FUNDAMENTOS FÍSICOS DE LA INGENIERÍA

PROBLEMAS DE TERMODINÁMICA
PROCESOS POLITRÓPICOS DE UN GAS IDEAL

PROBLEMA 1

Un gas ideal de coeficiente adiabático $\gamma = 1.4$ con un volumen específico inicial de 0.008 m^3/mol se somete a un calentamiento isocórico que hace variar su presión entre 2.65 bar y 4.20 bar. Seguidamente el gas se expande adiabáticamente hasta un volumen adecuado, y por último se somete a una compresión isoterma hasta que recupera su volumen específico inicial. Se pide:

A) Dibuje esquemáticamente en forma cualitativa los procesos sufridos por este gas en un diagrama $p - v$.

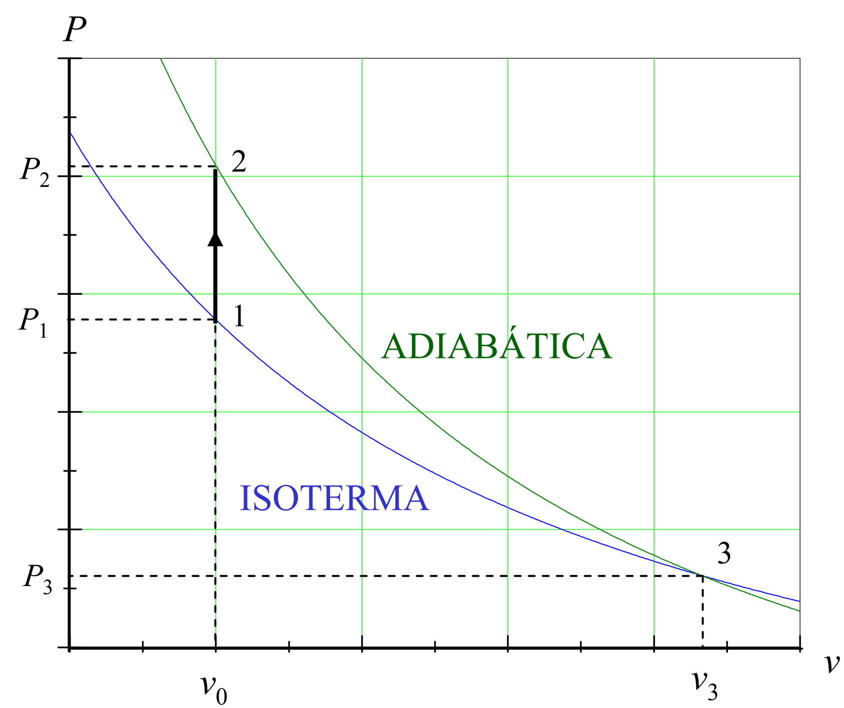
B) Determine presión, volumen y temperatura del punto común del proceso adiabático y del proceso isotermo sufrido por el gas. Dato: R = 8,314 J/(K·mol)

C) Determine el rendimiento del ciclo termodinámico que ha descrito el gas.

Apartado A)

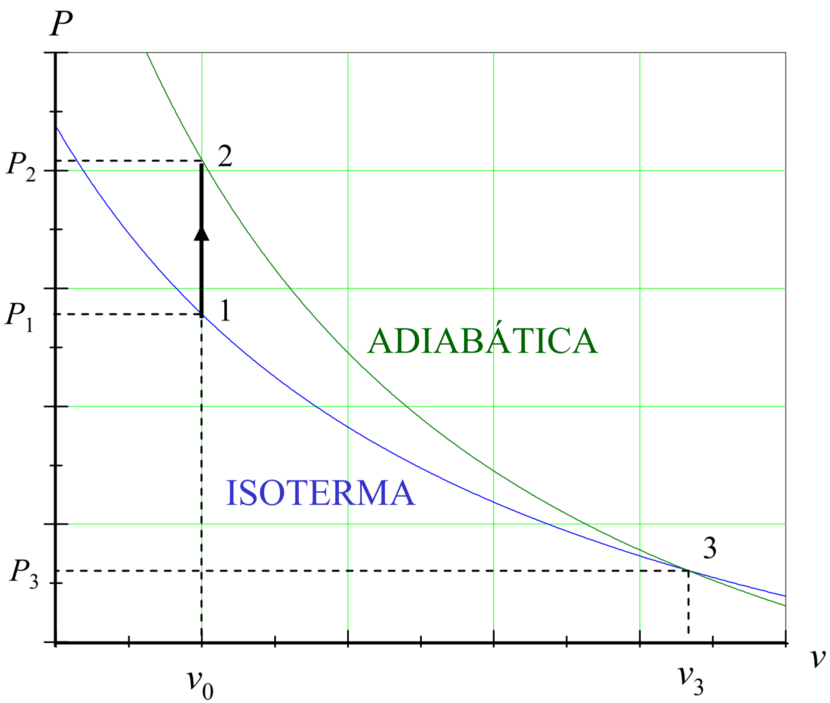
$$v_0 = v_1 = v_2 = 0.008\ \text{m}^3/\text{mol} \qquad P_1 = 2.65\ \text{bar} \qquad P_2 = 4.20\ \text{bar}$$

El gas describe un **ciclo de potencia** (sentido horario) cuyos puntos notables son 1, 2 y 3.



PROBLEMA 1 (CONT)

Apartado B) (Determinación coordenadas punto 3)



Las temperaturas de los puntos notables se determinan inmediatamente a partir de la ecuación de estado del gas:

$$pV = nRT \qquad p\frac{V}{n} = RT \qquad pv = RT \quad \begin{cases} T_1 = \dfrac{p_1 v_1}{R} = 255\ \mathrm{K} \\ T_2 = \dfrac{p_2 v_2}{R} = 404\ \mathrm{K} \end{cases}$$

Las temperaturas T_3 y T_1 son iguales, están sobre la misma isoterma $T_3 = T_1 = 255\ \mathrm{K}$

Para obtener el volumen del punto 3:

Ecuación de la adiabática: $p_2 V_2^{\gamma} = p_3 V_3^{\gamma}$

Ecuación de la isoterma: $p_1 V_1 = p_3 V_3$

En términos de volúmenes molares:

$$\left.\begin{array}{l} p_2 n^{\gamma} v_2^{\gamma} = p_3 n^{\gamma} v_3^{\gamma} \\ p_1 v_1 = p_3 v_3 \end{array}\right\}$$

Dividiendo miembro a miembro:

$$\frac{p_2 n^{\gamma} v_2^{\gamma}}{p_1 v_1} = n^{\gamma} v_3^{\gamma - 1}$$

$$v_3 = \left(\frac{p_2 v_2^{\gamma}}{p_1 v_1}\right)^{1/(\gamma-1)} = 0.025\ \mathrm{m^3/mol}$$

Presión del punto 3:

$$p_3 = \frac{RT_3}{v_3} = 83799\ \mathrm{Pa} = 0.838\ \mathrm{bar}$$

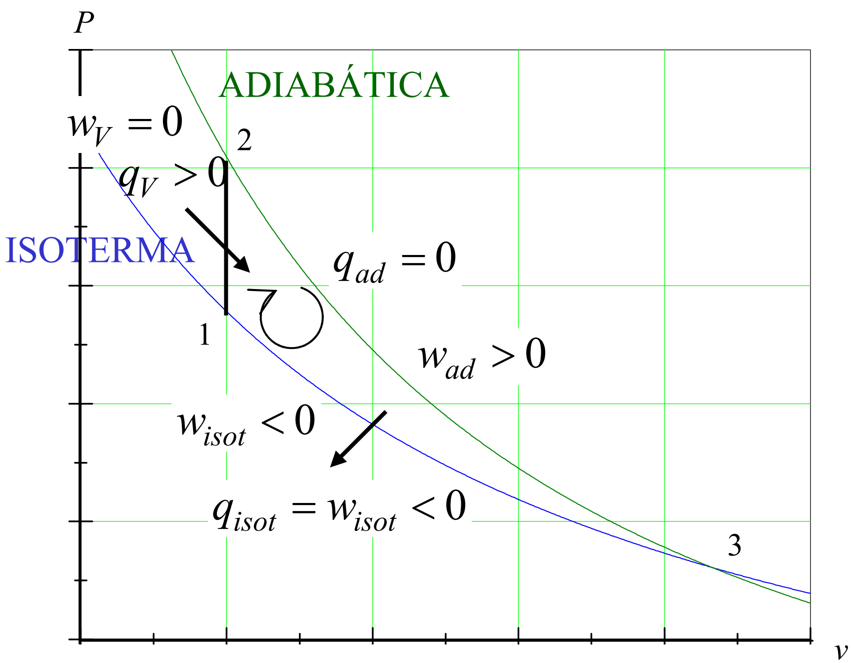
PROBLEMA 1 (CONT)

Apartado C) (Determinación del rendimiento)

Rendimiento: $\eta = \dfrac{w_{neto}}{q_V} = \dfrac{w_{ad} + w_{isot}}{q_V}$

Veamos cualitativamente trabajo y calor en cada etapa del ciclo

$$W_{ad} = \frac{p_2 V_2 - p_3 V_3}{\gamma - 1} \qquad w_{ad} = \frac{p_2 v_2 - p_3 v_3}{\gamma - 1} = 3100 \text{ J/mol}$$



$$W_{isot} = \int_{V_3}^{V_1} p\,dV = \int_{V_3}^{V_1} \frac{nRT}{V}\,dV = nRT_1 \ln\frac{V_1}{V_3}$$

$$w_{isot} = RT_1 \ln\frac{v_1}{v_3} = -2441 \text{ J/mol}$$

$$Q_V = nc_V \Delta T = nc_V (T_2 - T_1)$$

$$q_V = \frac{Q_V}{n} = c_V (T_2 - T_1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \gamma = \dfrac{c_P}{c_V} \\ c_P - c_V = R \\ c_V = \dfrac{R}{(\gamma - 1)} \end{array}\right\} \quad q_V = \frac{R}{\gamma - 1}(T_2 - T_1) = 3100 \text{ J/mol}$$

	p (Pa)	v (m³/mol)	T (K)
1	265000	0,008	255
2	420000	0,008	404
3	83799	0,025	255

Pregunta: ¿Es casual que el resultado numérico para q_V coincida con w_{ad}?

$$\eta = \frac{w_{neto}}{q_V} = \frac{w_{ad} + w_{isot}}{q_V} = \frac{3100 - 2441}{3100} = 0.21 \quad (21\%)$$

PROBLEMA 2

Un ciclo de Carnot reversible empleado como ciclo de potencia, que usa un gas ideal de coeficiente adiabático 1.4 como fluido de trabajo, opera entre las temperaturas 300 K y 500 K. La presión máxima del ciclo es 2.50 bar, y en la etapa de expansión isoterma el gas aumenta su volumen específico hasta alcanzar 0.040 m^3/mol. Dato: R = 8,314 kJ/(K·kmol).

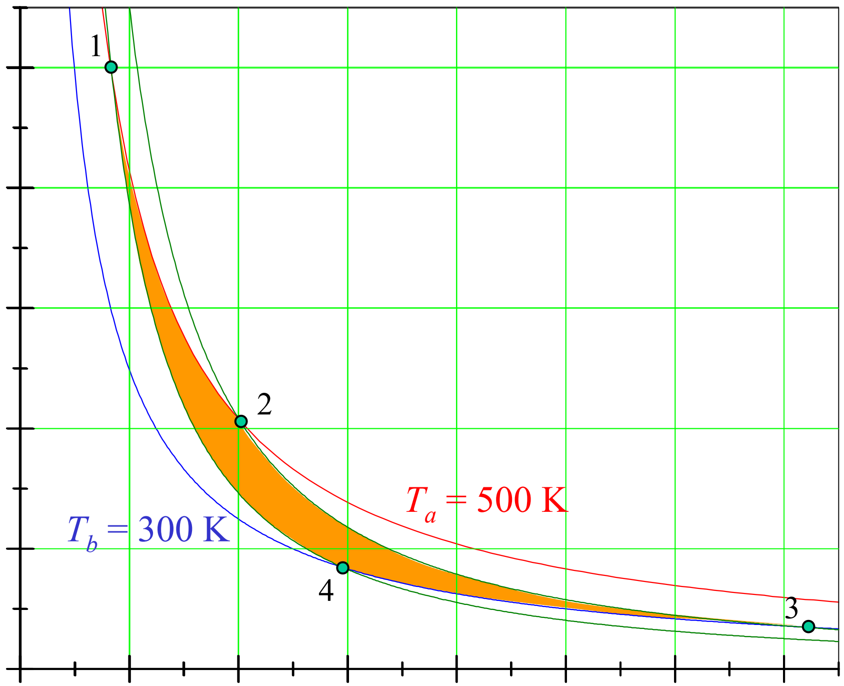
A) Determine las coordenadas volumen específico, presión y temperatura de todos los puntos notables del ciclo.

B) Si el ciclo se repite dos veces por segundo, determine la potencia desarrollada.

C) Demuestre que para cualquier ciclo de Carnot el trabajo asociado con la etapa de compresión adiabática es el mismo en valor absoluto y de signo opuesto al trabajo desarrollado en la expansión adiabática, y que el trabajo neto producido es la suma algebraica del trabajo de la expansión isoterma y de la compresión isoterma.

Apartado A) Coordenadas de los puntos notables del ciclo

$p_1 = 2.5$ bar $\quad v_2 = 0.040$ m³/mol



1→2 Expansión isoterma $T_1 = T_2 = 500$ K

2→3 Expansión adiabática.

3→4 Compresión isoterma $T_3 = T_4 = 300$ K

4→1 Compresión adiabática.

Coordenadas de los puntos 1 y 2:

$$\begin{cases} v_1 = \dfrac{RT_1}{p_1} \\ p_2 = \dfrac{RT_2}{v_2} \end{cases}$$

	P (bar)	P (Pa)	v (m³/mol)	T (K)
1	**2,50**	250000	0,0166	**500**
2	1,04	103925	**0,0400**	500

Para calcular el volumen específico del gas en el punto 3 usamos la relación adiabática entre los puntos 2 y 3 en función de volumen específico y temperatura.

$$p_2 v_2^{\gamma} = p_3 v_3^{\gamma}$$

$$T_2 v_2^{\gamma-1} = T_3 v_3^{\gamma-1}$$

$$\frac{RT_2}{v_2} v_2^{\gamma} = \frac{RT_3}{v_3} v_3^{\gamma}$$

$$v_3 = v_2 \left(\frac{T_2}{T_3} \right)^{1/(\gamma-1)}$$

PROBLEMA 2 (CONT.)

