



PROBLEMAS RESUELTOS DE TRABAJO Y ENERGÍA

Equipo docente:

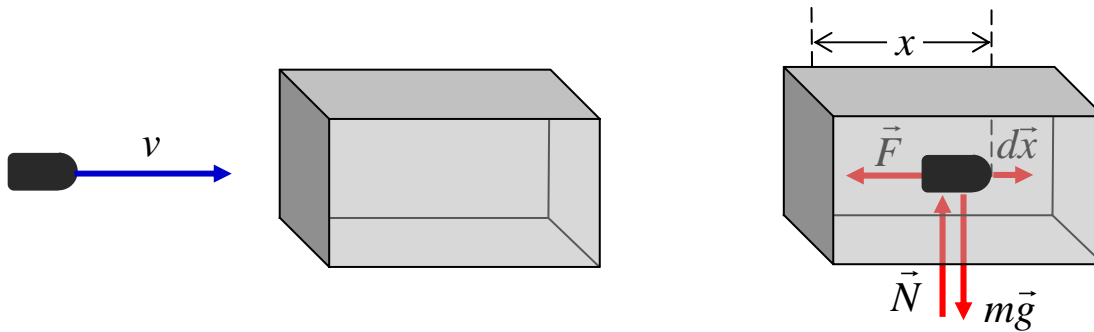
Antonio J. Barbero García

Mariano Hernández Puche

Alfonso Calera Belmonte

PROBLEMA 1

Una bala de masa 20 g que se mueve a 400 m/s penetra horizontalmente en un bloque de madera hasta una profundidad de 15 cm. ¿Cuál es la fuerza media que se ha realizado sobre la bala para detenerla? .



Sea F la fuerza media de frenado cuando la bala se incrusta en el bloque

La bala se detiene cuando alcanza la profundidad x_f

Trabajo de la suma de fuerzas actuantes sobre la bala = Variación de su energía cinética

$$\int (\vec{F} + m\vec{g} + \vec{N}) d\vec{x} = \Delta E_C$$

$$\int_0^{x_f} (F \cos 180^\circ + mg \cos 90^\circ + N \cos 270^\circ) dx = 0 - \frac{1}{2}mv^2$$

