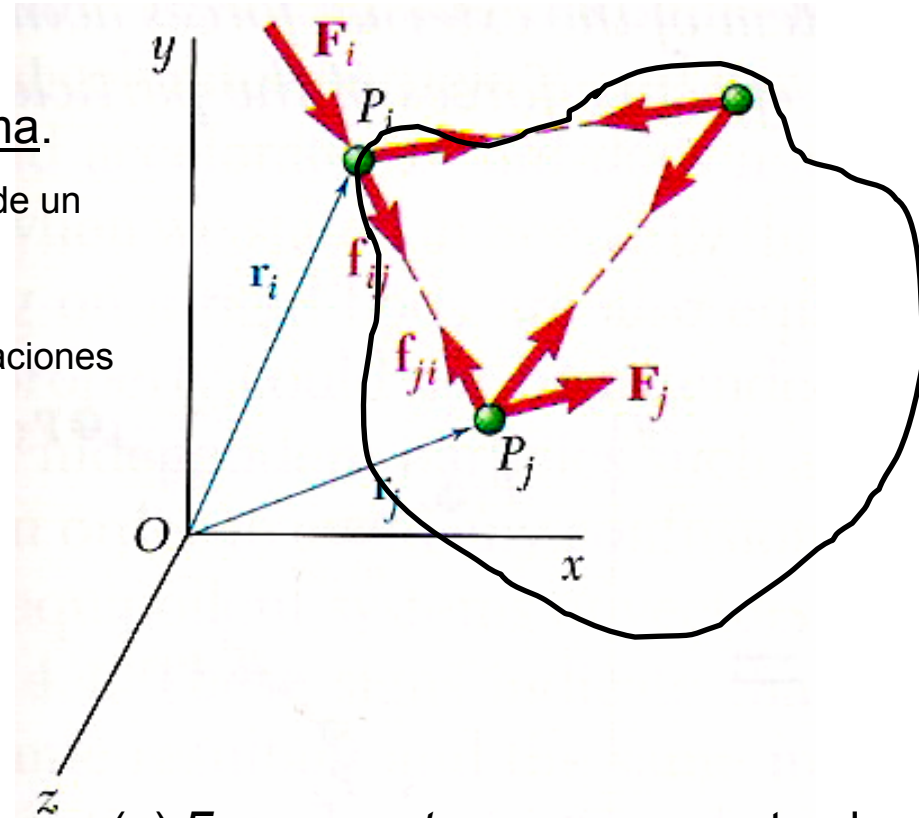
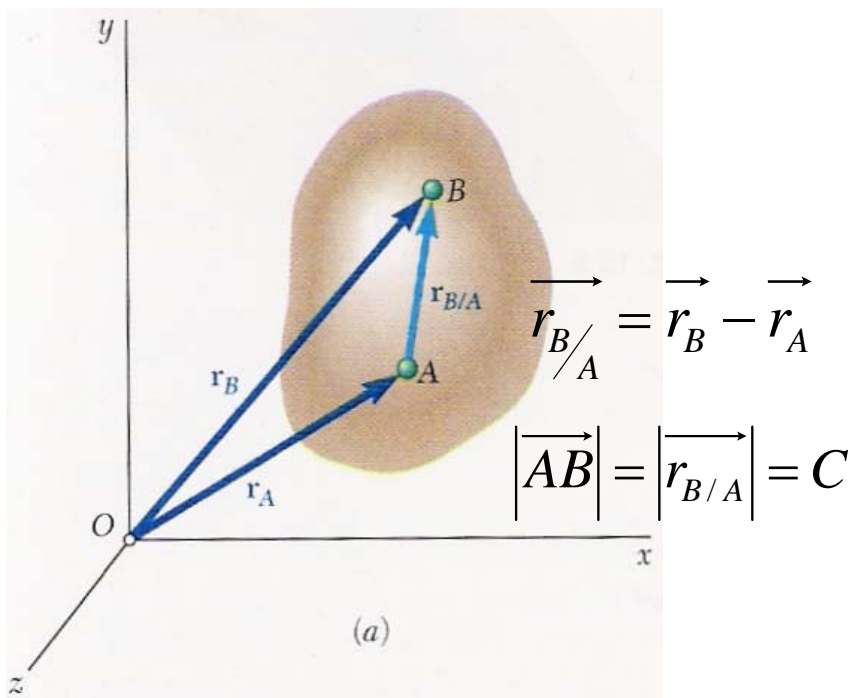
Introducción. El **Sólido Rígido** como un sistema de partículas especial

Sistema de Partículas. Fuerzas Internas y Externas

Sólido Rígido: Se define como aquel sistema de partículas que no se deforma.

Esto es, si A y B son dos partículas cualesquiera de un sólido rígido, entonces la distancia entre A y B permanecerá sin cambios.

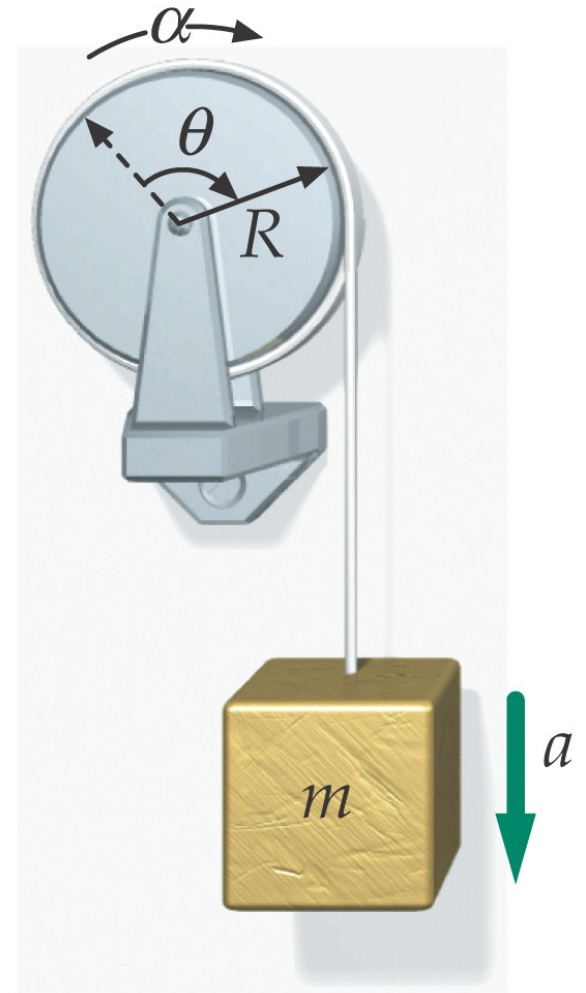
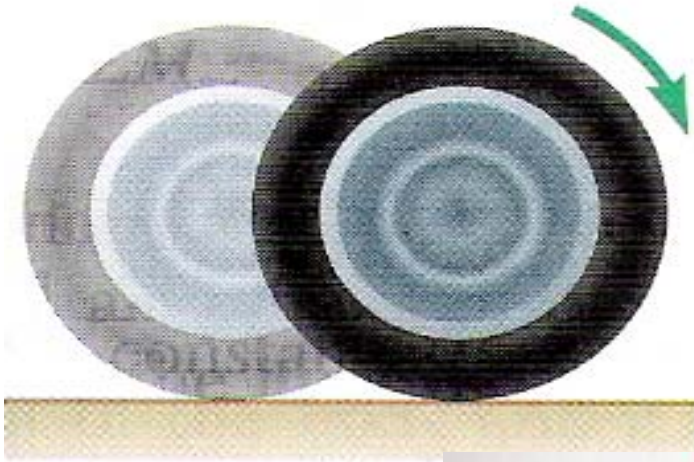
Los límites de esta hipótesis son aquellas deformaciones debidas a la elasticidad y a la rotura del cuerpo.