Apartado A) Coordenadas de los puntos notables del ciclo

Hemos calculado $v_3 = v_2 \left(\dfrac{T_2}{T_3} \right)^{1/(\gamma-1)}$

	P (bar)	P (Pa)	v (m³/mol)	T (K)
1	**2,50**	250000	0,0166	**500**
2	1,04	103925	**0,0400**	500
3	0,17	17388	0,1434	**300**
4	0,42	41828	0,0596	300

Una vez calculado el volumen específico del punto 3, se obtiene su presión usando la ecuación de estado

$$p_3 = \frac{RT_3}{v_3}$$

El punto 4 es donde concurren la isoterma 3→4 y la adiabática 4→1, por lo que debe cumplirse

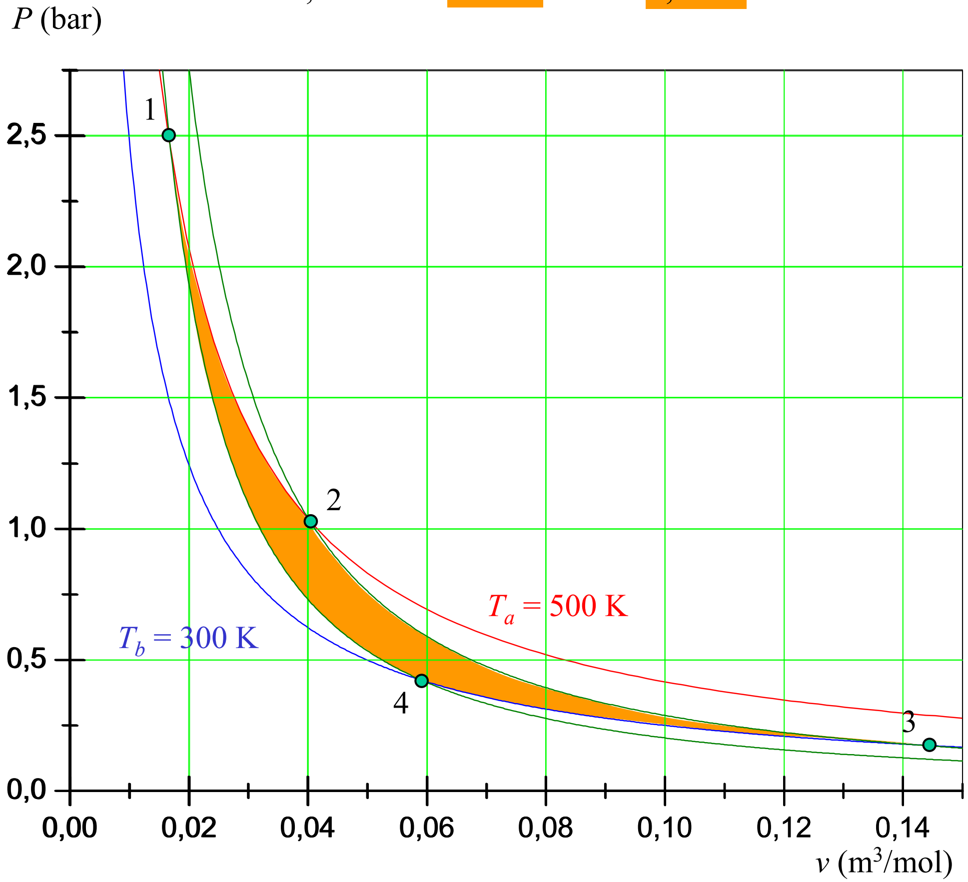
$$p_4 v_4^{\gamma} = p_1 v_1^{\gamma}$$

$$p_4 v_4 = p_3 v_3$$

$$v_4^{\gamma-1} = \frac{p_1 v_1^{\gamma}}{p_3 v_3} \qquad v_4 = \left(\frac{p_1 v_1^{\gamma}}{p_3 v_3} \right)^{1/(\gamma-1)}$$

Usando otra vez la ecuación de estado

$$p_4 = \frac{RT_4}{v_4}$$



PROBLEMA 2 (CONT.)

Apartado B) Hay que calcular el trabajo producido por el ciclo. Esto puede hacerse de dos formas.

B1. Cálculo directo del trabajo de cada etapa isoterma (en el apartado C demostraremos que las adiabáticas no intervienen en el trabajo neto del ciclo)

$$w_{isot\,12} = \int_{v_1}^{v_2} p\,dv = \int_{v_1}^{v_2} \frac{RT_1}{v}\,dv = RT_1 \ln\frac{v_2}{v_1} = 3649 \;\; \text{J/mol}$$

$$w_{neto} = w_{isot\,12} + w_{isot\,34} = 3649 - 2189 = 1460 \;\; \text{J/mol}$$

$$w_{isot\,34} = \int_{v_3}^{v_4} p\,dv = \int_{v_3}^{v_4} \frac{RT_3}{v}\,dv = RT_3 \ln\frac{v_4}{v_3} = -2189 \;\; \text{J/mol}$$

El tiempo que tarda esta máquina térmica en describir un ciclo es $t = 0.5$ s, por tanto la potencia específica es

$$\dot{w} = \frac{w_{neto}}{t} = \frac{1460}{0.5} = 2920 \;\; \text{watt/mol}$$

B2. Cálculo del trabajo a partir del rendimiento del ciclo reversible. $\eta = 1 - \dfrac{T_3}{T_1} = 1 - \dfrac{300}{500} = 0.40$

La energía que debe suministrarse para el funcionamiento del mismo es el calor de la etapa isoterma de alta temperatura, que es igual al trabajo de la expansión isoterma 1→2, ya que la energía interna del gas ideal sólo depende de su temperatura y por lo tanto no sufre variación en dicha etapa:

$$\Delta u_{12} = q_{isot\,12} - w_{isot\,12} = 0 \qquad q_{isot\,12} = w_{isot\,12} = 3649 \;\; \text{J/mol}$$

El trabajo específico neto es: $\eta = \dfrac{w_{neto}}{q_{isot\,12}}$

$$\dot{w} = \frac{w_{neto}}{t} = \frac{1460}{0.5} = 2920 \;\; \text{watt/mol}$$

$$w_{neto} = \eta \cdot q_{isot\,12} = 0.40 \cdot 3649 = 1460 \;\; \text{J/mol}$$

PROBLEMA 2 (CONT.)

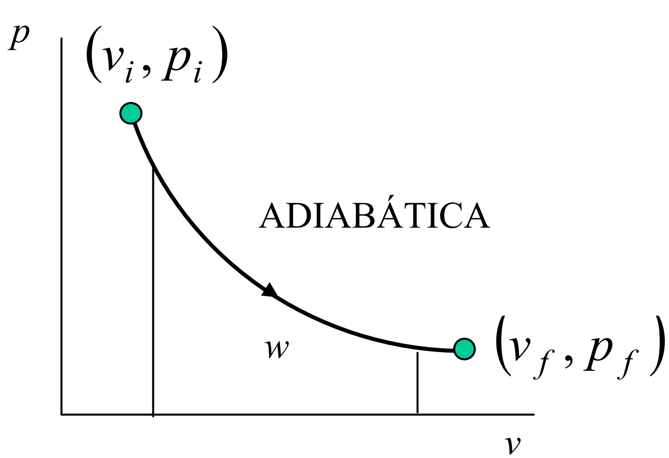
Apartado C) Demuestre que para cualquier ciclo de Carnot el trabajo asociado con la etapa de compresión adiabática es el mismo en valor absoluto y de signo opuesto al trabajo desarrollado en la expansión adiabática, y que el trabajo neto producido es la suma algebraica del trabajo de la expansión isoterma y de la compresión isoterma.

Trabajo de un proceso adiabático entre las condiciones (v_i, p_i) y (v_f, p_f).

$$w = \int_{v_i}^{v_f} p\,dv = \int_{v_i}^{v_f} \frac{C}{v^{\gamma}}\,dv = \left[C\,\frac{v^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right]_i^f = \left[pv^{\gamma}\,\frac{v^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right]_i^f = \frac{p_f v_f - p_i v_i}{1-\gamma} = \frac{p_i v_i - p_f v_f}{\gamma - 1}$$

Ecuación adiabática: $p = \dfrac{C}{v^{\gamma}}$

Aplicando la ecuación de estado del gas ideal: $w = \dfrac{R}{\gamma - 1}\left(T_i - T_f\right)$



En el ciclo de Carnot hay dos adiabáticas: los procesos 2→3 y 4→1 (véase apartado A).

Puesto que en el proceso 2→3 $T_i = T_2$ y $T_f = T_3$, mientras que en el proceso 4→1 las temperaturas son $T_i = T_3$ $(= T_4)$ y $T_f = T_2$ $(= T_1)$, se deduce que

$$w_{adiab23} = -w_{adiab41}$$

Por lo tanto, el trabajo neto del ciclo corresponde a la suma (algebraica) de los trabajos de las etapas isotermas 1→2 y 3→4, pues los trabajos adiabáticos se cancelan entre si.

PROBLEMA 3

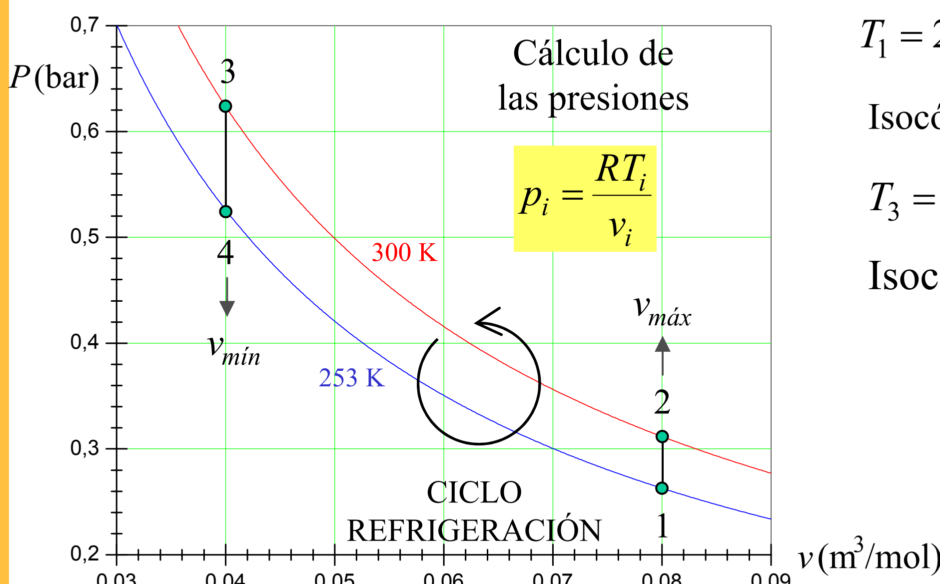
Un ciclo de Stirling de refrigeración que consta de dos isotermas y dos isocóricas utiliza como fluido de trabajo 0.50 moles de un gas ideal y opera entre las temperaturas 253 K y 300 K. Los volúmenes máximo y mínimo del ciclo son 40 litros y 20 litros respectivamente. Suponga que todas las etapas de este ciclo son reversibles. Dato: R = 8,314 kJ/(K·kmol).

A) Determine las coordenadas volumen específico, presión y temperatura de todos los puntos notables del ciclo.

B) Sabiendo que el coeficiente adiabático del gas es 1.4, calcule el calor y el trabajo asociado a cada etapa del ciclo y determine su eficiencia.

C) Calcule el índice politrópico de un proceso termodinámico que una directamente el punto de mayor presión con el punto de menor presión de este ciclo.

Apartado A) $v_{\max} = \dfrac{V_{\max}}{n} = \dfrac{40\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^3}{0.50\ \mathrm{mol}} = 0.08\ \mathrm{m^3/mol}$ $\quad v_{\min} = \dfrac{V_{\min}}{n} = \dfrac{20\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^3}{0.50\ \mathrm{mol}} = 0.04\ \mathrm{m^3/mol}$



$T_1 = 253\ \mathrm{K} \quad T_2 = 300\ \mathrm{K}$

Isocórica 1→2 $\quad v_1 = v_2 = v_{\max} = 0.08\ \mathrm{m^3/mol}$

$T_3 = 300\ \mathrm{K} \quad T_4 = 253\ \mathrm{K}$

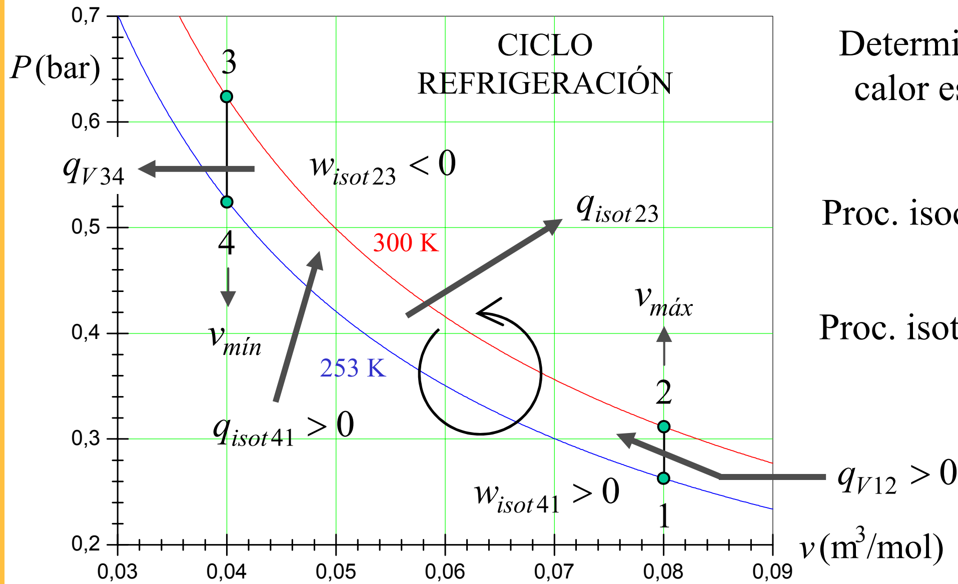
Isocórica 3→4 $\quad v_3 = v_4 = v_{\min} = 0.04\ \mathrm{m^3/mol}$

	v (m³/mol)	T (K)	P (Pa)	P (bar)
1	0,08	253	26293	0,26
2	0,08	300	31178	0,31
3	0,04	300	62355	0,62
4	0,04	253	52586	0,53

PROBLEMA 3 (CONT.)

UCLM

Apartado B) Calcular trabajo y calor en cada etapa del ciclo, y determinar la eficiencia ($\gamma = 1.4$)



Determinación del calor específico:

$$\gamma = \frac{c_P}{c_V} \qquad c_P - c_V = R \qquad c_V = \frac{R}{(\gamma - 1)}$$

Proc. isocórico 1→2 $\quad q_{V12} = c_V (T_2 - T_1) = \dfrac{R}{(\gamma-1)}(T_2 - T_1)$

Proc. isotermo 2→3 $\quad w_{isot23} = q_{isot23} = RT_2 \ln \dfrac{v_3}{v_2}$

Proceso isocórico 3→4

$$q_{V34} = c_V (T_4 - T_3) = \frac{R}{(\gamma-1)}(T_4 - T_3)$$

Proceso isotermo 4→1

$$w_{isot41} = q_{isot41} = RT_4 \ln \frac{v_1}{v_4}$$

El trabajo de las etapas isocóricas es nulo, al no haber variación de *v*.