$$-\int_0^{x_f} F dx = -F x_f = -\frac{1}{2}mv^2$$

$$F = \frac{mv^2}{2x_f}$$

$$m = 2 \cdot 10^{-2} \text{ kg}$$

$$v = 4 \cdot 10^2 \text{ m/s}$$

$$x_f = 15 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

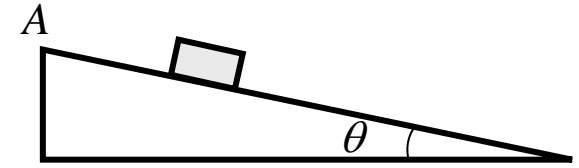
$$F = 1.07 \cdot 10^4 \text{ N}$$

Nótese que esta fuerza es más de 50000 veces mayor que el peso de la bala

PROBLEMA 2

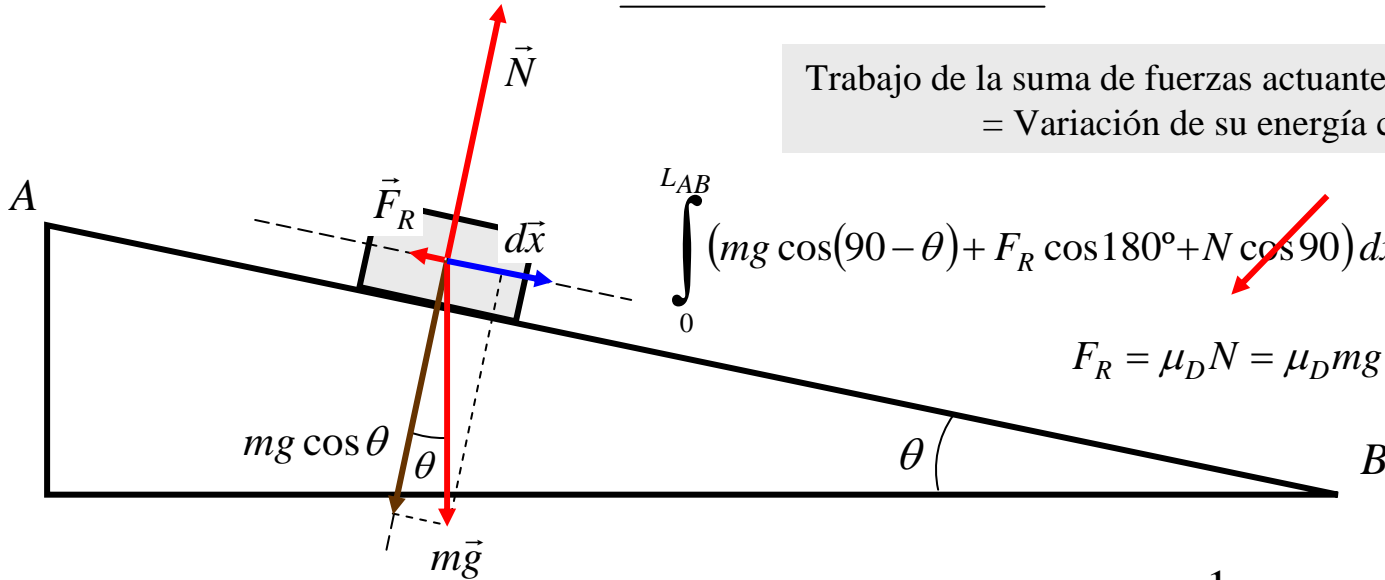
Un bloque desliza partiendo del reposo desde el punto más elevado A de una rampa de 5 m de longitud que forma un ángulo de 30° con la horizontal (véase figura). El coeficiente dinámico de rozamiento es 0.25. Aplicando el teorema del trabajo y la energía determínese la velocidad del bloque cuando llega al punto inferior del plano (punto B).

$\theta = 30^\circ$ $L_{AB} = 5 \text{ m}$
 $\mu_D = 0.25$ $g = 9.8 \text{ m/s}^2$



T
r
a
b
a
j
o
y
e
n
e
r
g
í
a

Trabajo de la suma de fuerzas actuantes sobre el bloque =
 = Variación de su energía cinética



$$\int_0^{L_{AB}} (mg \cos(90 - \theta) + F_R \cos 180^\circ + N \cos 90) dx = \frac{1}{2} mv_B^2 - \frac{1}{2} mv_A^2$$

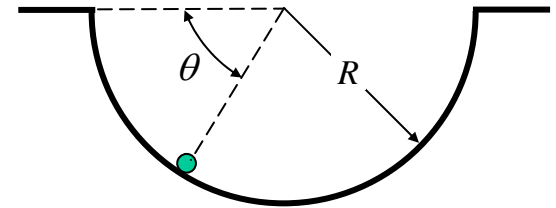
$$F_R = \mu_D N = \mu_D mg \cos \theta$$

$$(mg \sin \theta - \mu_D mg \cos \theta) L_{AB} = \frac{1}{2} mv_B^2$$

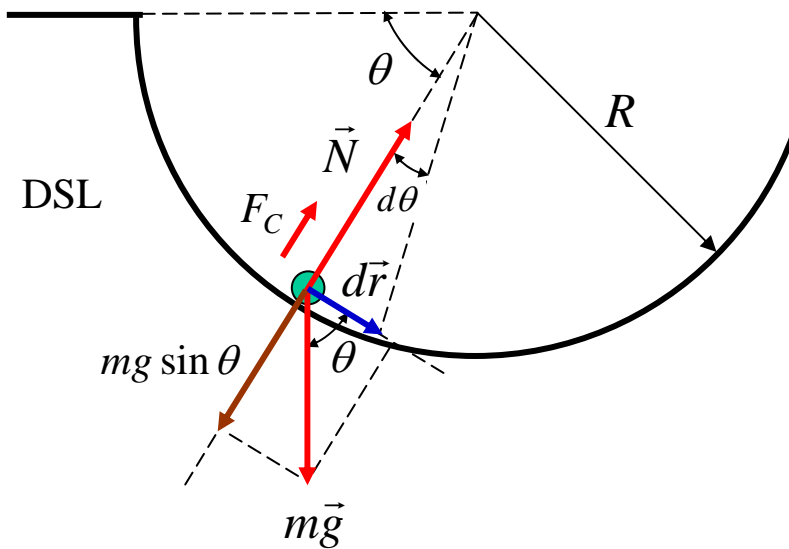
$$v_B = \sqrt{2g(\sin \theta - \mu_D \cos \theta)L_{AB}} = 5.27 \text{ m/s}$$

PROBLEMA 3

Una bolita de pequeño tamaño se coloca en el borde de un cuenco semiesférico de radio R y se deja caer sin velocidad inicial. Calcúlese su velocidad, su energía cinética y la reacción normal de la superficie cuando su posición es la indicada en la figura anexa.