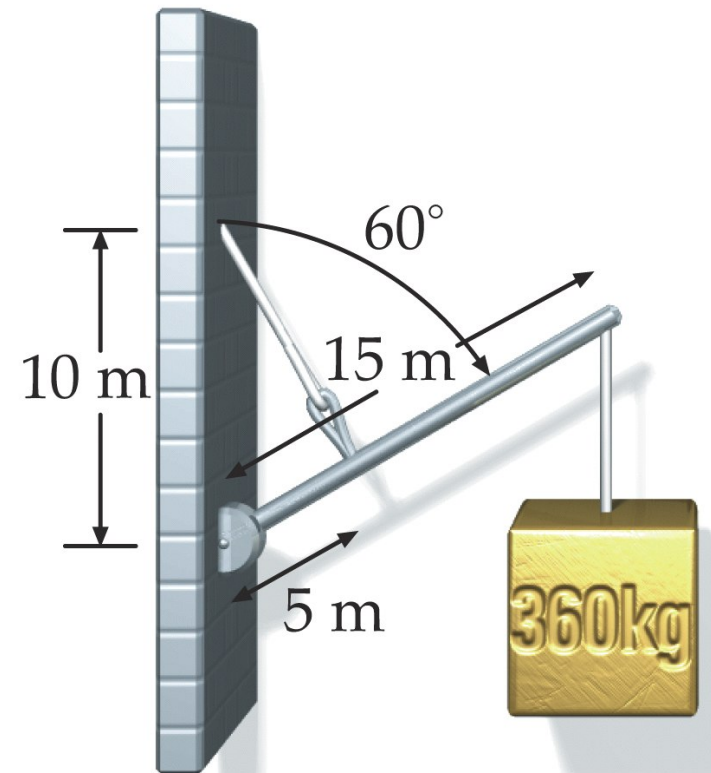
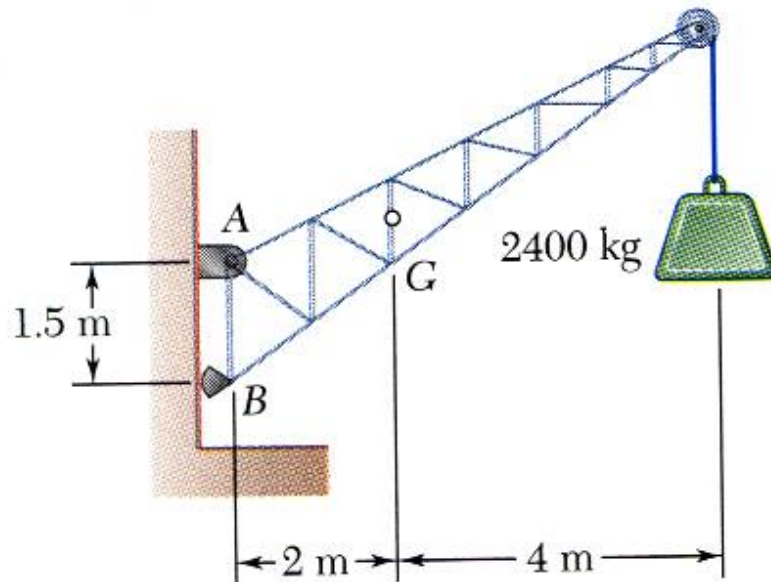
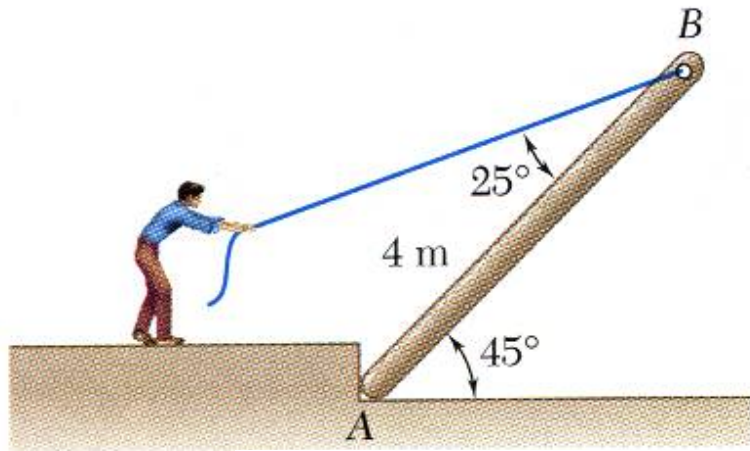
(a) Fuerzas externas, representan la acción de otros cuerpos sobre el que consideramos

(b) Fuerzas internas son las fuerzas que “sujetan” juntas las partículas que forman el sólido rígido.

Introducción: Cinemática y Dinámica



Introducción: Estática, Equilibrio.



Mecánica del Sólido Rígido

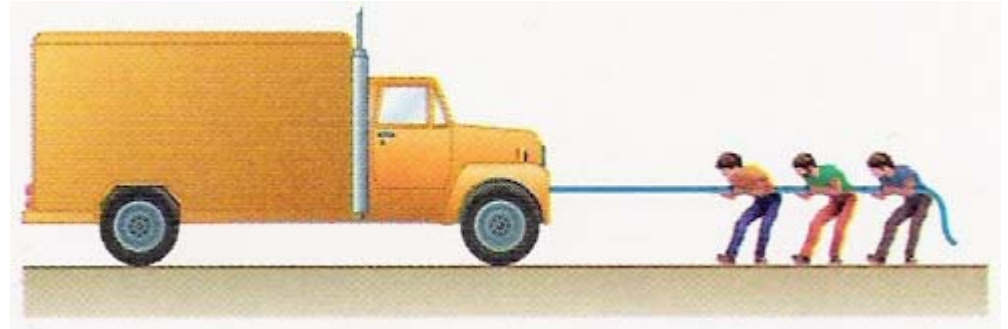
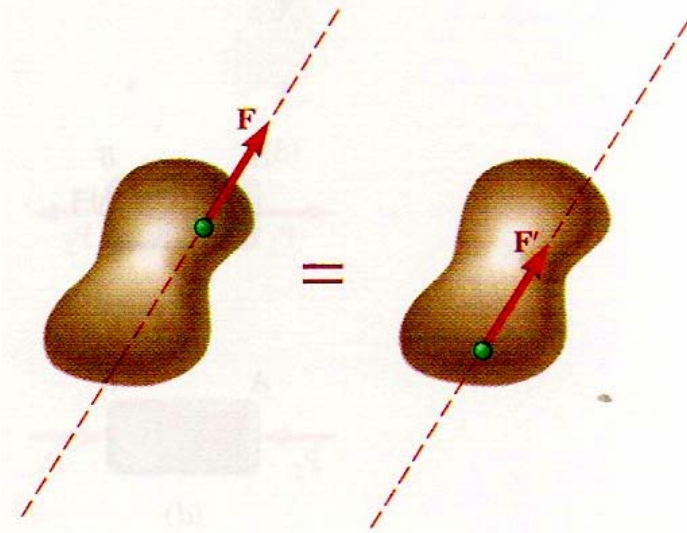
1.- Introducción: Fuerzas que actúan en un sólido rígido :

- (a) Fuerzas externas, representan la acción de otros cuerpos sobre el que consideramos
(b) Fuerzas internas son las fuerzas que “sujetan” juntas las partículas que forman el sólido rígido.

Consideraciones básicas (se demostrarán posteriormente usando Leyes de Newton)

-Solo la acción de fuerzas externas sobre un sólido rígido puede producir cambio en el movimiento de traslación, rotación o ambos.