La eficiencia del ciclo es igual al calor extraído del foco frío dividido por el valor absoluto del trabajo necesario para hacerlo. En nuestro caso:

$$\varepsilon = \frac{q_{isot41}}{|w_{isot23} + w_{isot41}|} = \frac{1458}{|-1729 + 1458|} = 5.38$$

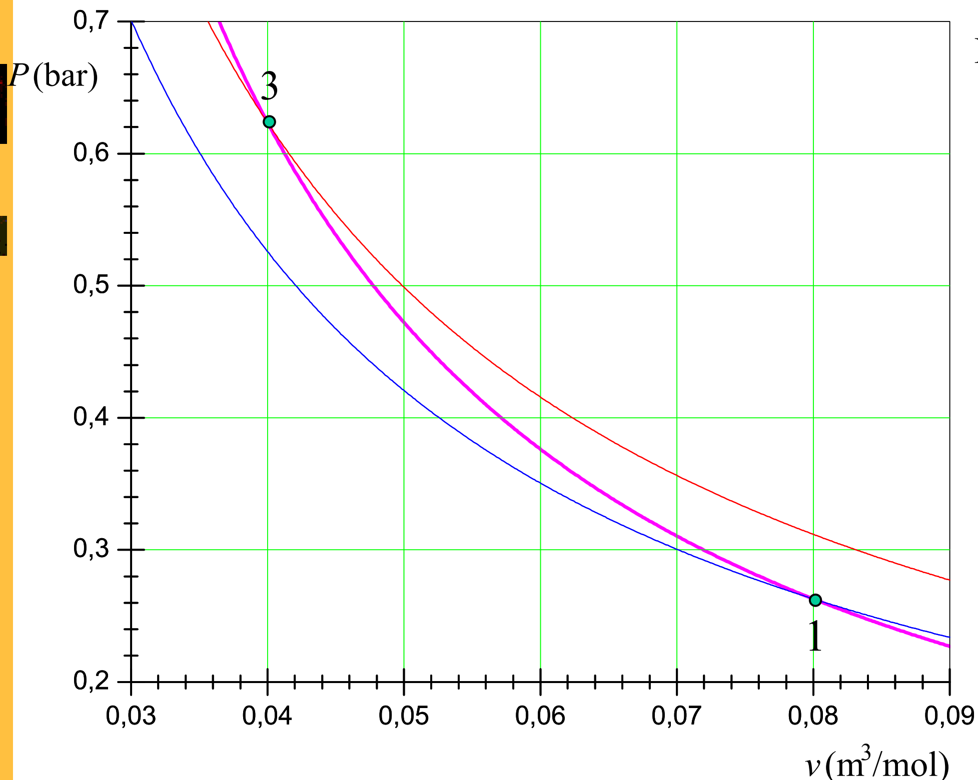
	w (J/mol)	q (J/mol)
1→2	0	977
2→3	-1729	-1729
3→4	0	-977
4→1	1450	1450
Σ =	-279	-279

Forma alternativa: como se trata de un ciclo reversible, $\varepsilon = \dfrac{T_1}{T_2 - T_1} = 5.38$

Comentario: la eficiencia representa el calor extraído del foco frío por cada unidad de trabajo invertido en el funcionamiento del ciclo.

PROBLEMA 3 (CONT.)

C) Calcule el índice politrópico de un proceso termodinámico que una directamente el punto de mayor presión con el punto de menor presión de este ciclo.



Mayor presión: punto 3; menor presión: punto 1

Se pide calcular el exponente k de la ecuación del proceso politrópico

$$p_3 v_3^k = p_1 v_1^k$$

$$\ln p_3 + k \ln v_3 = \ln p_1 + k \ln v_1$$

$$k(\ln v_3 - \ln v_1) = \ln p_1 - \ln p_3$$

$$k = \frac{\ln(p_1 / p_3)}{\ln(v_3 / v_1)} = 1.246$$

La ecuación de la politrópica es

$$pv^k = 63255 \cdot 0.04^{1.246} = 1130.5$$

	v (m³/mol)	T (K)	P (Pa)	P (bar)
1	0,08	253	26293	0,26
2	0,08	300	31178	0,31
3	0,04	300	62355	0,62
4	0,04	253	52586	0,53

PROBLEMA 4

Un gas perfecto de volumen específico 0.008 m^3/mol a una presión de 4.00 bar se calienta isocóricamente hasta que su presión alcanza 8.00 bar. Después se expande adiabáticamente hasta alcanzar 0.014 m^3/mol, luego se enfría isocóricamente y finalmente se comprime adiabáticamente hasta restituir las condiciones iniciales. Todas las transformaciones son reversibles (ciclo ideal de Otto). Datos: coeficiente adiabático del gas 1.40; constante universal de los gases R = 8,314 kJ/(K·kmol).

A) Determine las coordenadas volumen específico, presión y temperatura de todos los puntos notables del ciclo.

B) Calcule el calor y el trabajo asociado a cada etapa del ciclo y determine su rendimiento.

Coordenadas de los puntos extremos de la isocórica 1 (4 bar) → 2 (8 bar)

$$v_1 = 0.008 \ \text{m}^3/\text{mol} \qquad p_1 = 4.00 \ \text{bar} \qquad T_1 = \frac{p_1 v_1}{R} = 385 \ \text{K}$$

$$v_2 = 0.008 \ \text{m}^3/\text{mol} \qquad p_2 = 8.00 \ \text{bar} \qquad T_2 = \frac{p_2 v_2}{R} = 770 \ \text{K}$$

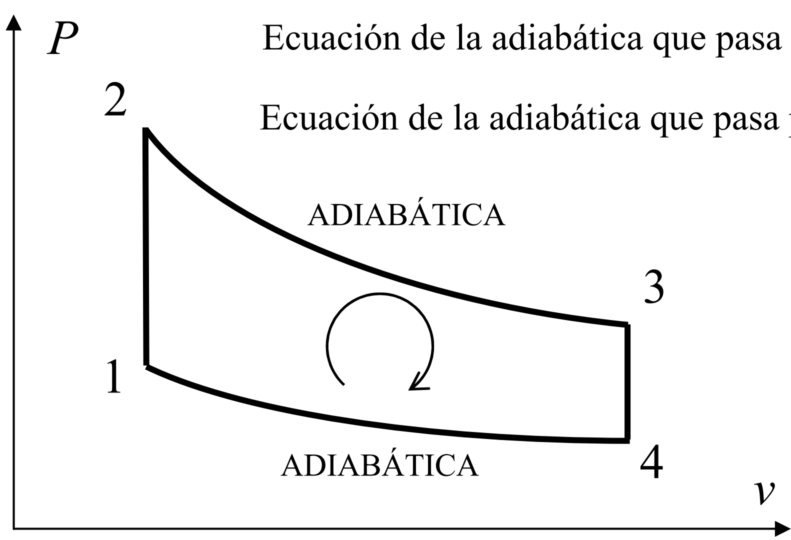
Ecuación de la adiabática que pasa por 2 y 3: $p_2 v_2^\gamma = 927.72 \longrightarrow p v^\gamma = 927.72$

Ecuación de la adiabática que pasa por 1 y 4: $p_1 v_1^\gamma = 463.86 \longrightarrow p v^\gamma = 463.86$

$$v_3 = v_4 = 0.014 \ \text{m}^3/\text{mol}$$

$$p_3 = p_2 \frac{v_2^\gamma}{v_3^\gamma} = 365457 \ \text{Pa} \qquad p_4 = p_1 \frac{v_1^\gamma}{v_4^\gamma} = 182729 \ \text{Pa}$$

$$T_3 = \frac{p_3 v_3}{R} = 615 \ \text{K} \qquad T_4 = \frac{p_4 v_4}{R} = 308 \ \text{K}$$



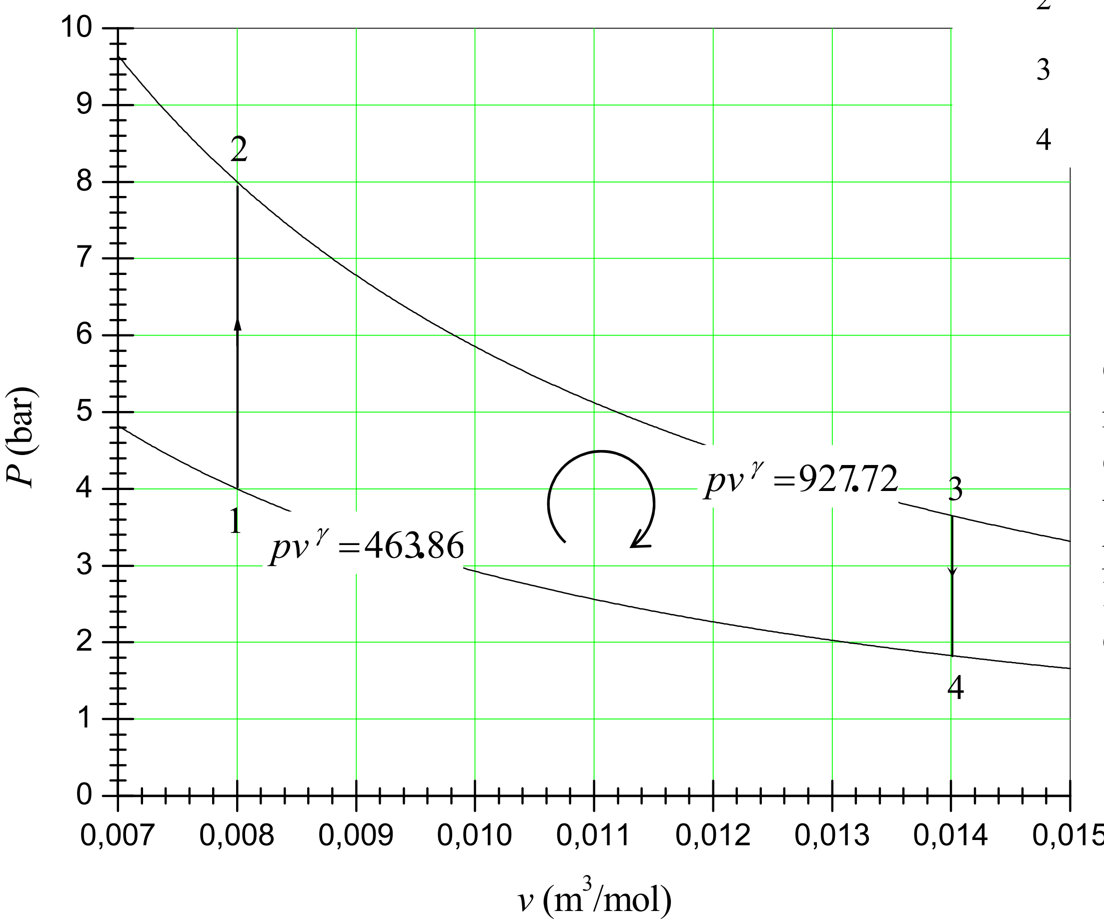
CICLO DE POTENCIA

PROBLEMA 4 (CONT.)

A) Coordenadas volumen específico, presión y temperatura de todos los puntos notables del ciclo

Representación gráfica cuantitativa

	v (m^3/mol)	P (Pa)	P (bar)	T (K)
1	0,008	400000	4,00	385
2	0,008	800000	8,00	770
3	0,014	365457	3,65	615
4	0,014	182729	1,83	308



Comentario: observe que los valores numéricos de las constantes de las ecuaciones adiabáticas corresponden a volúmenes específicos en m^3/mol y presiones en Pa, aunque en la escala de la representación gráfica se hayan elegido las unidades de presión en bar.

PROBLEMA 4 (CONT.)

B) Calcule el calor y el trabajo asociado a cada etapa del ciclo y determine su rendimiento.

$$\gamma = \frac{c_P}{c_V} \qquad c_P - c_V = R \qquad c_V = \frac{R}{(\gamma - 1)} = 20.875 \ \text{J/K} \cdot \text{mol}$$

$$w_{adiab23} = \frac{p_2 v_2 - p_3 v_3}{\gamma - 1} \qquad q_{V12} = c_V\left(T_2 - T_1\right)$$

$$w_{adiab41} = \frac{p_4 v_4 - p_1 v_1}{\gamma - 1} \qquad q_{V34} = c_V\left(T_4 - T_3\right)$$

En los procesos isocoros no hay trabajo. En los adiabáticos, no hay transferencia de calor.

	w (J/mol)	q (J/mol)
1→2		8000
2→3	3209	
3→4		-6396
4→1	-1604	

	v (m³/mol)	P (Pa)	P (bar)	T (K)
1	0,008	400000	4,00	385
2	0,008	800000	8,00	770
3	0,014	365457	3,65	615
4	0,014	182729	1,83	308

$$\eta = \frac{w_{23} + w_{41}}{q_{12}} = 0.201 \quad (20.1\%)$$

PROBLEMA 5

Un gas ideal a 273 K tiene una densidad de 50 moles/m³. Su coeficiente adiabático es γ = 1.40. Este gas se somete a una compresión adiabática reversible hasta que su presión se duplica y luego a una expansión isoterma reversible hasta restituir el volumen original. Constante universal de los gases R = 8,314 kJ/(K·kmol).

A) Determine la temperatura final.

B) Determine el trabajo neto de los dos procesos.

C) Calcule la variación de entropía sufrida por el gas.

A) Tomamos como base de cálculo 50 moles de gas, que en las condiciones iniciales ocupan V_1 = 1 m³.

