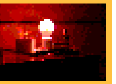
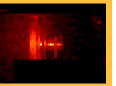
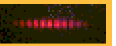
AJB







Lecciones de Física

PROBLEMAS DE RODADURA

EJEMPLOS SELECCIONADOS

FUNDAMENTOS FÍSICOS DE LA INGENIERÍA

Antonio J. Barbero / Alfonso Calera Belmonte / Mariano Hernández Puche
Dpt. Física Aplicada. ETS Ing. Agrónomos (Albacete)

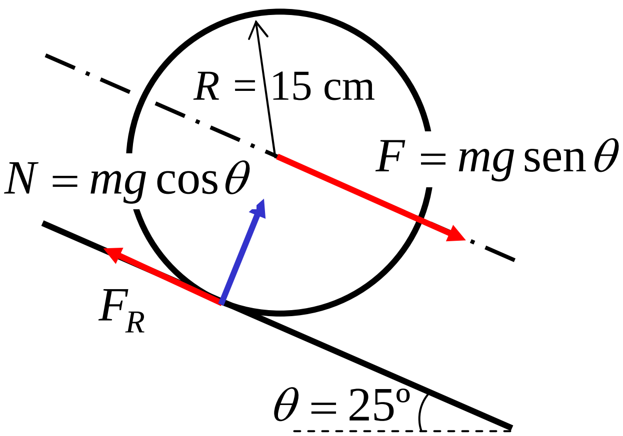
EJEMPLO 1

Considere un cilindro macizo y homogéneo de 30 cm de diámetro colocado sobre un plano inclinado 25º.

a) ¿Cuál es el valor mínimo del coeficiente de rozamiento para que el cilindro descienda rodando sin deslizar? ¿Cuál es su aceleración angular?

b) Responda a las mismas preguntas del apartado anterior suponiendo que se da al cilindro un impulso inicial hacia arriba de modo que suba por el plano inclinado.

Apartado a) Cilindro descendiendo a lo largo del plano inclinado



Tomando como sentido positivo el sentido descendente, tenemos la componente del peso paralela al plano inclinado, $mg\,\mathrm{sen}\,\theta$.

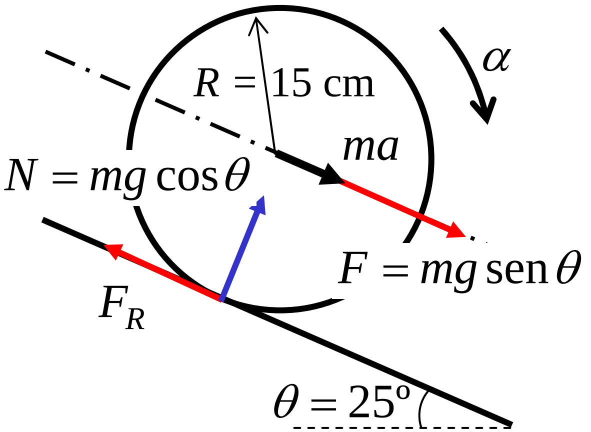
En sentido negativo tenemos la fuerza de rozamiento, F_R. Si el cilindro rueda sin deslizar, ésta será una fuerza de fricción estática, ya que en rodadura el punto de contacto no tiene velocidad relativa respecto al suelo sobre el que se asienta.

La fuerza de fricción estática alcanza como máximo el valor μN, donde $N = mg\cos\theta$ es la reacción normal y μ es el coeficiente **estático** de rozamiento. Por lo tanto la condición para que haya rodadura sin que se produzca deslizamiento será que la fuerza de rozamiento F_R sea menor que μN.

EJEMPLO 1 (CONTINUACIÓN)

Aplicando la 2ª ley de Newton: sea m la masa del cilindro y sea a la aceleración de su CM

$$mg\,\mathrm{sen}\,\theta - F_R = ma$$



Dinámica de rotación: llamemos I al momento de inercia del cilindro respecto a su CM y sea α su aceleración angular