-*Principio de transmisibilidad*: El efecto de una fuerza externa en un sólido rígido es exactamente el mismo cuando la fuerza se ejerce a lo largo de su línea de acción. Necesitaremos introducir el concepto matemático de momento de una fuerza (torque) para expresar matemáticamente este principio

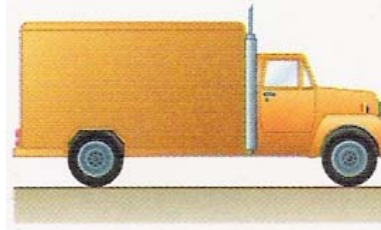
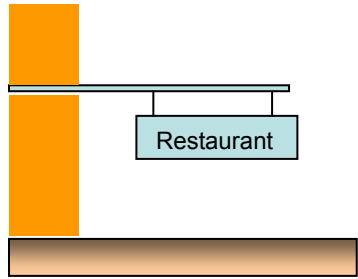


La acción de fuerza que ejerce la cuerda sobre el camión cuando los hombres tiren de ella ¿sería la misma si empujaran con la misma fuerza en la trasera del camión en un punto situado a lo largo de la línea marcada por la cuerda?

Mechanics of Rigid Body

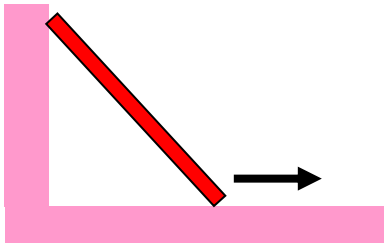
Diagramas de sólido libre:

Showing all the forces acting on the body
Reactions at supports and connections



Exercise: Free-Body Diagram on the front wheel and on the rear wheel (a) constant speed (b) accelerating (c) Acting brakes

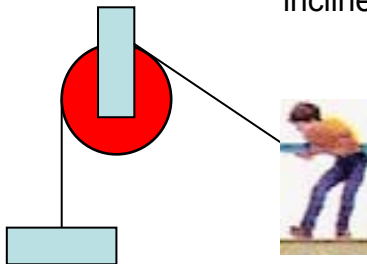
Exercise: Free-Body Diagram on the rod (beam) embedded in the wall



Exercise: Free-Body Diagram on the sliding stair with friction in supporting points



Keeping Constant Speed over a incline with angle α



Support or Connection	Reaction	Number of Unknowns
 Rollers Rocker Frictionless surface	 Force with known line of action	1
 Short cable Short link	 Force with known line of action	1
 Collar on frictionless rod Frictionless pin in slot	 Force with known line of action	1
 Frictionless pin or hinge Rough surface	 Force of unknown direction	2
 Fixed support	 Force and couple	3

Introducción. Centro de Masa (Centro de gravedad) de un sistema de partículas: Concept. Static and Dynamic properties

The center of mass of a system of particles (Rigid Body is a particular case) is the point of the space where the system of gravitational forces formed by all elementary gravitational forces acting on each elementary particle ($dm g$), is equivalent to one force (mg) placed there. The potential energy of a system of particles is simply mgy , where y is the height of center of mass. This concept provides a method to find the center of mass of a body.

The center of mass moves like a particle of mass $m = \sum m_i$ under the influence of the external forces acting on the system.

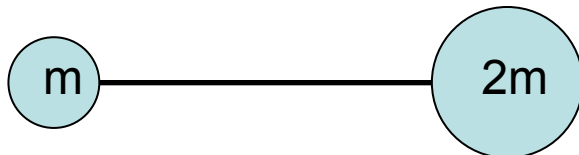
$$\sum \vec{F}_{ext} = m \vec{a}_{CM} \quad \text{or} \quad m \vec{v}_{CM} = \sum_i m_i \vec{v}_i$$

To compute the point where is placed the center of mass

$$m \vec{r}_{CM} = \sum_i m_i \vec{r}_i \quad \text{or} \quad m \vec{r}_{CM} = \int \vec{r} dm$$

$$m x_{CM} = \sum_i m_i x_i; \quad m y_{CM} = \sum_i m_i y_i; \quad m z_{CM} = \sum_i m_i z_i$$

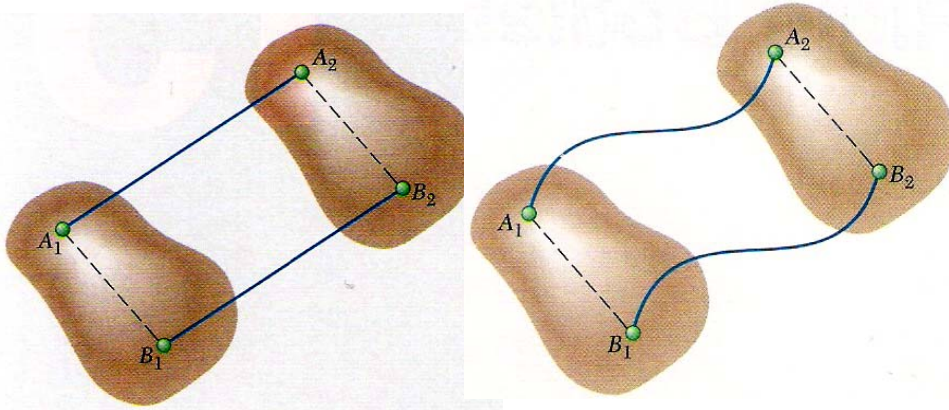
Find the center of mass (with “math” and without “math”)



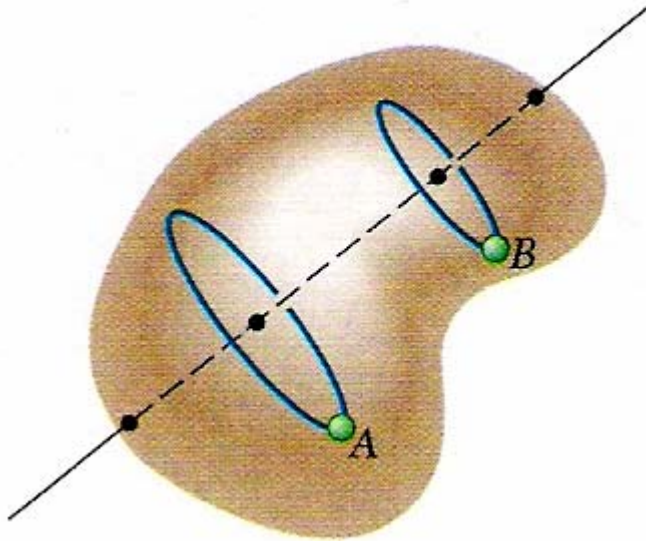
Cinemática del sólido rígido

1.- **CINEMÁTICA**: Tipos de movimiento:

TRASLACIÓN, ROTACIÓN alrededor de un eje fijo, MOVIMIENTO PLANO GENERAL, Movimiento alrededor de un punto fijo, MOVIMIENTO GENERAL

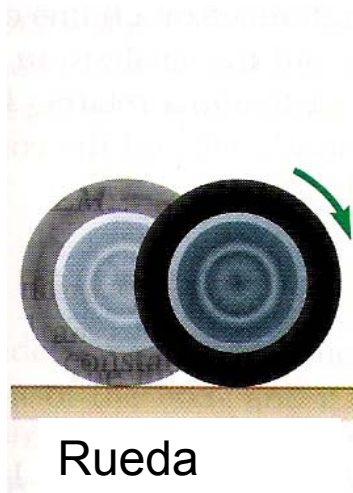


TRASLACIÓN. Se dice que un movimiento de un SR es de traslación si una línea recta cualquiera del cuerpo mantiene la misma dirección durante el movimiento, Todas las partículas que forman el cuerpo se mueven en trayectorias paralelas. Si estas trayectorias son líneas rectas, el movimiento es de **traslación rectilínea**. Si las trayectorias son líneas curvas, el movimiento es de **traslación curvilínea**.