La presión inicial se obtiene a través de la ecuación del gas ideal

$$p = \frac{n}{V}RT \qquad p_1 = 50\frac{\text{mol}}{\text{m}^3}8.314\frac{\text{J}}{\text{K}\cdot\text{mol}}273\,\text{K} = 113486 \text{ Pa}$$

Proceso adiabático:

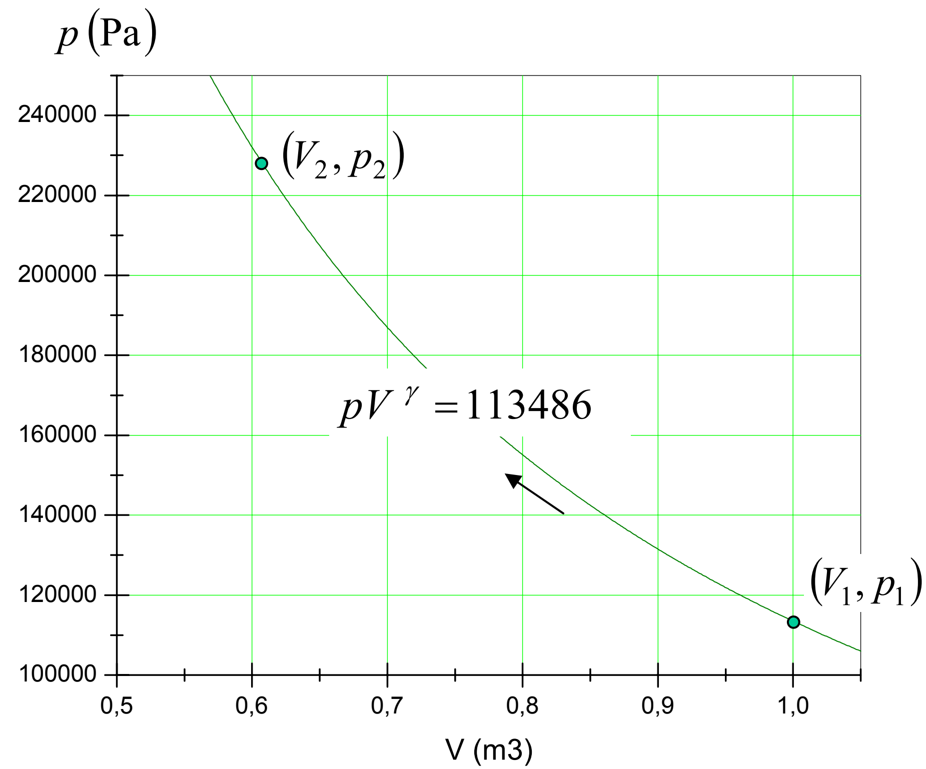
$$p_1 V_1^{\gamma} = 113486 \cdot 1^{1.4} = 113486$$

$$p_1 V_1^{\gamma} = p_2 V_2^{\gamma} = 113486$$

$$V_2^{\gamma} = \frac{113486}{p_2} = \frac{113486}{2p_1} = \frac{1}{2}$$

$$V_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/1.4} = 0.6095 \text{ m}^3$$

$$p_2 = 2p_1 = 226972 \text{ Pa}$$



PROBLEMA 5 (CONT.)

A) Determinación de la temperatura final (después del proceso isotermo).

Proceso isotermo: $T_2 = \dfrac{p_2 V_2}{nR} = \dfrac{2 \cdot 113486 \cdot 0.6095}{50 \cdot 8{,}314} = 332.8 \text{ K} = T_3$ $\quad (V_3 = V_1 \text{ de acuerdo con el enunciado})$

B) Trabajo $\quad W_{adiabático} = \dfrac{p_1 V_1 - p_2 V_2}{\gamma - 1} = \dfrac{nR(T_1 - T_2)}{\gamma - 1} = \dfrac{50 \cdot 8.314(273 - 332.8)}{1.4 - 1} = -62147 \text{ J}$

(Observe que no es necesario calcular la presión p_3)

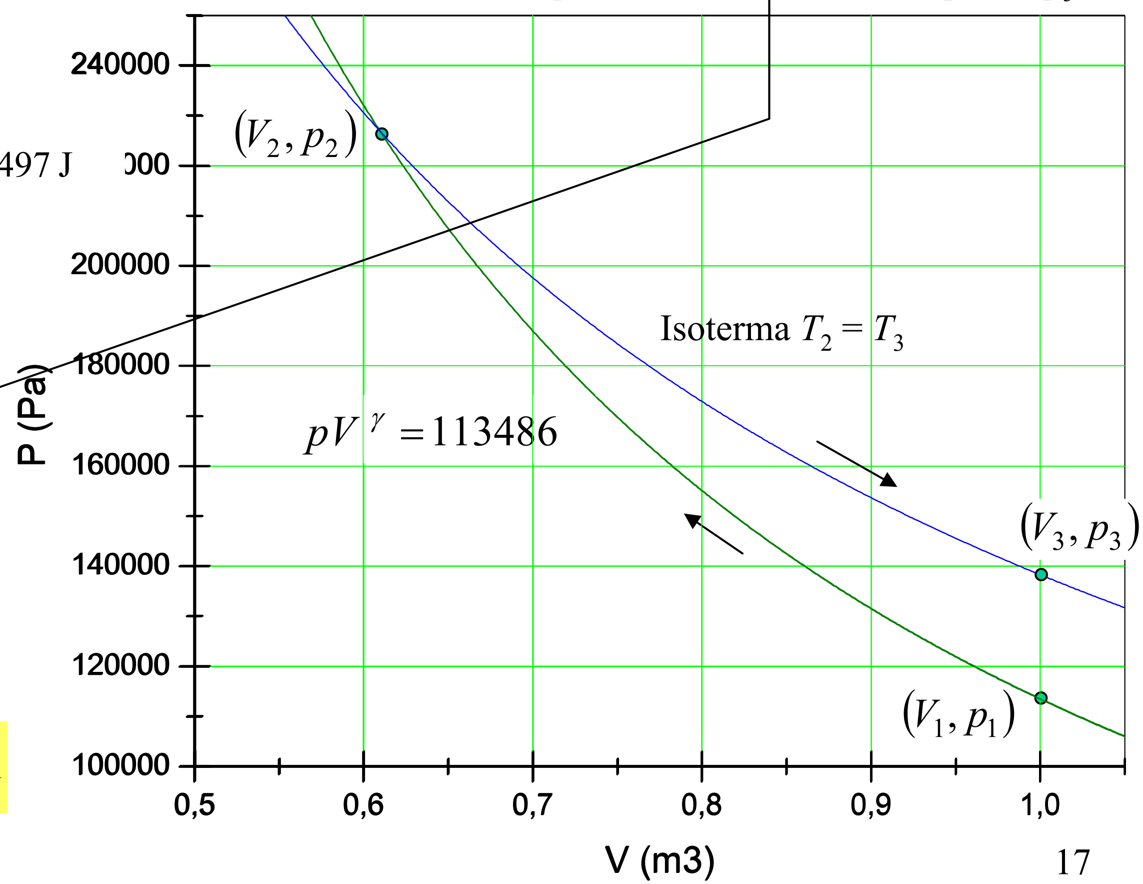
$$W_{isotermo} = nRT_2 \ln \frac{V_3}{V_2}$$

$$W_{isotermo} = 50 \cdot 8.314 \cdot 332.8 \ln \frac{1}{0.6095} = 68497 \text{ J}$$

$$W_{neto} = W_{adiabático} + W_{isotermo} =$$
$$= -62147 + 68497 = 6350 \text{ J}$$

Recordemos ahora que este es el trabajo neto asociado a 50 moles (base de cálculo elegida arbitrariamente). Expresemos el resultado como magnitud específica:

$$w_{neto} = \frac{W_{neto}}{n} = \frac{6350 \text{ J}}{50 \text{ mol}} = 127 \text{ J/mol}$$



C) Cambios de entropía

En la etapa adiabática reversible no hay intercambio de calor, por tanto la variación de entropía es nula.

Etapa isoterma $\Delta U_{isotermo} = Q_{isotermo} - W_{isotermo} = 0$ $\quad Q_{isotermo} = W_{isotermo} = 68497 \text{ J}$

La energía interna de un gas ideal es función exclusiva de la temperatura

$$\Delta S = \frac{Q_{isotermo}}{T_2} = \frac{68497}{332.8} = 205.8 \text{ J/K}$$

Esta es la entropía de la transformación sufrida por 50 moles de gas. Expresemos el resultado como magnitud específica:

$$\Delta s = \frac{\Delta S}{n} = \frac{205.8 \text{ J/K}}{50 \text{ mol}} = 4.12 \quad \frac{\text{J}}{\text{K} \cdot \text{mol}}$$

PROBLEMA 6

Un gas ideal de coeficiente adiabático γ sufre una transformación politrópica de índice k entre las condiciones (V_1, p_1) y (V_2, p_2). Determine el calor cedido o ganado por el gas en dicho proceso.

I. Trabajo asociado con el proceso politrópico 1→2: $pV^k = C$

$$W_{politrópico} = \frac{p_1V_1 - p_2V_2}{k-1}$$

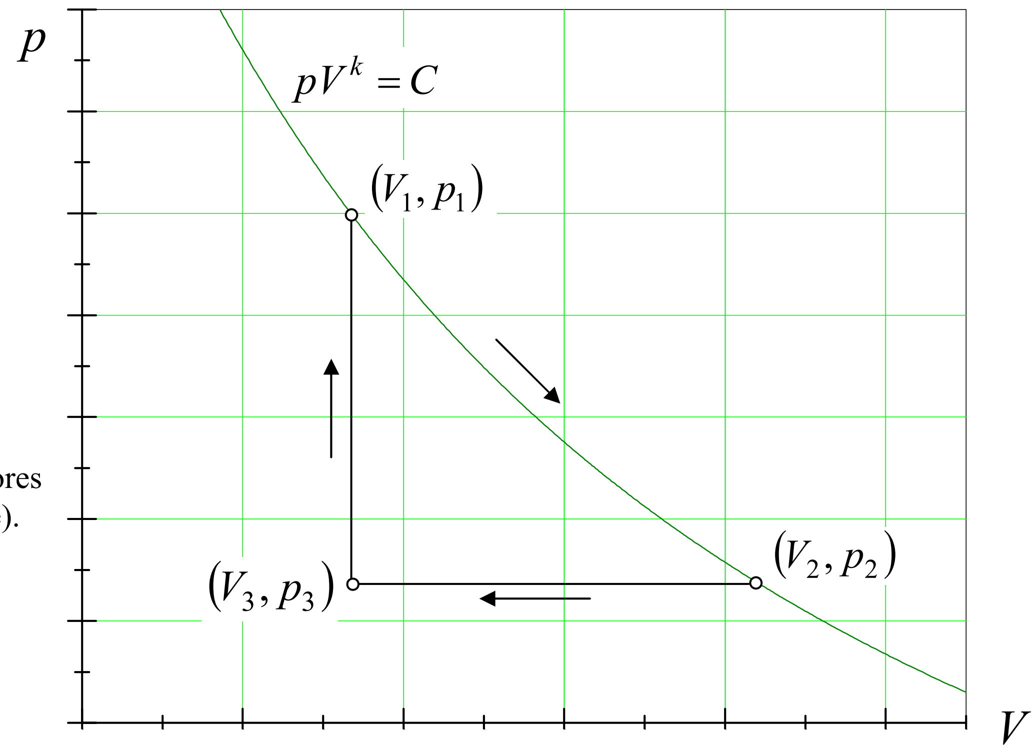
$$W = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{C}{V^k}\,dV = \left[C\,\frac{V^{1-k}}{1-k}\right]_{V_1}^{V_2} = \left[pV^k\,\frac{V^{1-k}}{1-k}\right]_{V_1}^{V_2} = \frac{p_2V_2 - p_1V_1}{1-k} = \frac{p_1V_1 - p_2V_2}{k-1}$$

II. Consideremos el proceso politrópico como parte de un ciclo de 3 etapas:

1→2 Politrópica

2→3 Isobara

3→1 Isocora



III. Cálculo de trabajo y calor en la etapa isobara 2→3.

(Sea n el número de moles de gas y c_p y c_V los calores específicos molares a presión y volumen constante).

$$W = \int_{V_2}^{V_3} p\,dV = p_2\left(V_3 - V_2\right)$$

$$Q = nc_p\left(T_3 - T_2\right) = \frac{c_p}{R}\left(p_3V_3 - p_2V_2\right)$$

hemos aplicado la ec. del gas ideal $T_i = \dfrac{p_i\,V_i}{n\,R}$

PROBLEMA 6 (CONT)

UCLM

IV. Cálculo de calor en la etapa isocora 3→1 (el trabajo es nulo) $Q = nc_V(T_1 - T_3) = \frac{c_V}{R}(p_1V_1 - p_3V_3)$

V. Variación de energía interna

$\Delta U = Q - W$

para cualquier ciclo completo ha de ser nula.

$\Delta U = \Delta U_{12} + \Delta U_{23} + \Delta U_{31} = 0$

$$\underbrace{Q_{politrópico} - \frac{p_1V_1 - p_2V_2}{k-1}}_{\Delta U_{12}} + \underbrace{\frac{c_p}{R}(p_3V_3 - p_2V_2) - p_2(V_3 - V_2)}_{\Delta U_{23}} + \underbrace{\frac{c_V}{R}(p_1V_1 - p_3V_3)}_{\Delta U_{31}} = 0$$

$$Q_{politrópico} = \frac{p_1V_1 - p_2V_2}{k-1} - \frac{c_p}{R}(p_3V_3 - p_2V_2) + p_2(V_3 - V_2) - \frac{c_V}{R}(p_1V_1 - p_3V_3)$$

VI. Tengamos en cuenta las siguientes igualdades:

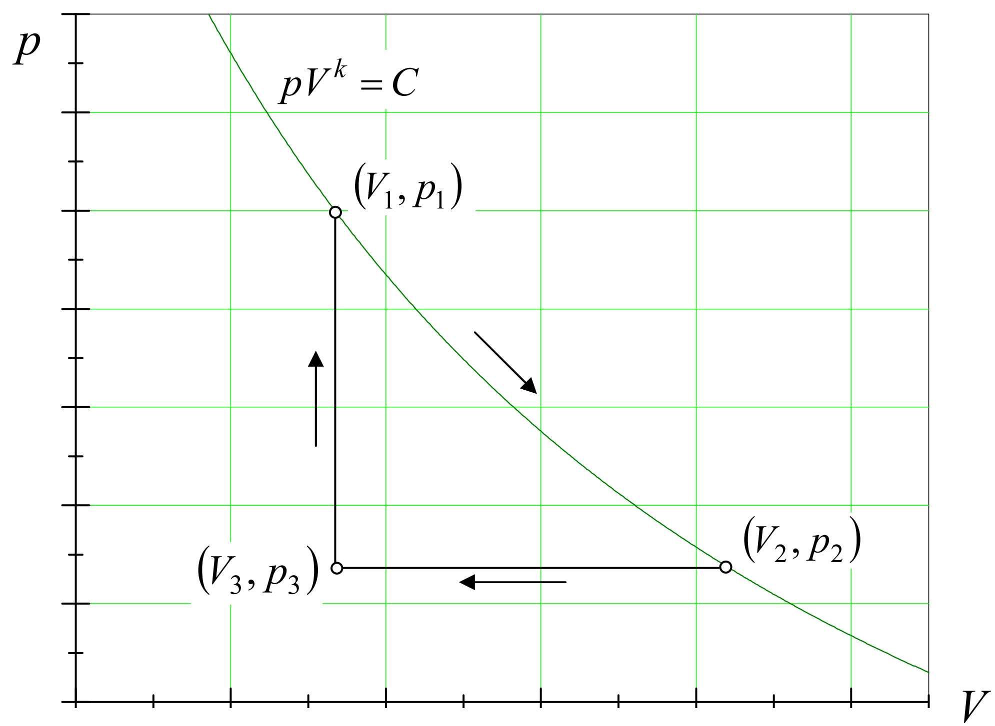
Relación de Mayer: $c_P - c_V = R$

Coeficiente adiabático: $\gamma = \frac{c_P}{c_V}$

$c_V(\gamma - 1) = R$

$\frac{c_V}{R} = \frac{1}{(\gamma - 1)}$ $\qquad$ $\frac{c_P}{R} = \frac{\gamma}{(\gamma - 1)}$

$V_1 = V_3 \qquad P_2 = P_3$



PROBLEMA 6 (CONT)

Operaciones: $$Q_{politrópico}=\frac{p_1V_1-p_2V_2}{k-1}-\frac{c_p}{R}\left(p_3V_3-p_2V_2\right)+p_2\left(V_3-V_2\right)-\frac{c_V}{R}\left(p_1V_1-p_3V_3\right)$$

$$\frac{c_V}{R}=\frac{1}{(\gamma-1)} \qquad \frac{c_P}{R}=\frac{\gamma}{(\gamma-1)} \qquad V_1=V_3 \quad P_2=P_3$$

Esta deducción es válida para $\gamma\neq 1$ (cuando $\gamma=1$ la transformación es isoterma).