Trabajo de la suma de fuerzas actuantes sobre la bolita = Variación de su energía cinética



$$\int (m\vec{g} + \vec{N}) d\vec{r} = \Delta E_C \quad dr = R d\theta$$

$$\int_0^\theta (mg \cos \theta + N \cos 90^\circ) R d\theta = \Delta E_C$$

$$Rmg (\sin \theta - \sin 0) = E_C(\theta) - E_C(0) = \frac{1}{2}mv^2$$

$$v^2 = 2Rg \sin \theta$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = Rmg \sin \theta$$

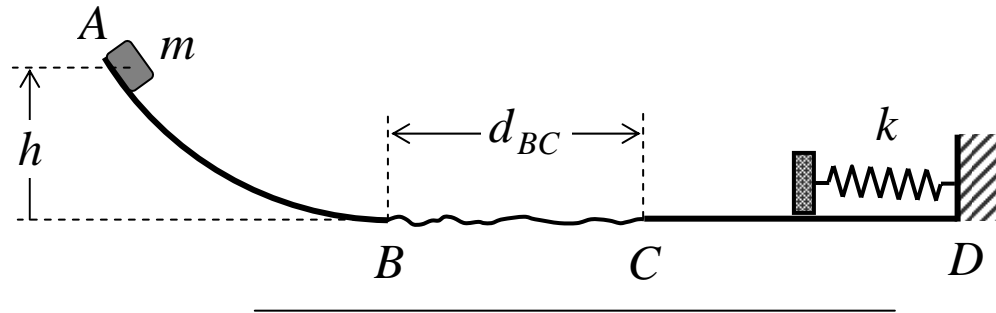
$$F_C = N - mg \sin \theta = \frac{mv^2}{R}$$

$$N = mg \sin \theta + \frac{mv^2}{R} = mg \sin \theta + 2mg \sin \theta$$

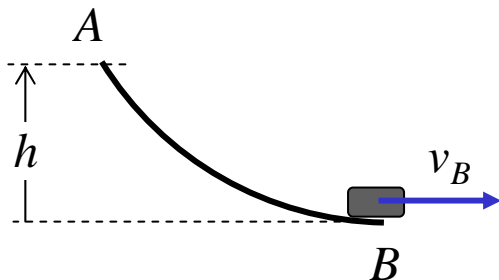
$$N = 3mg \sin \theta$$

PROBLEMA 4

Un bloque de masa $m = 5 \text{ kg}$ se deja caer partiendo del reposo desde el punto más elevado A de un carril en pendiente a $h = 4 \text{ m}$ de altura (véase figura). El carril tiene tres tramos, AB , BC y CD , de los cuales únicamente en el tramo BC , de longitud $d_{BC} = 5 \text{ m}$, existe rozamiento apreciable. Al final del trayecto (tramo CD) hay un tope unido a un resorte cuya constante elástica es $k = 4000 \text{ N/m}$. Cuando el bloque alcanza el tope, el resorte se comprime 25 cm . Suponiendo un choque perfectamente elástico, calcúlese el coeficiente de rozamiento dinámico del tramo BC .



A lo largo del camino AB la velocidad va creciendo a medida que el bloque desciende, pues su energía cinética aumenta a medida que disminuye su energía potencial.