ROTACIÓN alrededor de un eje fijo. Las partículas que forman el SR se mueven en planos paralelos a lo largo de círculo centrados en el eje de rotación fijo. En el caso en que el eje de rotación intersecta el SR, las partículas del eje tienen velocidad cero y aceleración cero.

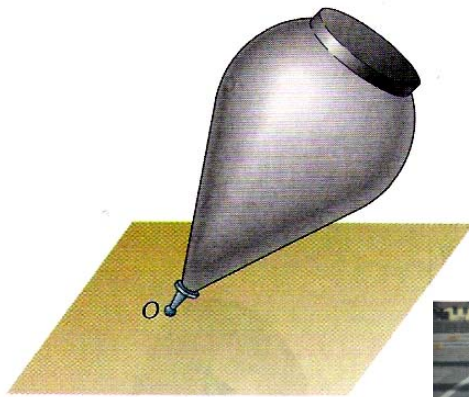
Ejercicio: Distinguir entre traslación curvilínea y rotación alrededor de un eje fijo



Rueda



Barra que desliza



Movimiento plano general.

Cualquier movimiento plano que no es de traslación o de rotación alrededor de un eje fijo.

Movimiento plano es aquel en el que las trayectorias de todas las partículas se mueven en planos paralelos. Traslación y rotación con movimientos planos..

Movimiento alrededor de un punto fijo.

Es el movimiento tridimensional de un cuerpo rígido alrededor de un punto fijo. Por ejemplo el movimiento de una peonza, cuando el punto de contacto con el suelo está fijo.

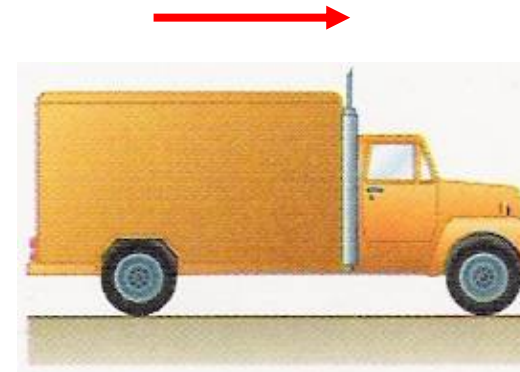
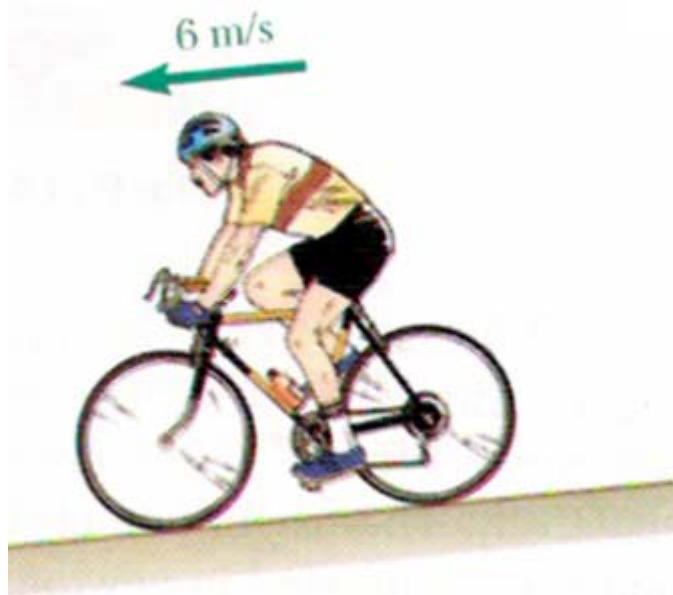
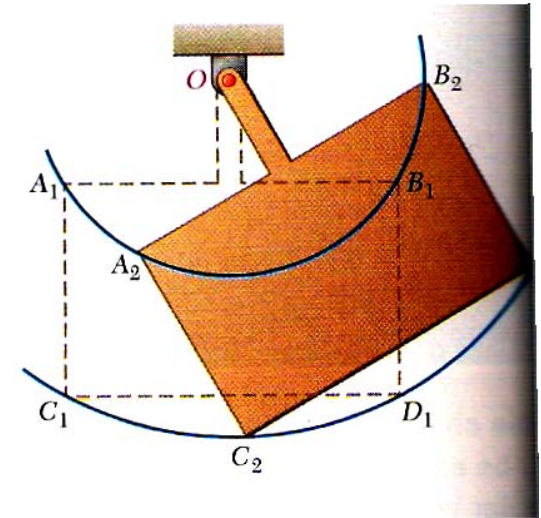
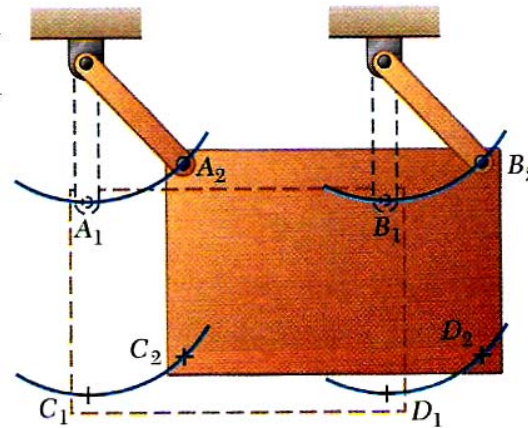
MOVIMIENTO GENERAL

Cualquier movimiento de un cuerpo que no se describe por alguna de las categorías anteriores.

Cinemática del sólido rígido

Ejercicio:

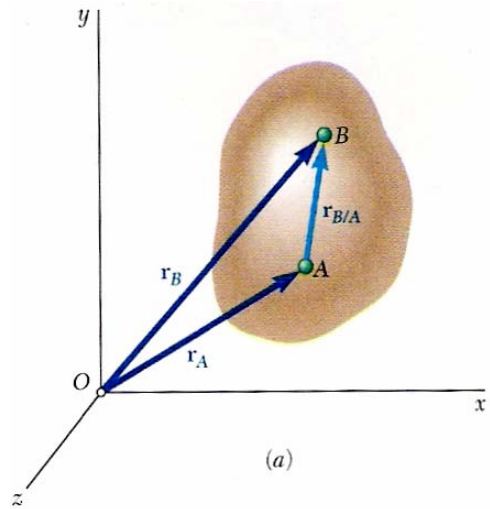
Describe los diferentes tipos de movimiento de los Sólidos Rígidos representados en las figuras



Cuestión: El movimiento de la Tierra considerada como un sólido rígido ¿de qué tipo es?

Cinemática del sólido rígido

TRASLACIÓN. Ecuaciones de la cinemática del movimiento



$$\vec{r}_{B/A} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$$

¿explicar por qué?

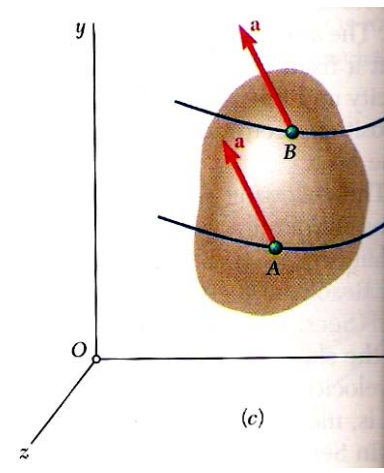
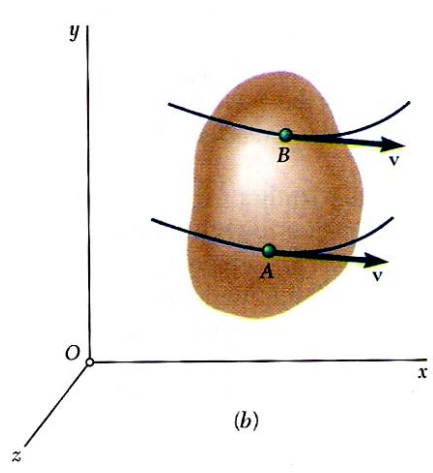
Para un movimiento en traslación el vector de posición del punto B respecto de A, cualesquiera sean esos puntos, será constante en magnitud y dirección,