Sustituyendo calores específicos en función de γ

$$Q_{politrópico}=\frac{p_1V_1-p_2V_2}{k-1}-\frac{\gamma}{\gamma-1}\left(p_3V_3-p_2V_2\right)+p_2\left(V_3-V_2\right)-\frac{1}{\gamma-1}\left(p_1V_1-p_3V_3\right)$$

Sustituyendo V_3, P_3 por V_1 y P_2 respectivamente

$$Q_{politrópico}=\frac{p_1V_1-p_2V_2}{k-1}-\frac{\gamma}{\gamma-1}\left(p_2V_1-p_2V_2\right)+p_2\left(V_1-V_2\right)-\frac{1}{\gamma-1}\left(p_1V_1-p_2V_1\right)$$

$$Q_{politrópico}=\frac{p_1V_1-p_2V_2}{k-1}-\frac{\gamma\, p_2V_1}{\gamma-1}+\frac{\gamma\, p_2V_2}{\gamma-1}+p_2V_1-p_2V_2-\frac{p_1V_1}{\gamma-1}+\frac{p_2V_1}{\gamma-1}$$

Reordenando $$Q_{politrópico}=\frac{p_1V_1-p_2V_2}{k-1}+\frac{\gamma\, p_2V_2}{\gamma-1}-p_2V_2-\frac{p_1V_1}{\gamma-1}+\frac{p_2V_1}{\gamma-1}-\frac{\gamma\, p_2V_1}{\gamma-1}+p_2V_1$$

Factor común $$Q_{politrópico}=\frac{p_1V_1-p_2V_2}{k-1}+\frac{\gamma\, p_2V_2}{\gamma-1}-\frac{(\gamma-1)p_2V_2}{\gamma-1}-\frac{p_1V_1}{\gamma-1}+\left[\frac{1}{\gamma-1}-\frac{\gamma}{\gamma-1}+1\right]p_2V_1$$

$$Q_{politrópico}=\frac{p_1V_1-p_2V_2}{k-1}+\cancel{\frac{\gamma\, p_2V_2}{\gamma-1}}-\cancel{\frac{\gamma\, p_2V_2}{\gamma-1}}+\frac{p_2V_2}{\gamma-1}-\frac{p_1V_1}{\gamma-1}+\underbrace{\left[\frac{1}{\gamma-1}-\frac{\gamma}{\gamma-1}+\frac{\gamma-1}{\gamma-1}\right]}_{0}p_2V_1$$

$$Q_{politrópico}=\frac{p_1V_1-p_2V_2}{k-1}+\frac{p_2V_2-p_1V_1}{\gamma-1}$$

Cuestión adicional: Compruebe que en función de las temperaturas el calor absorbido o cedido por el gas ideal en el proceso politrópico es

$$Q_{politrópico}=nR\left(T_2-T_1\right)\left[\frac{k-\gamma}{(k-1)(\gamma-1)}\right]$$

Caso especial: cuando el proceso es adiabático $k=\gamma$ y entonces $$Q_{adiabático}=0$$

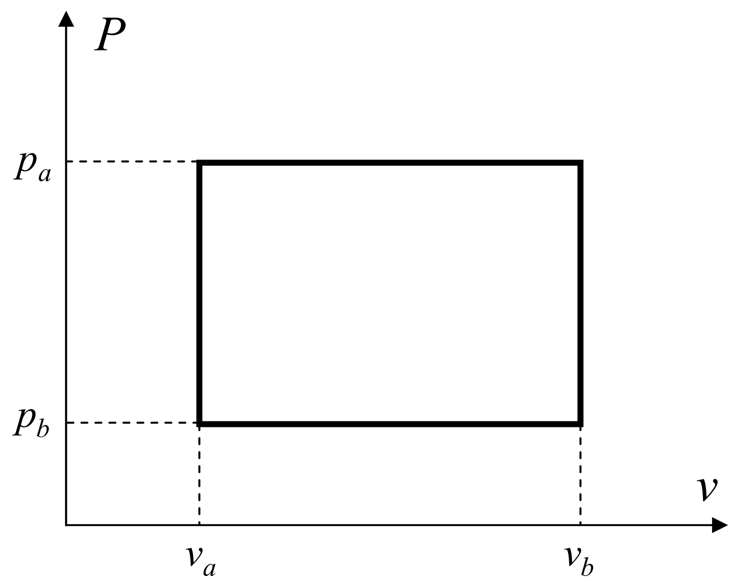
PROBLEMA 7

Un gas ideal describe en sentido horario el ciclo termodinámico que se presenta en la figura. El volumen específico v_a = 10 litros/mol, y $v_b = 2\ v_a$. La temperatura máxima del ciclo es 673 K, y se sabe que el trabajo del proceso de compresión en cada ciclo es -1.80 kJ/mol. Si el coeficiente adiabático del gas es $\gamma = 1.40$ y la constante universal de los gases R = 8,314 J/(K·mol), se pide:

A) Determine las coordenadas v, p, T de todos los puntos notables del ciclo..

B) Calcule el calor y la variación de energía interna en cada una de las etapas. ¿Cuál es el rendimiento del ciclo?

C) Calcule la variación de entropía sufrida en cada etapa del ciclo.

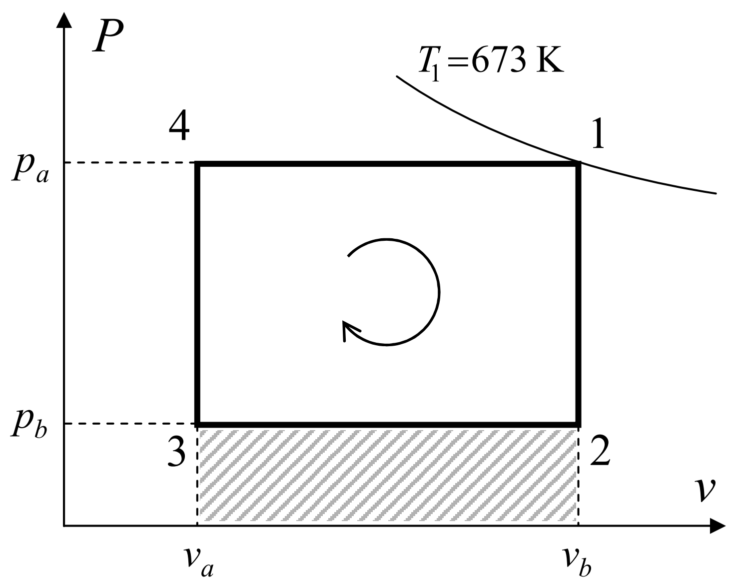


Sugerencia: al realizar los cálculos numere los puntos notables en sentido horario empezando por el de mayor temperatura.

PROBLEMA 7 (CONT.)

A) Coordenadas *v, p, T*

La isoterma más alejada del origen es la que corresponde a la mayor temperatura en un diagrama *p*-*v*. En este caso, el punto del ciclo por el que pasa dicha isoterma es la esquina superior derecha.



$$v_a = 0.010\ \text{m}^3/\text{mol}$$

$$v_b = 2\,v_a = 0.020\ \text{m}^3/\text{mol}$$

$$v_b = 2\,v_a \qquad v_1 = v_2 = v_b = 2\,v_a \qquad p_1 = p_4 = \frac{R\,T_1}{v_1}$$

$$v_3 = v_4 = v_a$$

$$T_4 = \frac{p_4 v_4}{R}$$

	v (m^3/mol)	p (Pa)	T (K)
1	0,020	279766	673,0
2	0,020	180000	433,0
3	0,010	180000	216,5
4	0,010	279766	336,5

$$w_{23} = p_2\left(v_3 - v_2\right)$$

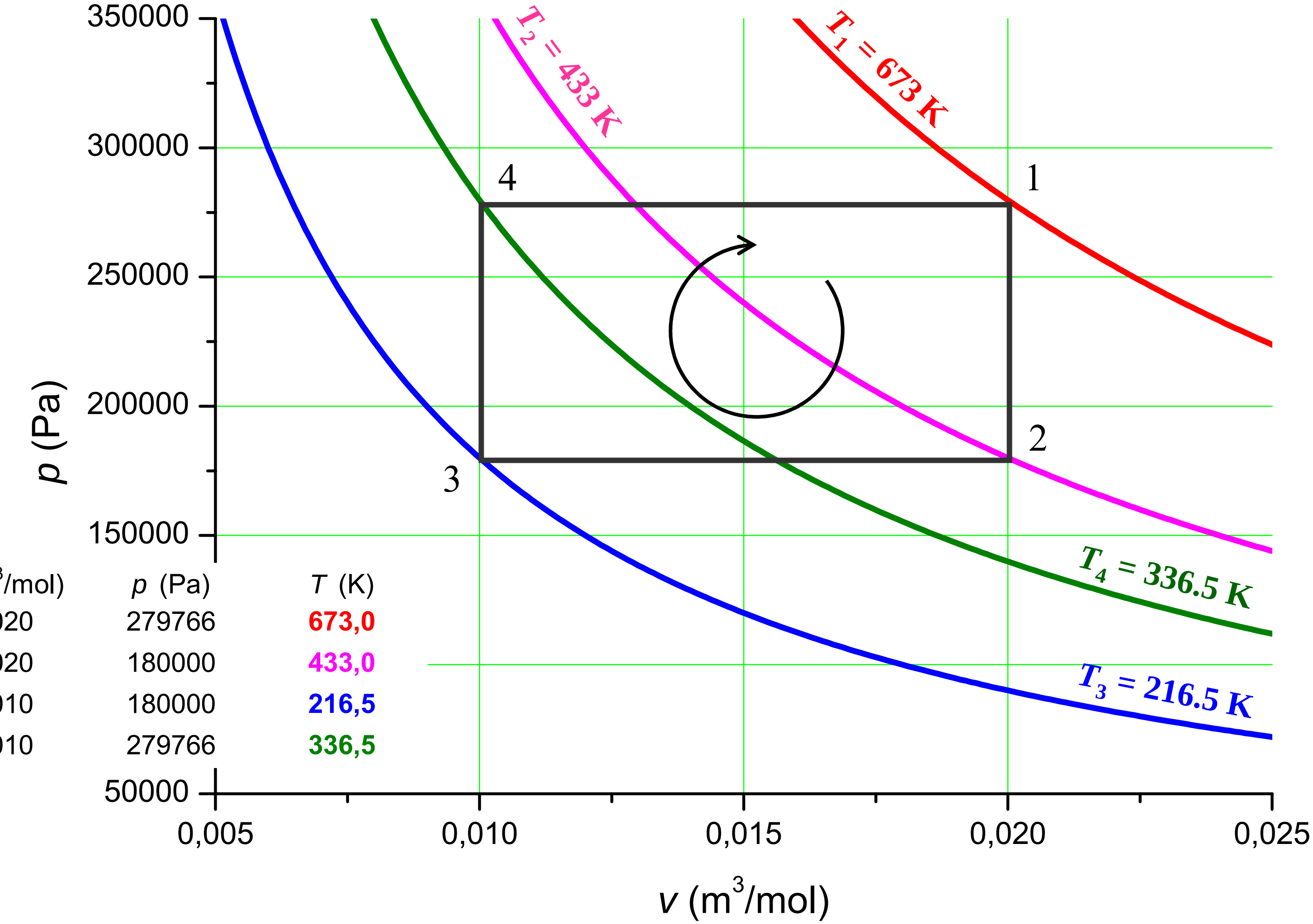
$$w_{23} = -1800\ \text{J/mol}$$

$$p_2 = p_3 = \frac{w_{23}}{\left(v_3 - v_2\right)}$$

$$T_2 = \frac{p_2 v_2}{R} \qquad T_3 = \frac{p_3 v_3}{R}$$

UCLM

PROBLEMA 7 (CONT.)



	v (m^3/mol)	p (Pa)	T (K)
1	0,020	279766	673,0
2	0,020	180000	433,0
3	0,010	180000	216,5
4	0,010	279766	336,5

PROBLEMA 7 (CONT.)

UCLM

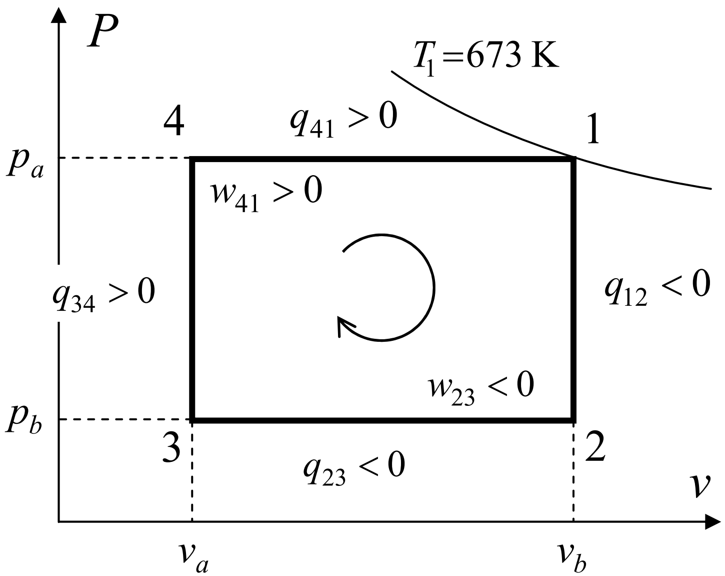
B) Calor, variación de energía interna y rendimiento.

	v (m^3/mol)	p (Pa)	T (K)
1	0,020	279766	673,0
2	0,020	180000	433,0
3	0,010	180000	216,5
4	0,010	279766	336,5

$$w_{23} = p_2(v_3 - v_2)$$
$$w_{41} = p_1(v_1 - v_4)$$

$$q_{12} = c_V(T_2 - T_1)$$
$$q_{23} = c_p(T_3 - T_2)$$
$$q_{34} = c_V(T_4 - T_3)$$
$$q_{41} = c_p(T_1 - T_4)$$

$$\Delta u_{ij} = q_{ij} - w_{ij}$$



	w (J/mol)	q (J/mol)	Δu (J/mol)
1->2	0,0	-4988,3	-4988,3
2->3	-1800,0	-6300,0	-4500,0
3->4	0,0	2494,2	2494,2
4->1	2797,7	9791,8	6994,2
Σ =	997,7	997,7	0,0

$$\eta = \frac{w_{neto}}{q_{in}} = \frac{w_{41} + w_{23}}{q_{34} + q_{41}} = 0.081 \quad (8.1\%)$$

C) Variaciones de entropía.