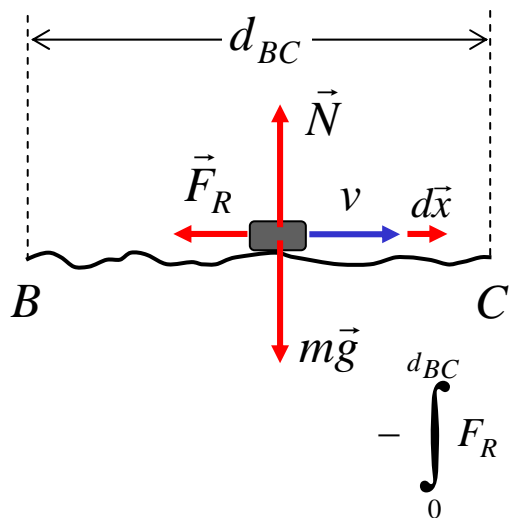


$$\Delta E_C = -\Delta U \quad \frac{1}{2}mv_B^2 = -(0 - mgh) \quad (\text{Tomando el nivel de } B \text{ como referencia para } U)$$

$$v_B = \sqrt{2gh}$$

PROBLEMA 4 (Continuación)

En el tramo BC la velocidad va disminuyendo a causa de la fuerza de rozamiento, de manera que $v_C < v_B$. Representemos el DSL en un punto intermedio de ese trayecto.



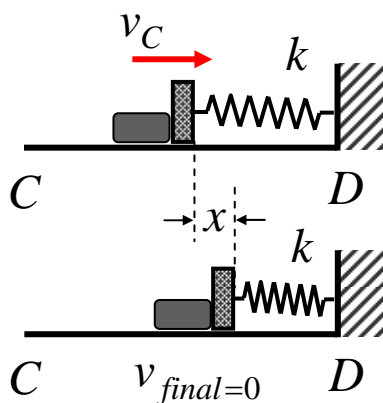
Teorema del trabajo y la energía: $\int (\vec{F}_R + m\vec{g} + \vec{N}) d\vec{x} = \Delta E_C$

$$\int_0^{d_{BC}} (F_R \cos 180^\circ + mg \cos 90^\circ + N \cos 270^\circ) dx = \frac{1}{2}mv_C^2 - \frac{1}{2}mv_B^2$$

$$-\int_0^{d_{BC}} F_R dx = \frac{1}{2}mv_C^2 - \frac{1}{2}m \cdot 2gh \quad F_R = \frac{1}{d_{BC}} \left(mgh - \frac{1}{2}mv_C^2 \right)$$

Como la fuerza de rozamiento dinámica es $F_R = \mu_D N = \mu_D mg$ $\mu_D = \frac{1}{d_{BC}} \left(h - \frac{v_C^2}{2g} \right)$

Es evidente que para determinar el coeficiente de rozamiento, hay que calcular v_C .

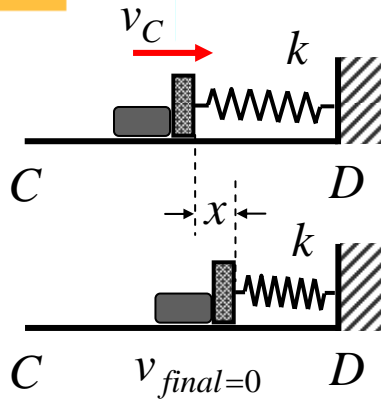


Puesto que en CD no hay rozamiento, la velocidad cuando choca con el tope es v_C , y su energía cinética es $(1/2)mv_C^2$

Cuando el resorte se comprime una distancia x , esa energía cinética se convierte en energía potencial elástica $U_{resorte}$.

$$\frac{1}{2}mv_{final}^2 - \frac{1}{2}mv_C^2 = -\Delta U_{resorte} = -\left(0 - \frac{1}{2}kx^2 \right)$$

PROBLEMA 4 (Continuación)



$$\frac{1}{2} m v_{final}^2 - \frac{1}{2} m v_C^2 = -\Delta U_{resorte} = -\left(0 - \frac{1}{2} k x^2\right) \quad v_C^2 = \frac{k x^2}{m}$$

$$\mu_D = \frac{1}{d_{BC}} \left(h - \frac{v_C^2}{2g} \right)$$

$$\mu_D = \frac{1}{d_{BC}} \left(h - \frac{k x^2}{2mg} \right)$$

$$d_{BC} = 5 \text{ m} \quad h = 4 \text{ m} \quad k = 4000 \text{ N/m}$$

$$x = 0.25 \text{ m} \quad m = 5 \text{ kg} \quad g = 9.8 \text{ m/s}^2$$

$$\mu_D = 0.29$$

PROBLEMA 5

Un acróbata de 60 kg porta en cada mano una pesa de 10 kg. Con los brazos en cruz salta de pie sobre una cama elástica elevando su centro de masas 3 m en cada salto. Al llegar al punto más bajo en uno de los saltos, suelta la pesas. (a) ¿A qué altura llegará en el salto siguiente?. (b) ¿Cuál será la velocidad de su centro de masas en este salto cuando pase a 3 m de altura sobre la cama elástica?.