Y POR TANTO ... $\vec{r}_{B/A}$ es cero

ASÍ PUES

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A$$



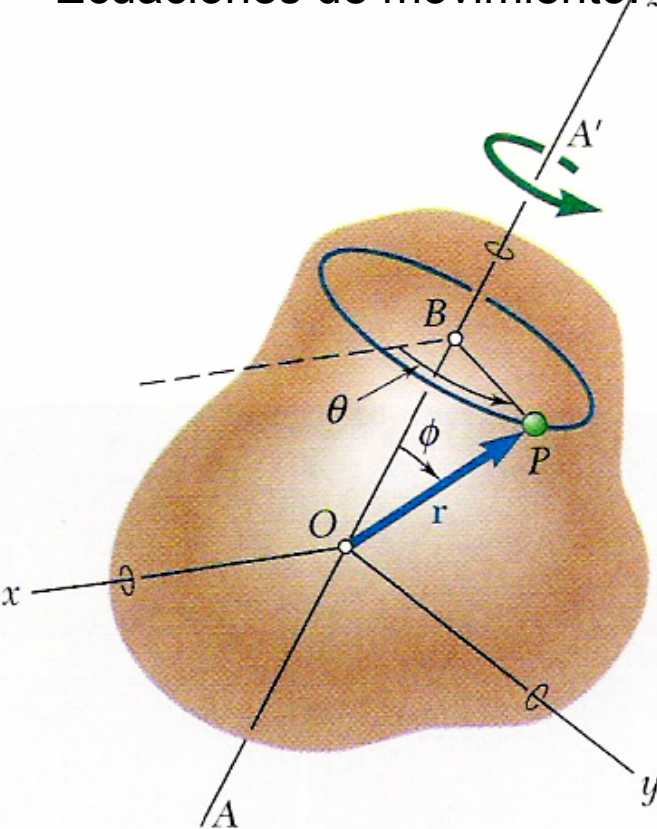
Conclusión: Un sólido rígido en traslación puede ser considerado como una sola partícula

Cuando un SR está en traslación todas las partículas tienen la misma velocidad. Y si existe aceleración todas las partículas tienen la misma aceleración

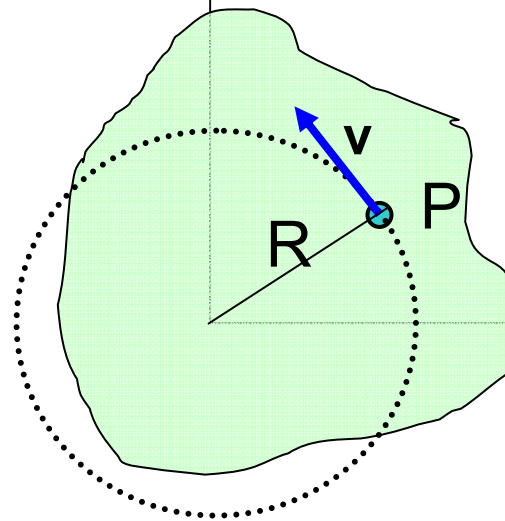
Cinemática del sólido rígido. ROTACIÓN

ROTACIÓN alrededor de un eje fijo.

Ecuaciones de movimiento: **Velocidad**



Placa representativa



Relaciones básicas en el movimiento circular

$$\text{arco} = \text{angulo} \times \text{radio}$$

$$ds = d\theta R$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d\theta}{dt} R$$

$$v = \omega R$$

!!!Ángulos en radianes!!!

Velocidad angular, ω
Aceleración angular α

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

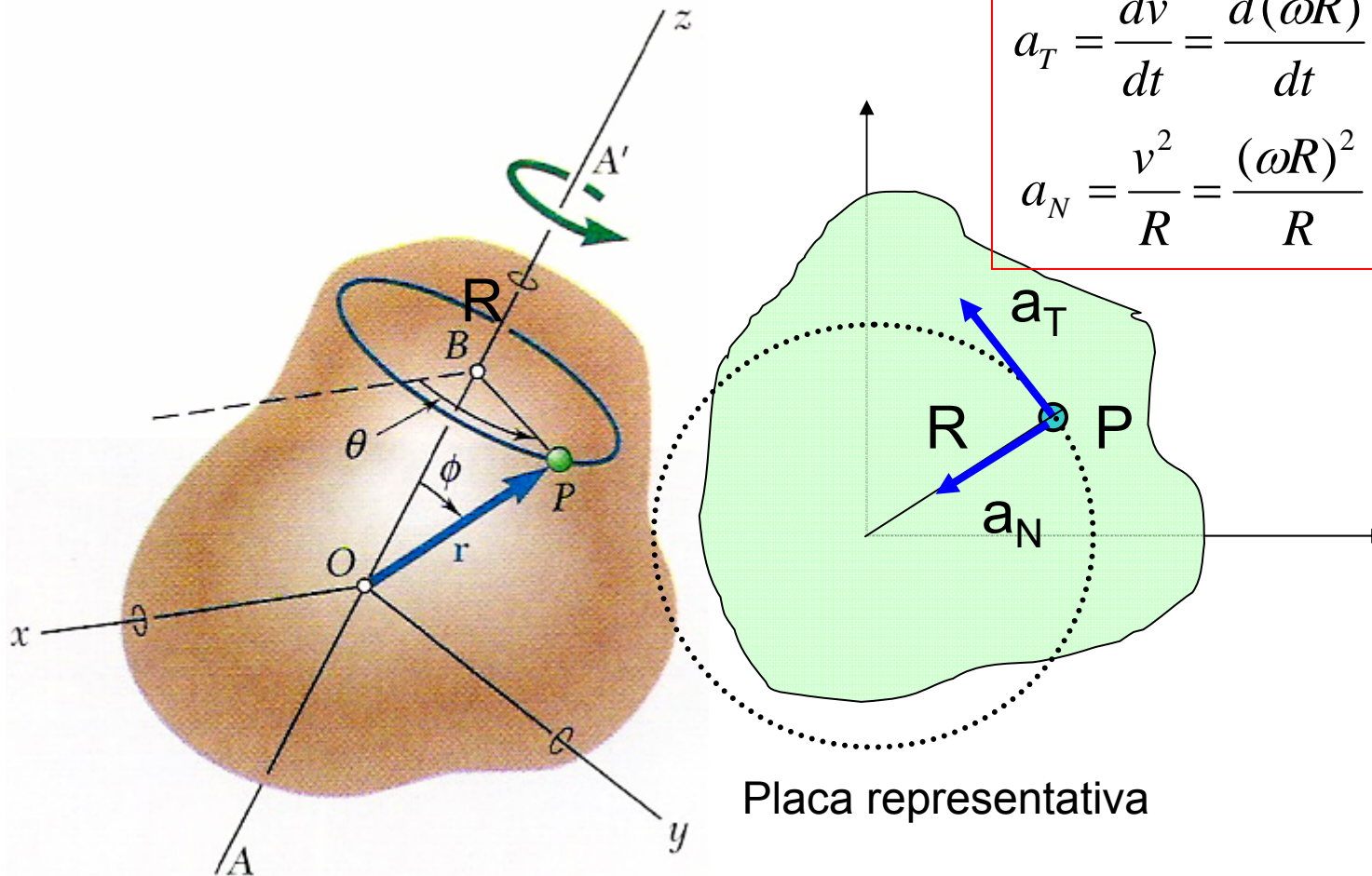
La velocidad y aceleración angulares son invariantes. Todas las partículas de un sólido tienen la misma velocidad angular. Todas las partículas de un sólido tienen la misma aceleración angular. Describen el movimiento de rotación del sólido

Ejercicio: Un CD que está rotando a 500 rev/min se escanea por un laser. Calcular la velocidad lineal (tangencial) del punto del disco sobre el que incide el láser, (a) cuando el radio es de 2.4 cm; (b) cuando el radio es de 6 cm.