Proceso isocoro $i \to j$, $v = \text{cte}$ $\quad \Delta s_{ij} = \int_{T_i}^{T_j} \frac{\delta q_V}{T} = \int_{T_i}^{T_j} \frac{c_V}{T} dT = c_V \ln \frac{T_j}{T_i}$

Proceso isobaro $i \to j$, $p = \text{cte}$ $\quad \Delta s_{ij} = \int_{T_i}^{T_j} \frac{\delta q_p}{T} = \int_{T_i}^{T_j} \frac{c_p}{T} dT = c_p \ln \frac{T_j}{T_i}$

	Δs (J/K.mol)	
1->2	-9,17	isocoro
2->3	-20,17	isobaro
3->4	9,17	isocoro
4->1	20,17	isobaro

PROBLEMA 8

Calcule la variación de entropía de un gas ideal (índice adiabático $\gamma = 1.4$) cuando experimenta un proceso politrópico reversible de índice $k = 3$ entre las condiciones iniciales $v_1 = 0.023$ m^3/mol, $p_1 = 1.80$ bar y un volumen específico final $v_2 = 0.025$ m^3/mol. $R = 8{,}314$ J/(K·mol).

Cálculo de la variación de entropía en el proceso 1→2 a lo largo de una politrópica reversible

Trazamos una adiabática reversible que pase por 2.

Después trazamos una isoterma reversible que pase por 1.

La adiabática y la isoterma se cortan en 3. Al tratarse de un ciclo tenemos:

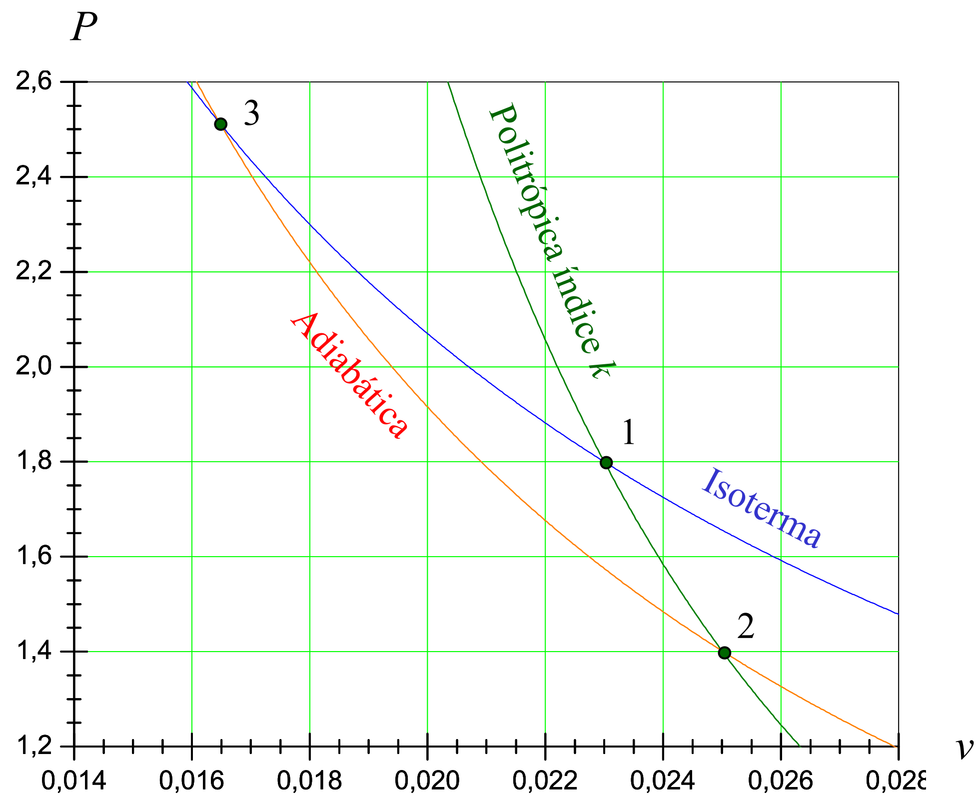
$$\Delta s_{ciclo} = \Delta s_{12} + \Delta s_{23} + \Delta s_{31} = 0$$

$$\Delta s_{12} = -\Delta s_{23} - \Delta s_{31}$$

La variación de entropía específica molar en una etapa infinitesimal de un proceso termodinámico está dada por

$$ds = \frac{\delta q}{T}$$

Estudio de entropías de las etapas del ciclo (véase página siguiente).



Proceso 2→3: Se trata de una adiabática reversible, por tanto $\delta\, q_{ad} = 0$ en todos los puntos de la trayectoria y en consecuencia

$$\Delta s_{23} = 0$$

Proceso 3→1: Es una isoterma, por tanto

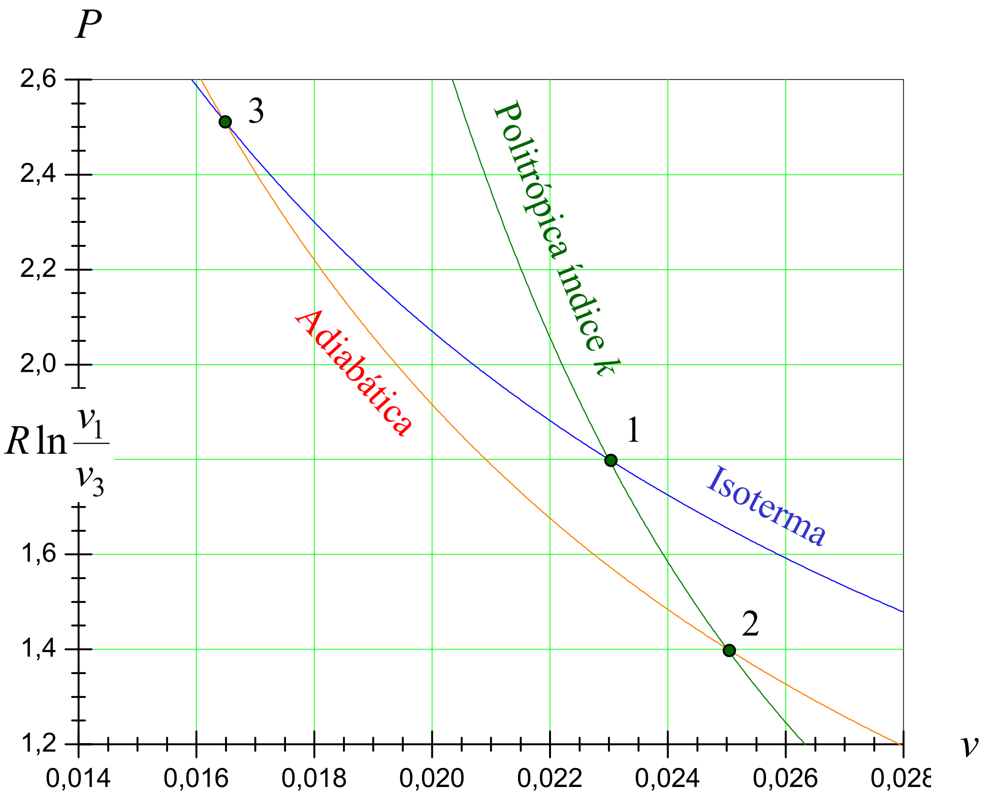
$$ds = \frac{\delta\, q_{isot}}{T_1}$$

$$\Delta s_{31} = \int \frac{\delta q_{isot}}{T_1} = \frac{1}{T_1}\int \delta q_{isot} = \frac{1}{T_1} R T_1 \ln\frac{v_1}{v_3} = R\ln\frac{v_1}{v_3}$$

(El calor asociado a un proceso isotermo es igual al trabajo del mismo)

Variación de entropía en el proceso politrópico 1→2:

$$\Delta s_{12} = -\Delta s_{31} = -R\ln\frac{v_1}{v_3}$$



Por tanto, el cálculo de la variación de entropía del proceso politrópico reversible se reduce en definitiva a calcular las coordenadas del punto 3, donde se cortan la adiabática y la isoterma.

Además del volumen especifico necesario, calcularemos todas las coordenadas desconocidas del ciclo.

Punto inicial (1).
Conocemos volumen específico y presión, calculamos temperatura

$$p_1 v_1 = RT_1 \qquad T_1 = \frac{p_1 v_1}{R}$$

Punto final (2). Ecuación politrópica

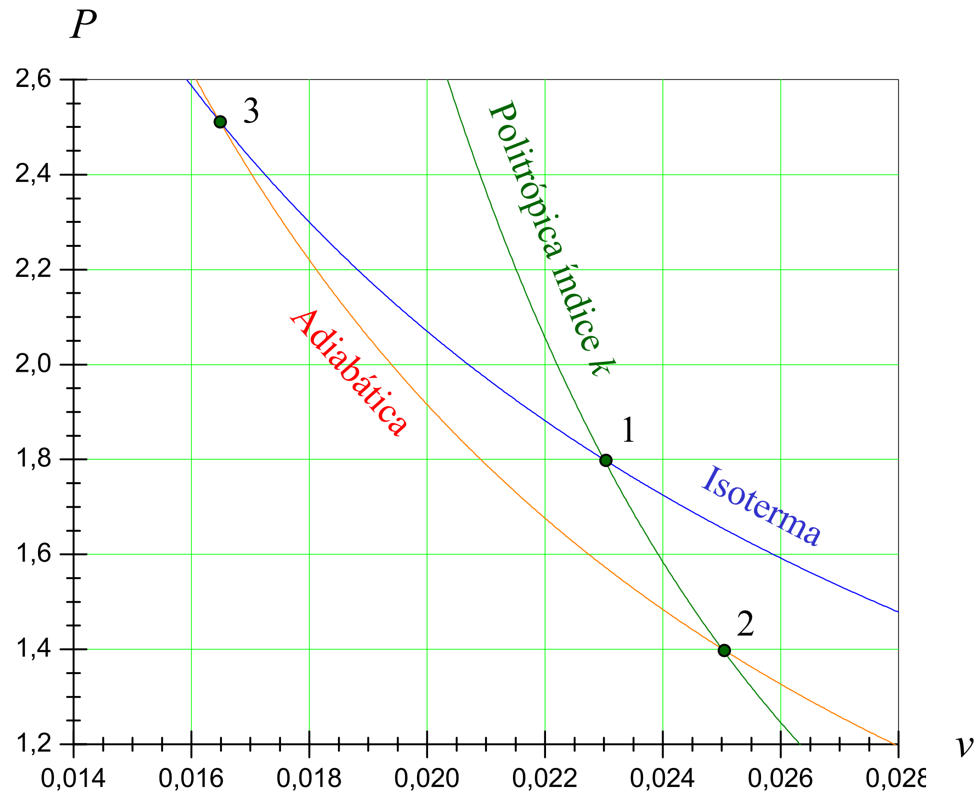
$$p_1 v_1^k = p_2 v_2^k \qquad p_2 = p_1\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^k$$

Ecuación de estado: $T_2 = \dfrac{p_2 v_2}{R}$

Punto (3)

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Adiabática} & p_3 v_3^\gamma = p_2 v_2^\gamma \\ \text{Isoterma} & p_3 v_3 = p_1 v_1\end{array}\right\} v_3^{\gamma-1} = \frac{p_2 v_2^\gamma}{p_1 v_1}$$

$$v_3 = \left(\frac{p_2 v_2^\gamma}{p_1 v_1}\right)^{1/(\gamma-1)} \qquad T_3 = T_1 \text{ (isoterma)} \qquad p_3 = \frac{RT_3}{v_3}$$



	v (m^3/mol)	P (bar)	T (K)
1	0,0230	1,80	498,0
2	0,0250	1,40	421,5
3	0,0165	2,51	498,0

Datos iniciales en fondo coloreado

Entropía específica del proceso politrópico 1→2

$$\Delta s_{12} = -R\ln\frac{v_1}{v_3} = -8.314\ln\frac{0.0230}{0.0165} = -2.77 \ \text{J/K}\cdot\text{mol}$$

PROBLEMA 9

Un gas ideal de coeficiente adiabático γ=1.4 describe un ciclo termodinámico formado por las siguientes etapas reversibles:

1. Etapa isobara a 1.8 bar, desde una temperatura de 300 K hasta que su volumen específico molar es 0.040 m^3/mol.
2. Expansión politrópica de índice k = 3, hasta que su temperatura es 300 K.
3. Compresión isotérmica hasta restablecer las condiciones iniciales.

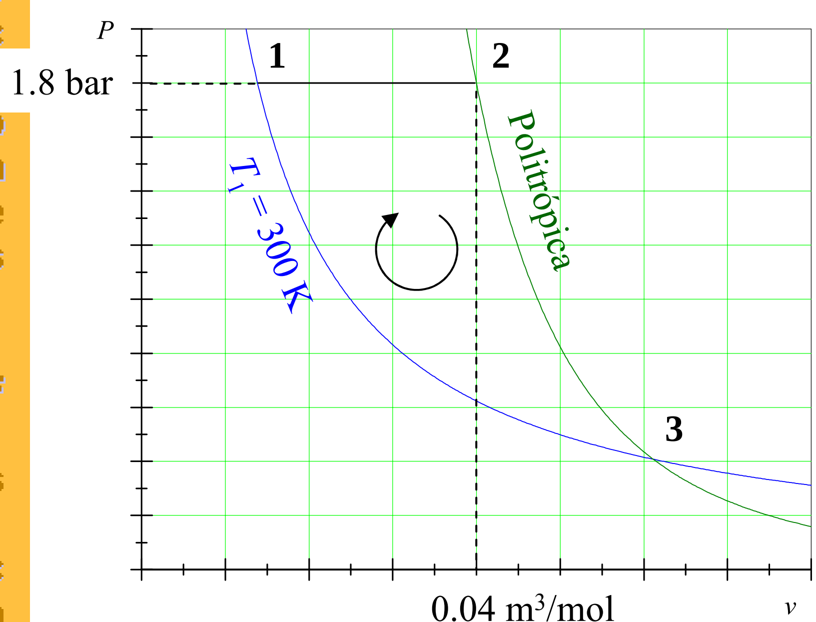
Determine:

A) Las coordenadas v, p, T de cada punto notable del ciclo.