(a) Sea M la masa del acróbata y m la masa de cada pesa. Sea h la altura que alcanza su centro de masas en cada rebote sobre la cama elástica.

Cada vez que la cama elástica llega a su punto más bajo (punto B), la energía potencial elástica que ésta almacena procede de la que el acróbata tenía en el punto A situado a una altura h , así que, suponiendo que no hay pérdidas,

$$U_{B,elástica} = (M + 2m)gh$$

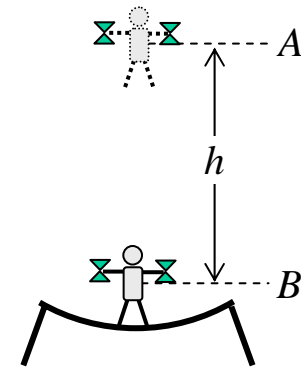
Esta energía potencial es transmitida de nuevo al acróbata, que adquiere energía cinética inicial en B , y ello le permite alcanzar de nuevo la altura A en el siguiente rebote.

Pero si el acróbata suelta las pesas en B , entonces la energía potencial elástica almacenada es devuelta en el siguiente rebote únicamente al acróbata, de masa M , en forma de energía cinética, por lo que se verificará:

$$U_{B,elástica} = (M + 2m)gh = \frac{1}{2} M v_{B,\sin\ pesas}^2$$

Acróbata con pesas

$$U_{A,gravitatoria} = (M + 2m)gh$$



$$U_{B,elástica} = (M + 2m)gh$$

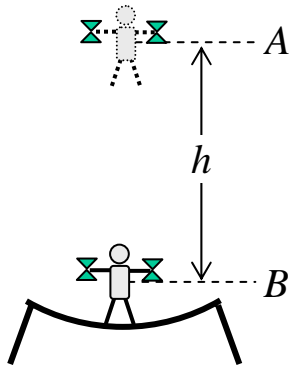
$$E_{CB} = U_{B,elástica}$$

$$E_{CB} = (1/2)(M + 2m)v_B^2$$

PROBLEMA 5 (Continuación)

Acróbata con pesas

$$U_{A,gravitatoria} = (M + 2m)gh$$



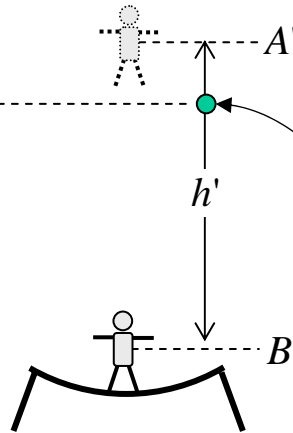
$$U_{B,elástica} = (M + 2m)gh$$

$$E_{CB} = (1/2)(M + 2m)v_B^2$$

$$E_{CB} = U_{B,elástica}$$

Acróbata sin pesas

$$U'_{A,gravitatoria} = Mgh'$$



$$U_{B,elástica} = (M + 2m)gh$$

$$E'_{CB} = U_{B,elástica}$$

$$E'_{CB} = (1/2)Mv_{B,sin\ pesas}^2$$

$$U_{B,elástica} = (M + 2m)gh = \frac{1}{2}Mv_{B,sin\ pesas}^2 = E'_{CB}$$

A su vez, la energía cinética adquirida por el acróbata sin pesas se convertirá completamente en energía potencial cuando llegue a un punto A' más alto que antes.

$$(M + 2m)gh = Mgh' \quad h' = \left(1 + \frac{2m}{M}\right)h$$

Resultado numérico: $h' = \left(1 + \frac{2 \cdot 10}{60}\right) \cdot 3 = 4 \text{ m}$

(b) Balance de energía mecánica entre B y A

$$Mgh' = Mgh + \frac{1}{2}v_{A,sin\ pesas}^2$$

$$v_{A,sin\ pesas} = \sqrt{2(h'-h)g}$$

$$v_{A,sin\ pesas} = \sqrt{2(4-3) \cdot 9.8} = 4.43 \text{ m/s}$$