ROTACIÓN alrededor de un eje fijo.

Ecuaciones del movimiento: **Aceleración**

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$



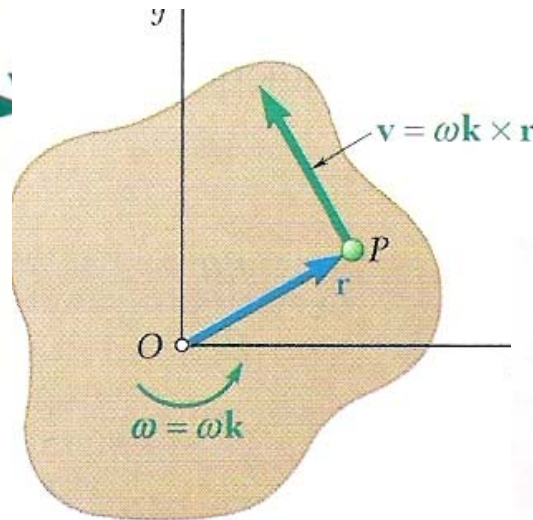
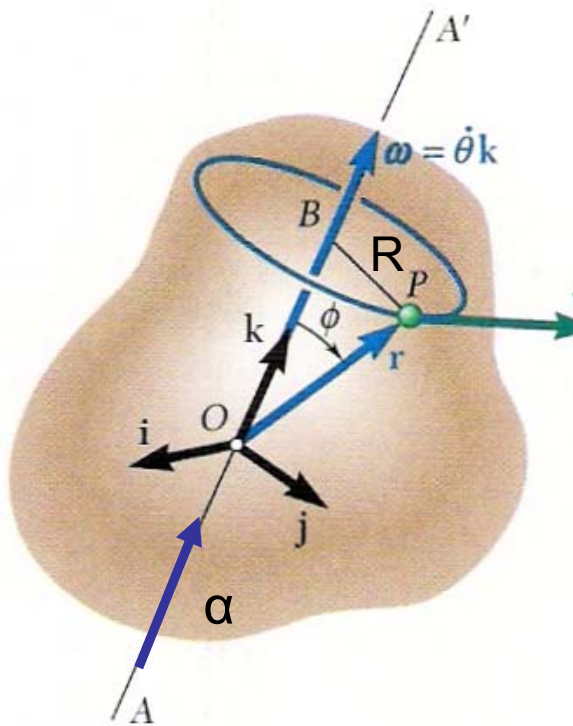
$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = \frac{d\omega}{dt} R = \alpha R$$

$$a_N = \frac{v^2}{R} = \frac{(\omega R)^2}{R} = \omega^2 R$$

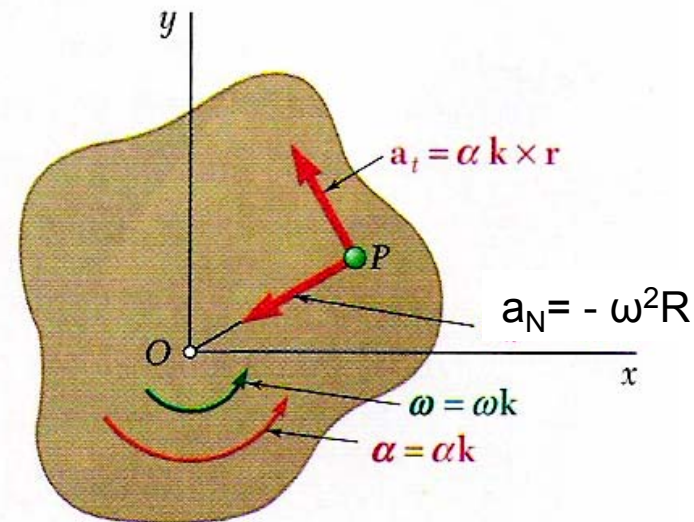
Ejercicio: Un CD que está rotando a 500 rev/min se escanea por un laser. Calcular la aceleración del punto del disco sobre el que incide el láser, (a) cuando el radio es de 2.4 cm; (b) cuando el radio es de 6 cm.

ROTACIÓN alrededor de un eje fijo. Ecuaciones vectoriales del movimiento

Expresiones vectoriales para la velocidad y aceleración



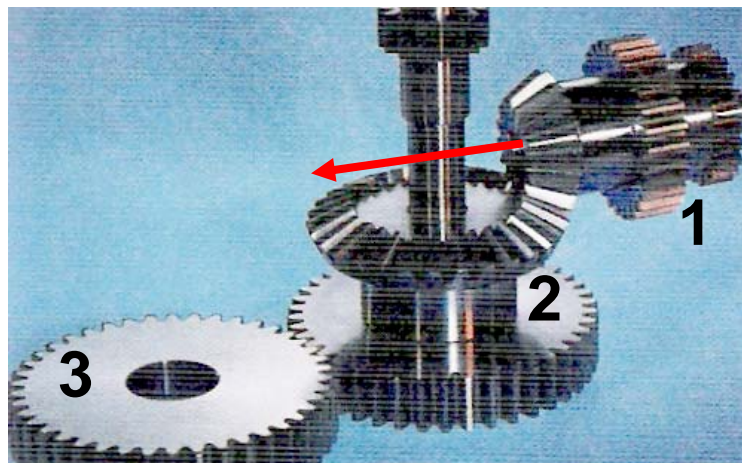
$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$



$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N = \vec{\alpha} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})$$

ROTACIÓN alrededor de un eje fijo. Mecanismos.

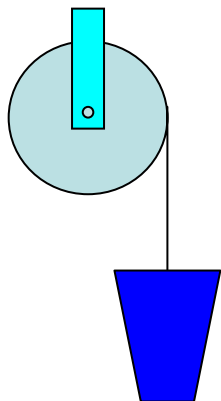
Mecanismos: Sólidos rígidos conectados



La flecha roja muestra la velocidad angular para el engranaje 1. Dibuja la velocidad angular de los engranajes 2 y 3. Calcula los valores que faltan en la tabla. $\omega_1 = 500$ rev/min; $R_1 = 2$ cm

$\omega_2 = ?$ rev/min; $R_2 = 5$ cm; $R'_2 = 10$ cm

$\omega_3 = ?$ rev/min; $R_4 = 10$ cm;



El cubo cae desde el reposo con una aceleración de $0.3 g$.
(a) Cual es su velocidad después de 5 segundos y qué distancia ha recorrido.
(b) Calcula la aceleración angular de la polea
(c) Con qué rapidez girará la polea después de 5 s de iniciado el movimiento.