B) Trabajo y calor en cada etapa y rendimiento del ciclo.

Dato: R = 8,314 kJ/(K·kmol)

C) La variación de entropía del gas en cada etapa del ciclo.



A) Coordenadas P, v, T

	v (m^3/mol)	p (Pa)	T (K)
1		180000	300,0
2	0,040	180000	
3			300,0

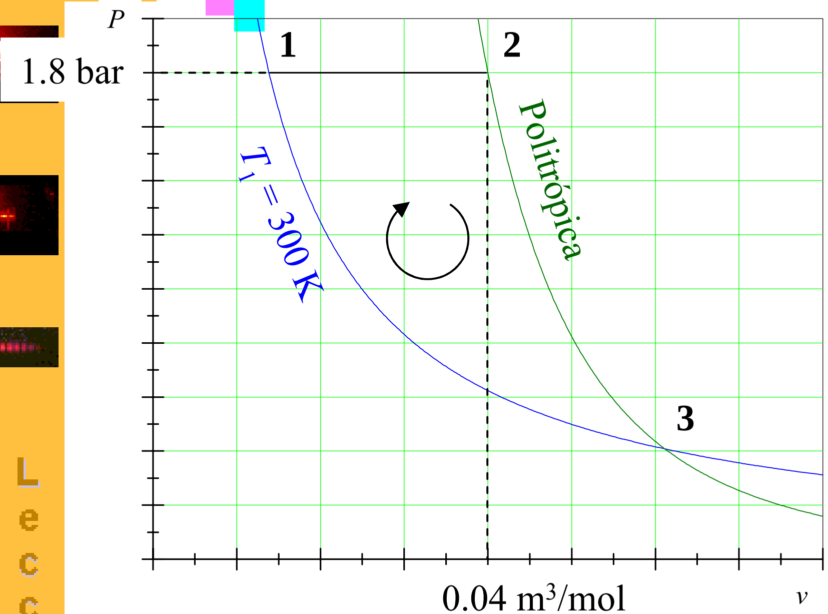
Ecuación de estado:

$$v_1 = \frac{RT_1}{p_1} = 0.014 \ \ m^3/\text{mol}$$

$$T_2 = \frac{p_2 v_2}{R} = 866 \ \ \text{K}$$

PROBLEMA 9 (CONT.)

A) Coordenadas v, p, T



	v (m³/mol)	p (Pa)	T (K)
1	0,014	180000	300,0
2	0,040	180000	866,0
3	0,068	36700	300,0

Cálculo del punto 3

Politrópica: $p_2 V_2^k = p_3 V_3^k \qquad p_2 n^k v_2^k = p_3 n^k v_3^k$

Isoterma: $p_1 V_1 = p_3 V_3 \qquad p_1 n v_1 = p_3 n v_3$

$$\frac{p_2 n^{k-1} v_2^k}{p_1 v_1} = n^{k-1} v_3^{k-1}$$

$$v_3 = \left(\frac{p_2 v_2^k}{p_1 v_1}\right)^{1/(k-1)} = 0.068 \ \text{m}^3/\text{mol} \qquad p_3 = \frac{R T_3}{v_3} = 36700 \ \text{Pa}$$

B) Trabajo y calor en cada etapa y rendimiento del ciclo.

Etapa 1→2, isobárica

$$w_{isobárico} = p_1 (v_2 - v_1)$$

$$q_{isobárico} = R \frac{\gamma}{(\gamma - 1)} (T_2 - T_1)$$

Etapa 2→3, politrópica

$$w_{politrópico} = \frac{p_2 v_2 - p_3 v_3}{k - 1}$$

$$q_{politrópico} = R (T_3 - T_2) \left[\frac{k - \gamma}{(k-1)(\gamma - 1)}\right]$$

(Vea resultado problema 6)

	w (J/mol)	q (J/mol)
1->2	4705,8	16470,3
2->3	2352,9	-9411,6
3->1	-3966,2	-3966,2
Σ =	3092,5	3092,5

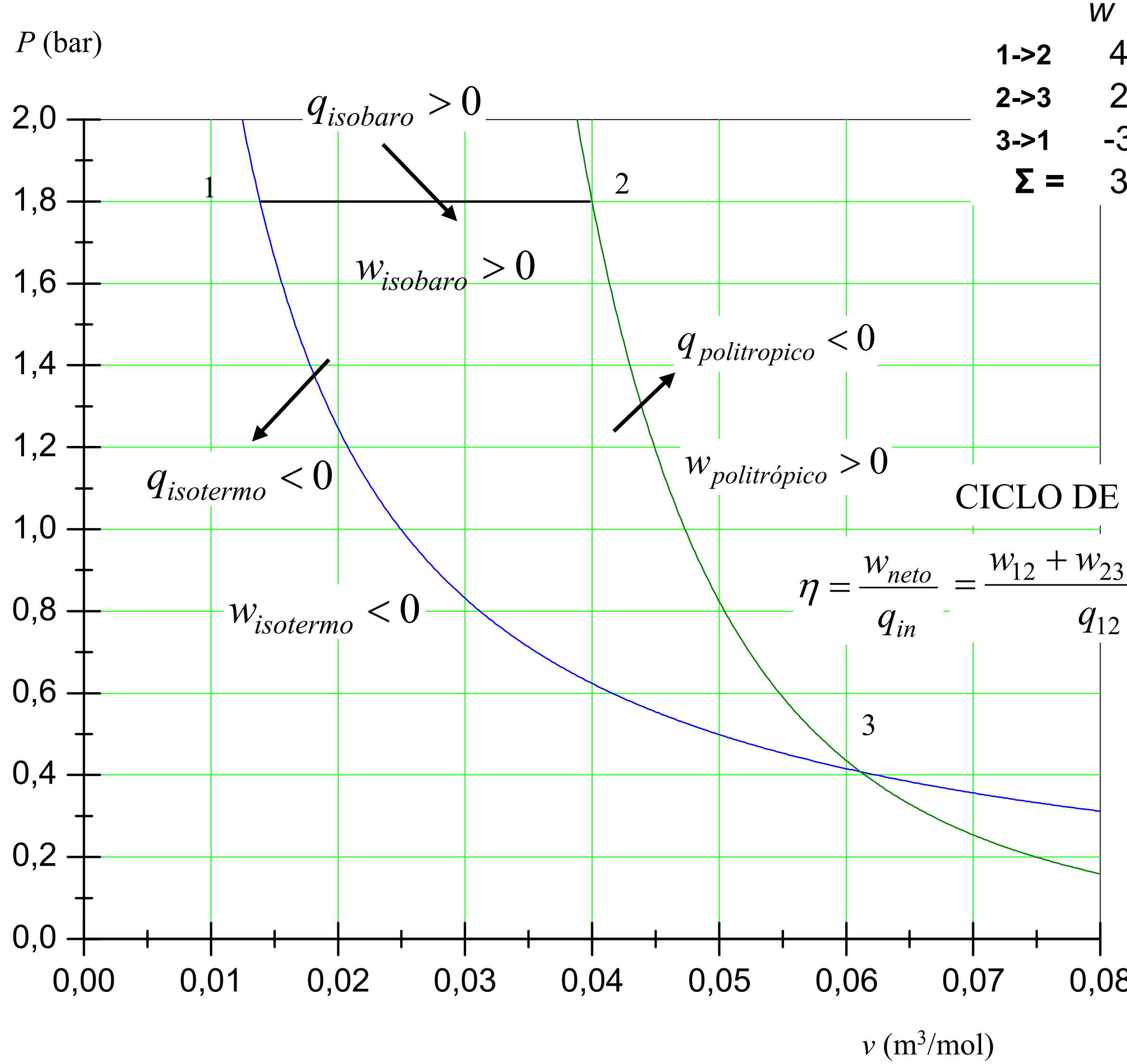
Etapa 3→1, isoterma

$$w_{isotermo} = q_{isotermo} = R T_1 \ln \frac{v_1}{v_3}$$

<u>Rendimiento</u>

$$\eta = \frac{w_{neto}}{q_{in}} = \frac{w_{12} + w_{23} + w_{31}}{q_{12}} = 0.188 \ (18.8\%)$$

PROBLEMA 9 (CONT.)



	w (J/mol)	q (J/mol)
1->2	4705,8	16470,3
2->3	2352,9	-9411,6
3->1	-3966,2	-3966,2
Σ =	3092,5	3092,5

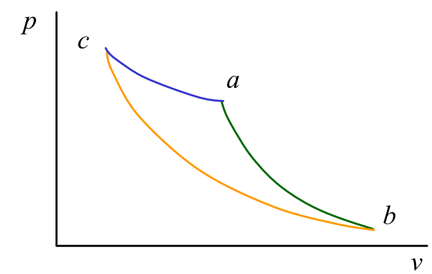
CICLO DE POTENCIA

$$\eta = \frac{w_{neto}}{q_{in}} = \frac{w_{12} + w_{23} + w_{31}}{q_{12}} = 0.188 \ (18.8\%)$$

PROBLEMA 9 (CONT.)

C) Variación de entropía del gas en cada etapa del ciclo.

(Recuerde que c es un punto que ***no está*** en la politrópica) ab



Calculamos para una politrópica en función de temperaturas y volúmenes.

Punto inicial $\rightarrow a$ Punto final $\rightarrow b$

Método 1. Usando el resultado del problema 8

$$v_c = \left(\frac{p_b v_b^{\gamma}}{p_a v_a}\right)^{1/(\gamma-1)}$$

Ecuación de estado: $p = RT/v$

$$\Delta s_{ab} = R\ln\frac{v_a}{v_c} = -R\ln\left[\frac{p_a^{1/(\gamma-1)} v_a^{1/(\gamma-1)}}{p_b^{1/(\gamma-1)} v_b^{\gamma/(\gamma-1)}}\, v_a\right] = -R\ln\left[\left(\frac{p_a}{p_b}\right)^{1/(\gamma-1)}\left(\frac{v_a}{v_b}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}\right]$$

$$\Delta s_{ab} = -R\ln\left[\left(\frac{RT_a/v_a}{RT_b/v_b}\right)^{1/(\gamma-1)}\left(\frac{v_a}{v_b}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}\right] = -R\ln\left[\left(\frac{T_a}{T_b}\right)^{1/(\gamma-1)}\left(\frac{v_b}{v_a}\right)^{1/(\gamma-1)}\left(\frac{v_a}{v_b}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}\right] = -R\ln\left[\left(\frac{T_a}{T_b}\right)^{1/(\gamma-1)}\left(\frac{v_a}{v_b}\right)\right]$$

$$\Delta s_{ab} = R\ln\left[\left(\frac{T_b}{T_a}\right)^{1/(\gamma-1)}\left(\frac{v_b}{v_a}\right)\right]$$

Método 2. Integrando el intercambio de energía en forma de calor en un proceso politrópico elemental.

$$\delta q_{\text{politrópico}} = R\left[\frac{k-\gamma}{(k-1)(\gamma-1)}\right]dT$$

(Vea resultado problema 6)

$$\Delta s_{ab} = \int \frac{\delta q_{\text{politrópico}}}{T} = R\left[\frac{k-\gamma}{(k-1)(\gamma-1)}\right]\int_{T_a}^{T_b}\frac{dT}{T} = R\left[\frac{k-\gamma}{(k-1)(\gamma-1)}\right]\ln\left(\frac{T_b}{T_a}\right) = R\left[\frac{k-\gamma}{(k-1)(\gamma-1)}\right]\ln\left(\frac{p_b v_b}{p_a v_a}\right)$$

PROBLEMA 9 (CONT.)

$$\Delta s_{ab} = R\left[\frac{k-\gamma}{(k-1)(\gamma-1)}\right]\ln\left[\left(\frac{v_a}{v_b}\right)^k \frac{v_b}{v_a}\right] = R\left[\frac{k-\gamma}{(k-1)(\gamma-1)}\right]\ln\left[\left(\frac{v_a}{v_b}\right)^{k-1}\right] = R\left[\frac{k-\gamma}{(\gamma-1)}\right]\ln\left(\frac{v_a}{v_b}\right)$$

$$\frac{p_b}{p_a} = \left(\frac{v_a}{v_b}\right)^k$$

$$\Delta s_{ab} = R\ln\left[\left(\frac{v_a}{v_b}\right)^{k/(\gamma-1)}\left(\frac{v_a}{v_b}\right)^{-\gamma/(\gamma-1)}\right]$$

Expresamos este cociente en una forma más adecuada

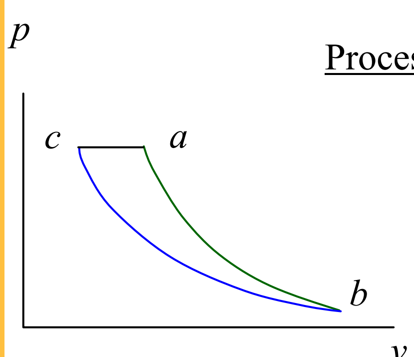
$$p_b v_b^k = p_a v_a^k \qquad \frac{RT_b}{v_b}v_b^k = \frac{RT_a}{v_a}v_a^k \qquad T_b v_b^{k-1} = T_a v_a^{k-1}$$

$$\frac{T_b}{T_a} = \left(\frac{v_a}{v_b}\right)^{k-1} \qquad \frac{T_b}{T_a} = \left(\frac{v_a}{v_b}\right)^k\left(\frac{v_a}{v_b}\right)^{-1} \qquad \left(\frac{v_a}{v_b}\right)^k = \frac{T_b}{T_a}\frac{v_a}{v_b}$$

$$\Delta s_{ab} = R\ln\left[\left(\frac{T_b}{T_a}\frac{v_a}{v_b}\right)^{1/(\gamma-1)}\left(\frac{v_a}{v_b}\right)^{-\gamma/(\gamma-1)}\right]$$

$$\Delta s_{ab} = R\ln\left[\left(\frac{T_b}{T_a}\right)^{1/(\gamma-1)}\left(\frac{v_a}{v_b}\right)^{-1}\right]$$

$$\Delta s_{ab} = R\ln\left[\left(\frac{T_b}{T_a}\right)^{1/(\gamma-1)}\left(\frac{v_b}{v_a}\right)\right]$$