Radio polea 10 cm

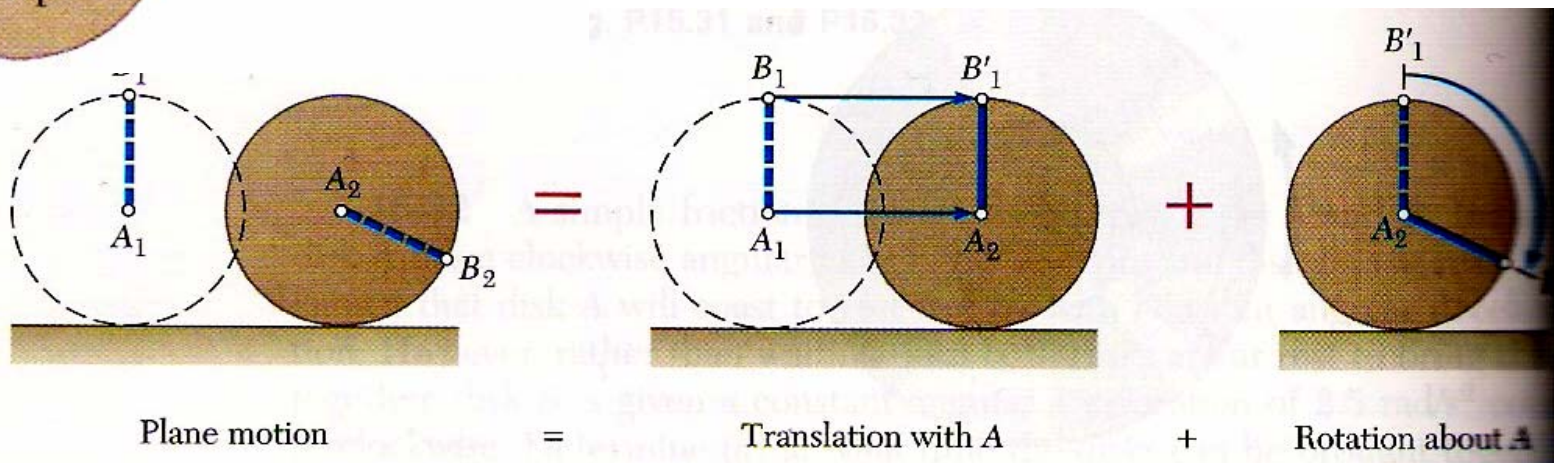
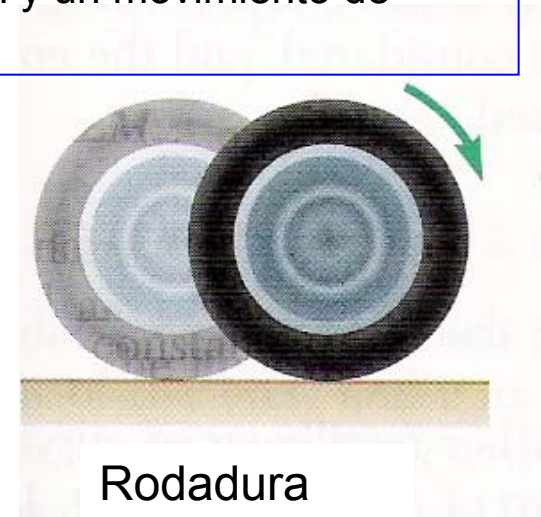
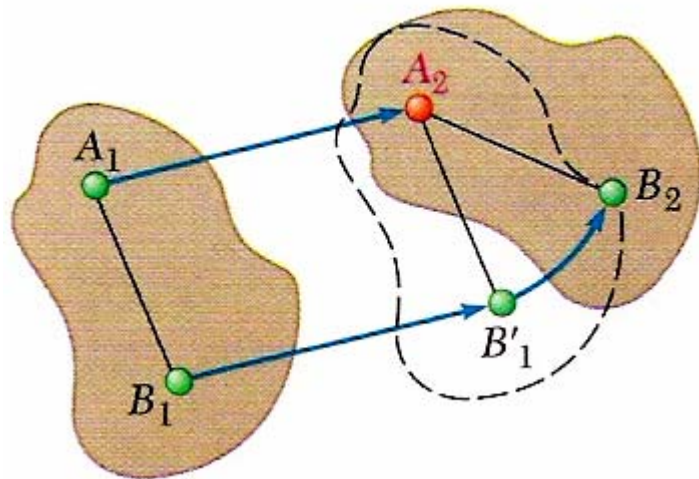


El engranaje 1 rota en el sentido de las agujas del reloj a una velocidad angular de 12 rad/s. ¿Con qué rapidez girarán los engranajes 2 y 3?
Datos: $R_1: 5$ cm;
 $R_2: 10$ cm; $R_3: 20$ cm.

Cinemática del sólido rígido. MOVIMIENTO PLANO GENERAL

MOVIMIENTO PLANO GENERAL. Cualquier movimiento plano que no es de traslación ni de rotación alrededor de un eje fijo

Teorema de Euler: Cualquier movimiento plano puede ser considerado como una composición simultánea de un movimiento de traslación y un movimiento de rotación

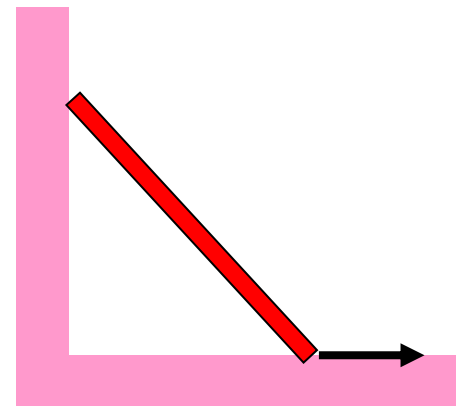


Cinemática del sólido rígido. MOVIMIENTO PLANO GENERAL

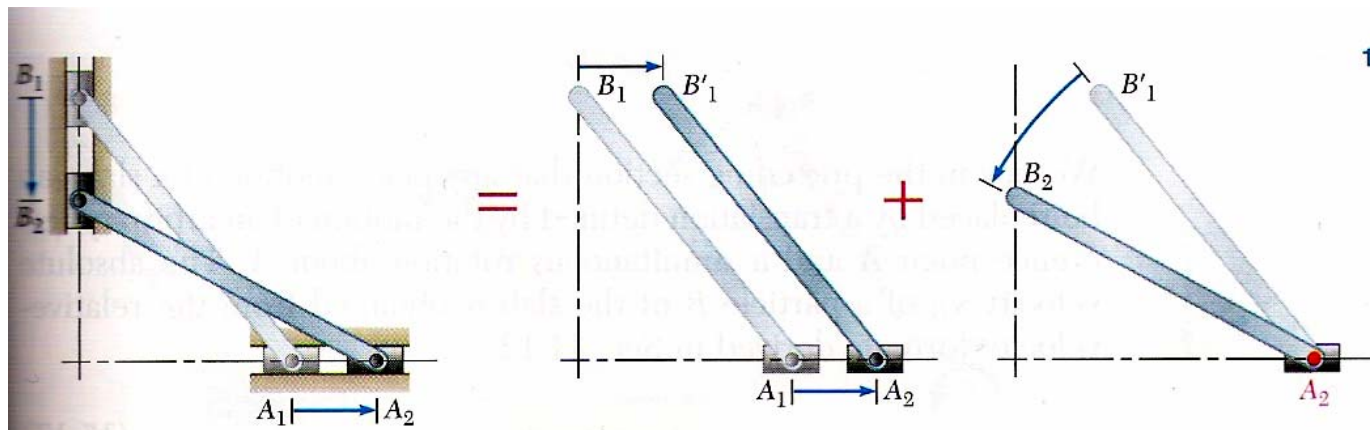
MOVIMIENTO PLANO GENERAL. Cualquier movimiento plano que no es de traslación ni de rotación alrededor de un eje fijo

Centro Instantáneo de Rotación: *Es el punto del espacio desde el cual, y para ese instante, el movimiento del sólido puede describirse como una rotación pura.* En el caso de un cuerpo en MPG siempre hay un punto desde el cual el movimiento del sólido es una rotación pura, esto es la velocidad de traslación es cero. Ese punto del espacio cambia de posición a cada instante

encontrar el CIR en cada uno de los movimientos representados



Caso de una barra que desliza

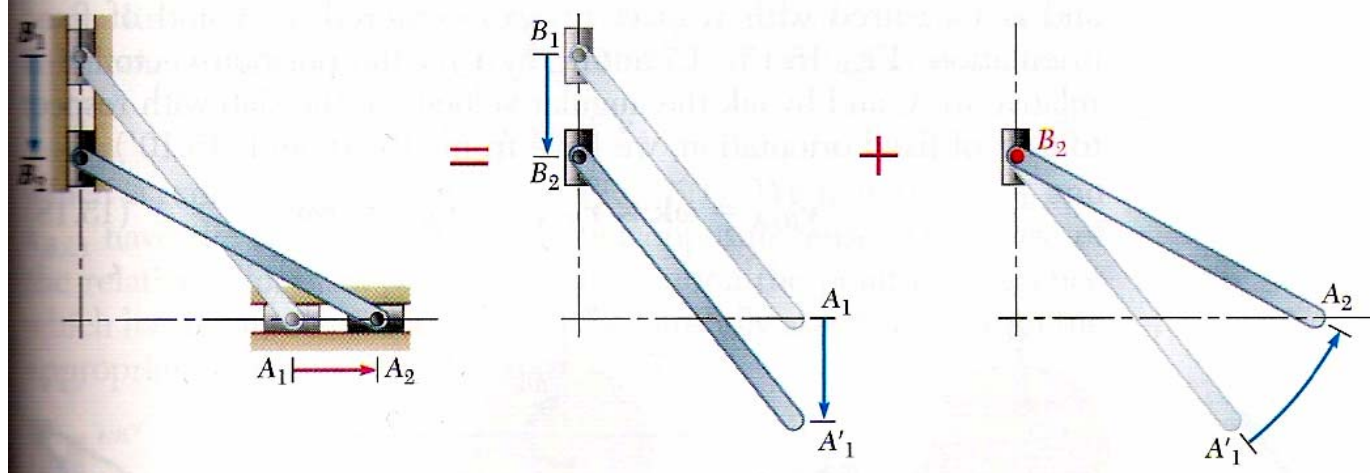


Plane motion

Translation with A

Rotation about A

(a)



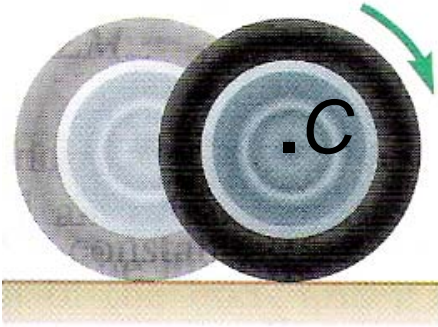
Plane motion

Translation with B

Rotation about B

La velocidad angular y la aceleración angular son las mismas independientemente del punto que consideremos

Rodadura sin deslizamiento



Si no hay deslizamiento en el punto de contacto, la distancia recorrida por el punto C, es exactamente la distancia del arco s .

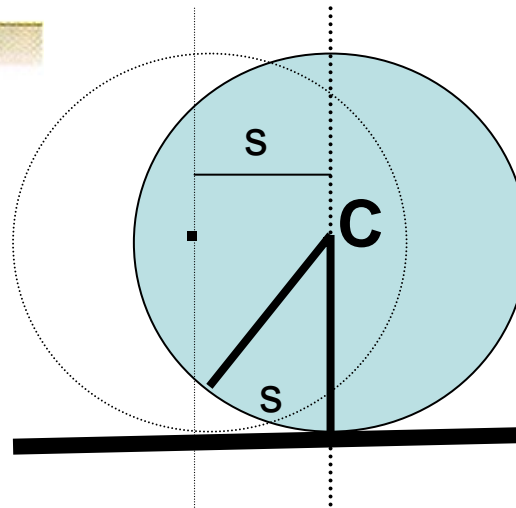
Cuando la rueda de radio R rota un ángulo θ , el punto de contacto entre la rueda y el suelo se desplaza una distancia s relacionada con θ por la ecuación $s = \theta R$.

Rodadura sin deslizamiento

$$s = \theta R$$

$$v_C = \omega R$$

$$a_C = \alpha R$$



© Original Artist
Reproduction rights obtainable from
www.CartoonStock.com



Rodadura con deslizamiento. Un objeto rueda y desliza

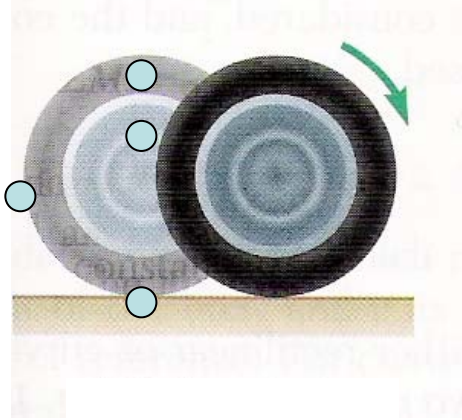
Entonces ...

$$s \neq \theta R$$

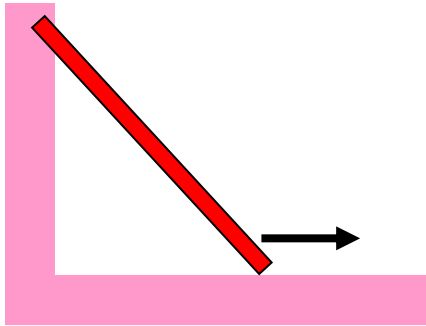
$$v_C \neq \omega R$$

$$a_C \neq \alpha R$$

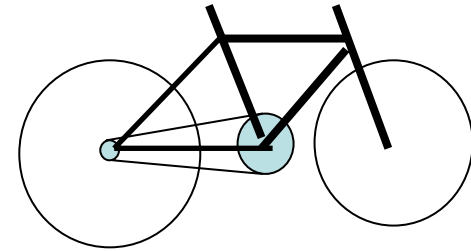
Cinemática del sólido rígido. ROTACIÓN. Ejercicios



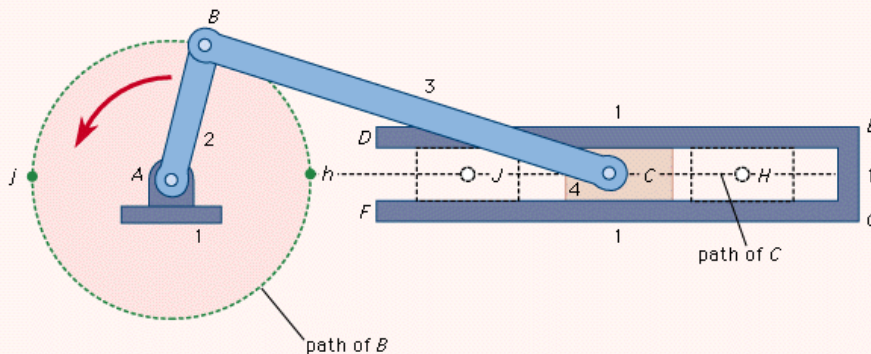
Calcular y representar la velocidad y aceleración de los puntos señalados en la figura sabiendo que el centro de la rueda se desplaza a una velocidad de 10 m/s. La rueda se mueve con rodadura sin deslizamiento



Calcular la velocidad angular de la barra de 3 m de longitud cuando la velocidad del punto de contacto con el suelo es de 3 m/s, y el ángulo entre la barra y el suelo es de 45° . ¿Cual es la velocidad del punto de contacto con la pared?. ¿Y la del centro de masas?



Un ciclista viaja a la velocidad de 40 km/h. ¿Cuan rápido pedalea en rev/min?. Datos: Radio del piñón: 2.5 cm; Radio del plato: 10 cm; Radio de la rueda trasera: 40 cm



El mecanismo biela-manivela convierte el movimiento de rotación de la biela en un movimiento lineal de la corredera o pistón. Encontrar la relación entre la velocidad angular de la biela y la velocidad lineal del pistón para una geometría determinada.

Calcular la velocidad angular promedio de la tierra. Calcular la velocidad y aceleración de un punto fijo de su superficie cuya posición sea : (a) en el Ecuador, (b) 40° latitud Norte.

Buscar los datos necesarios para hacer el cálculo