Proceso isobaro *ca*

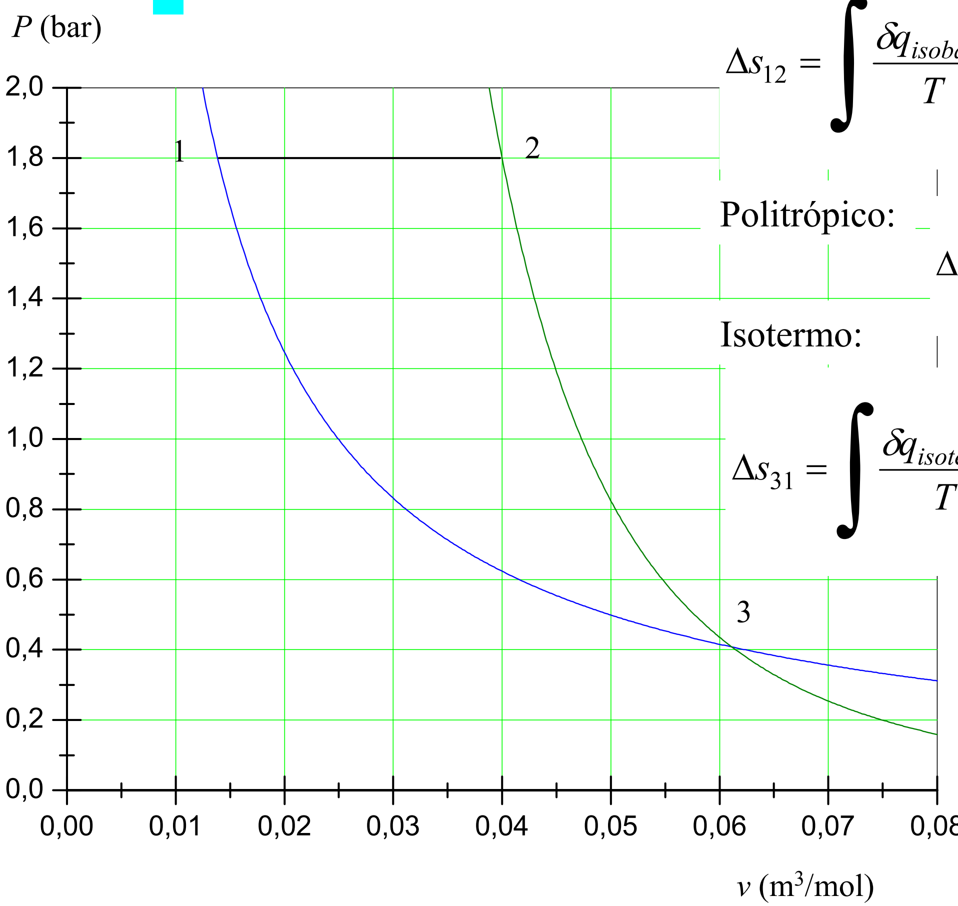
$$\Delta s_{ca} = \int \frac{\delta q_{isobaro}}{T} = \int_{T_a}^{T_c} \frac{c_p\,dT}{T} = c_p \ln\left(\frac{T_c}{T_a}\right) = \frac{\gamma\,R}{\gamma-1}\ln\left(\frac{T_c}{T_a}\right)$$

Proceso isotermo *bc*

$$\Delta s_{bc} = \int \frac{\delta q_{isotermo}}{T} = \frac{1}{T_c}\int \delta q_{isotermo} = \frac{q_{isotermo}}{T_c} = R\ln\left(\frac{v_c}{v_b}\right)$$

PROBLEMA 9 (CONT.)

Cálculos de entropía (cont.)



Isobaro:

$$\Delta s_{12} = \int \frac{\delta q_{isobaro}}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{c_p dT}{T} = c_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

Politrópico:

$$\Delta s_{23} = R \ln\left[\left(\frac{T_3}{T_2}\right)^{1/(\gamma-1)} \left(\frac{v_3}{v_2}\right)\right]$$

Isotermo:

$$\Delta s_{31} = \int \frac{\delta q_{isotermo}}{T} = \frac{1}{T_1} \int \delta q_{isotermo} = \frac{q_{isotermo}}{T_1} = R \ln\left(\frac{v_1}{v_3}\right)$$

	w (J/mol)	q (J/mol)	Δs (J/K.mol)
1->2	4705,8	16470,3	30,85
2->3	2352,9	-9411,6	-17,63
3->1	-3966,2	-3966,2	-13,22
Σ =	3092,5	3092,5	0,0

PROBLEMA 10

Un ciclo frigorífico reversible de Carnot se emplea para mantener a -18º C el congelador de un frigorífico instalado en un local donde la temperatura es 20º C. Como fluido de trabajo de este ciclo termodinámico se emplean 0.2 moles de un gas ideal de coeficiente adiabático $\gamma = 1.40$. Los vólúmenes máximo y mínimo del gas durante el ciclo son 2 litros y 5 litros. Se pide:

A) Calcule la presión al comienzo e la expansión isoterma y el volumen al final de la compresión adiabática.

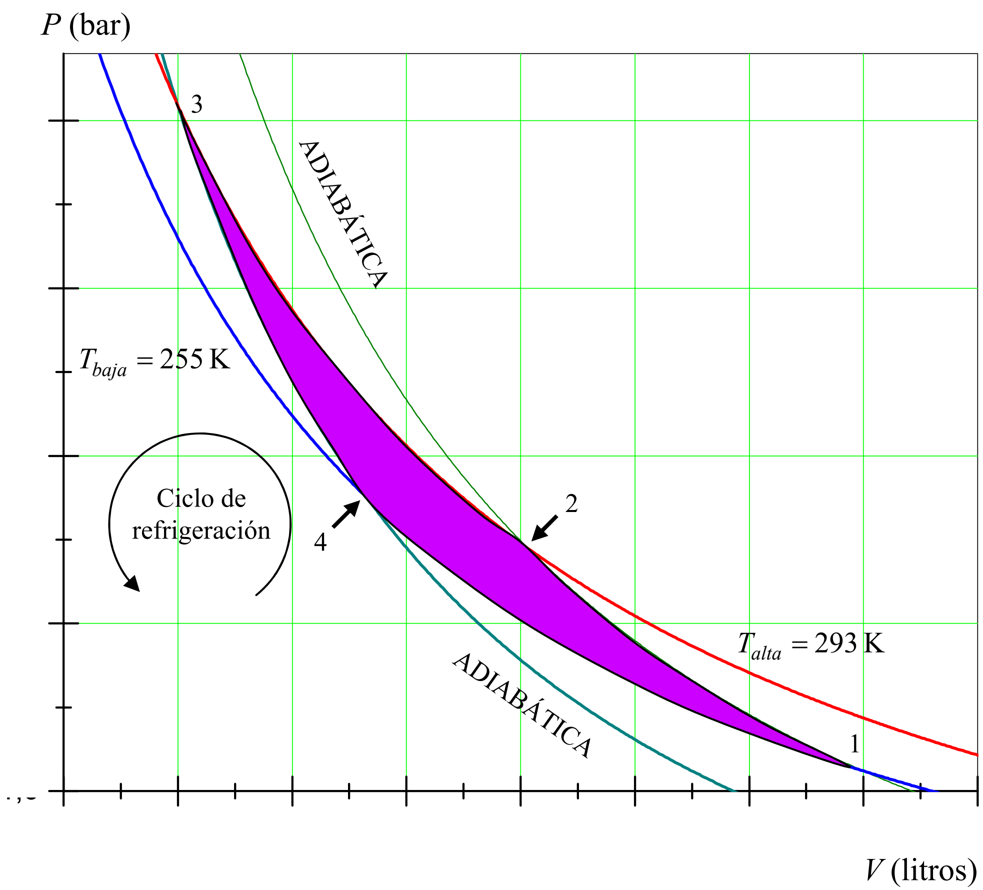
B) Calcule el trabajo necesario para extraer 1 kJ del foco frío.

C) Calcule el trabajo que debe aportarse por ciclo para mantener el frigorífico en funcionamiento.

D) La variación de entropía del gas en la etapa isoterma a baja temperatura.

Dato: $R = 8{,}314$ kJ/(K·kmol)

PROBLEMA 10 (CONT.)



Compresión adiabática $1 \rightarrow 2$

Compresión isoterma $2 \rightarrow 3$

El fluido de trabajo cede calor al foco caliente

Expansión adiabática $3 \rightarrow 4$

Expansión isoterma $4 \rightarrow 1$

El fluido de trabajo toma calor del foco frío

Cálculo de las presiones (conocidos los volúmenes) $P = \dfrac{nRT}{V}$

Cálculo de los volúmenes V_2 y V_4:

$$P_a\, V_a^\gamma = P_b\, V_b^\gamma \qquad \frac{nRT_a}{V_a} V_a^\gamma = \frac{nRT_b}{V_b} V_b^\gamma$$

$$PV = nRT \qquad T_a\, V_a^{\gamma-1} = T_b\, V_b^{\gamma-1}$$

Datos: tenemos los siguientes datos de temperatura y volumen:

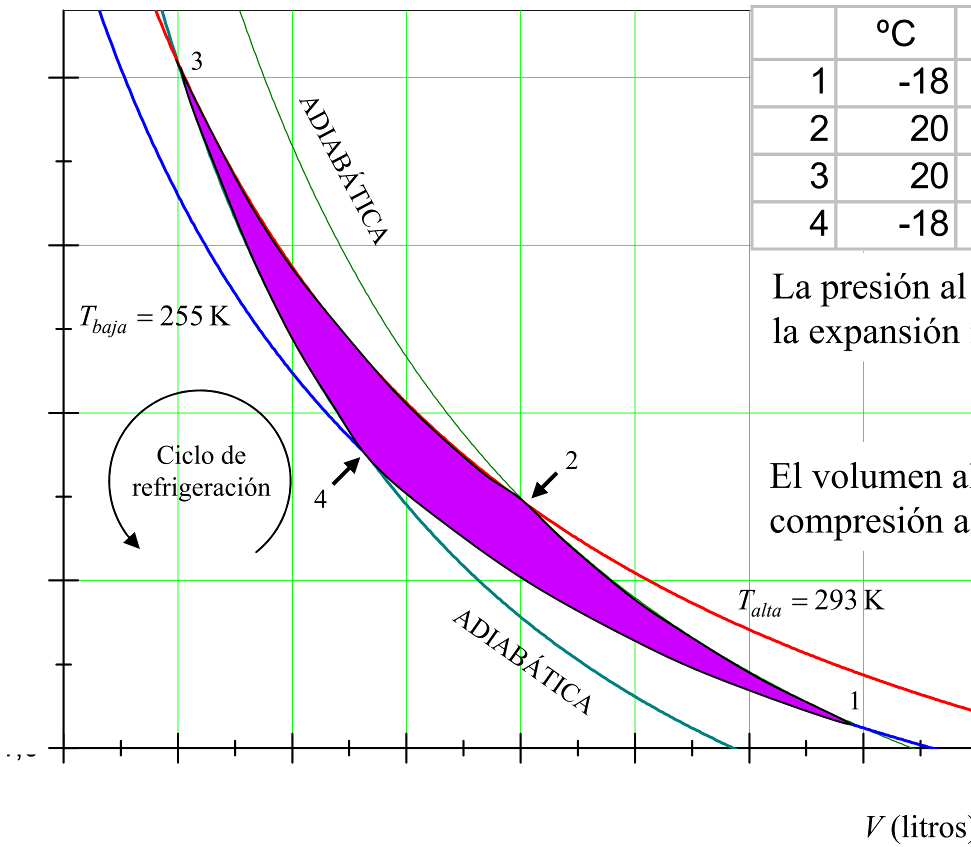
$$T_1 = 273 - 18 = 255 \text{ K} \qquad T_3 = 273 + 20 = 293 \text{ K}$$

$$T_2 = 273 + 20 = 293 \text{ K} \qquad T_4 = 273 - 18 = 255 \text{ K}$$

$$V_1 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \qquad V_3 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

PROBLEMA 10 (CONT.)

A) Presión al comienzo e la expansión isoterma y el volumen al final de la compresión adiabática.



	ºC	K	V (m^3)	P (Pa)	P (bar)
1	-18	255	5,00E-03	1,06E+05	1,06
2	20	293	3,53E-03	1,72E+05	1,72
3	20	293	2,00E-03	3,05E+05	3,05
4	-18	255	2,83E-03	1,87E+05	1,87

La presión al comienzo de la expansión isoterma es:

Expansión isoterma: 4→1 $P_4 = 1.87$ bar

El volumen al final de la compresión adiabática es:

Compresión adiabática: 1→2

$V_2 = 3.53$ litros

AJB

PROBLEMA 10 (CONT.)

B) Trabajo necesario para extraer 1 kJ del foco frío.

C) Trabajo por ciclo para mantener el frigorífico en funcionamiento.

D) La variación de entropía del gas en la etapa isoterma a baja temperatura.

B) Balance de energía en un ciclo:

$$Q_{ciclo} - W_{ciclo} = 0$$

$$Q_{41} + Q_{23} - W = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} Q_{41} > 0 \\ Q_{23} < 0 \\ W < 0 \end{array} \right.$$

Eficiencia reversible

$$\varepsilon = \frac{T_{baja}}{T_{alta} - T_{baja}}$$

$$\varepsilon = \frac{255}{293 - 255} = 6.7$$

C) Eficiencia en términos de calor intercambiado

$$\varepsilon = \frac{Q_{41}}{|W|} = \frac{Q_{41}}{|Q_{23}| - Q_{41}}$$

Significado: ε representa la energía extraída del foco frío por cada unidad de trabajo aportada al ciclo. Por tanto el trabajo necesario para extraer 1 kJ del foco frío es:

$$1/\varepsilon = 1/6.7 = 0.15\ \text{kJ}$$

Trabajo en las etapas isotermas

$$\left\{ \begin{array}{l} W_{23} = nRT_{alta} \ln(V_3/V_2) = -346.5\ \text{J} \\ W_{41} = nRT_{baja} \ln(V_1/V_4) = 301.6\ \text{J} \end{array} \right.$$

Trabajo neto (en un ciclo)

$$W = W_{23} + W_{41} = -44.9\ \text{J}$$

Comentario: los trabajos asociados a las etapas adiabáticas no cuentan, son iguales y de signos opuestos

$$W_{12} = \frac{1}{\gamma - 1}(P_1V_1 - P_2V_2) = \frac{n\,R}{\gamma - 1}(T_{baja} - T_{alta})$$

$$W_{34} = \frac{1}{\gamma - 1}(P_3V_3 - P_4V_4) = \frac{n\,R}{\gamma - 1}(T_{alta} - T_{baja})$$

$$P_1V_1 = P_4V_4 = nRT_{baja}$$

$$P_2V_2 = P_3V_3 = nRT_{alta}$$

D) Variación de entropía de la etapa isoterma 4→1

$$\Delta U_{41} = Q_{41} - W_{41} = 0$$

$$Q_{41} = W_{41} = 301.6\ \text{J}$$

$$\Delta S_{41} = \frac{Q_{41}}{T_{baja}} = \frac{301.6\ \text{J}}{255\ \text{K}} = 1.18\ \text{J/K}$$