Tomando momentos respecto del CM, vemos que la única fuerza que produce un momento que hace girar el cilindro es F_R, que se encuentra aplicada en la periferia del mismo, a una distancia R:

$$I\alpha = RF_R \qquad F_R = \frac{I\alpha}{R} \qquad F_R = \frac{Ia}{R^2}$$

Condición de rodadura: $\alpha = \dfrac{a}{R}$

$$ma = mg\,\mathrm{sen}\,\theta - F_R = mg\,\mathrm{sen}\,\theta - \frac{Ia}{R^2}$$

$$a = \frac{mg\,\mathrm{sen}\,\theta}{m + \dfrac{I}{R^2}} = \frac{g\,\mathrm{sen}\,\theta}{1 + \dfrac{I}{mR^2}}$$

$$\boxed{a = \frac{g\,\mathrm{sen}\,\theta}{1+Q}}$$

Llamando $Q = \dfrac{I}{mR^2}$

En el caso de un cilindro homogéneo $Q = \dfrac{1}{2}$, ya que $I = \dfrac{1}{2}mR^2$

EJEMPLO 1 (CONTINUACIÓN)

$$a = \frac{g\,\mathrm{sen}\,\theta}{1+Q}$$

$$F_R = mg\,\mathrm{sen}\,\theta - ma$$

Para que ruede sin deslizar $F_R < \mu N$

$$F_R = mg\,\mathrm{sen}\,\theta - ma = mg\,\mathrm{sen}\,\theta\left(1-\frac{1}{1+Q}\right) = mg\,\mathrm{sen}\,\theta\left(\frac{Q}{1+Q}\right) < \mu mg\cos\theta$$

Cálculos numéricos:

$$\mathrm{tg}\,\theta < \left(\frac{Q+1}{Q}\right)\mu$$

$$Q = \frac{1}{2} \qquad \theta = 25^{\circ}$$

$$R = 0.15\ \mathrm{m}$$

$$\mathrm{tg}\,25 < \left(\frac{3/2}{1/2}\right)\mu \qquad \mu > \frac{\mathrm{tg}\,25}{3} \qquad \mu > 0.1554$$

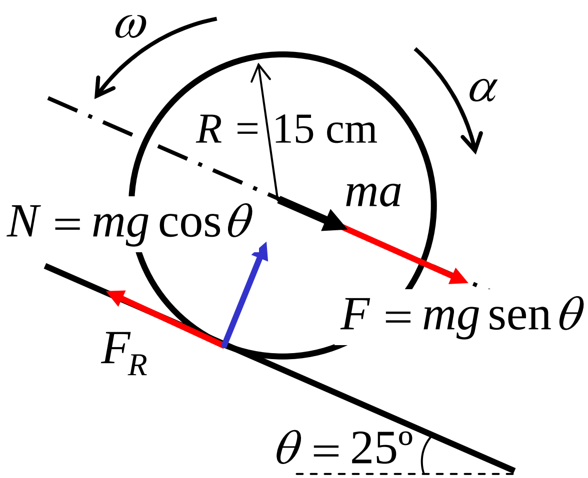
Aceleración angular: $\alpha = \dfrac{a}{R} = \dfrac{g\,\mathrm{sen}\,\theta}{R(1+Q)} = \dfrac{9.80\cdot\mathrm{sen}\,25}{0.15(1+1/2)}$ $\qquad \alpha = 18.41\ \mathrm{rad/s^2}$

Pregunta adicional: ¿Cuál sería el resultado si en lugar de tratarse de un cilindro se tratase de una esfera homogénea del mismo radio?

Solución: $\mu > 0.1332 \qquad \alpha = 19.72\ \mathrm{rad/s^2}$

EJEMPLO 1 (CONTINUACIÓN)

Apartado b) Cilindro ascendiendo a lo largo del plano inclinado



Cuando el cilindro sube gira en sentido antihorario (su velocidad angular ω es saliente respecto al plano del papel). Pero la componente del peso paralela a la superficie del plano inclinado tiene sentido descendente y a medida que sube la velocidad lineal del CM y su velocidad angular decrecen, por eso su aceleración angular α es entrante respecto al plano del papel, y está asociada con un giro en sentido horario.

La fuerza de rozamiento (estática) está dirigida en sentido contrario a *F*, es por tanto de sentido ascendente. La diferencia entre ambas es *ma*. Así, la 2ª ley de Newton aplicada a este caso nos da:

$$mg\,\mathrm{sen}\,\theta - F_R = ma$$

Tomando momentos respecto del CM, vemos que la única fuerza que produce un momento que hace girar el cilindro es F_R, que se encuentra aplicada en la periferia del mismo, a una distancia *R*:

$$I\alpha = RF_R \qquad F_R = \frac{I\alpha}{R} \qquad F_R = \frac{Ia}{R^2}$$

Estas son las mismas ecuaciones que encontramos en el caso del cilindro descendente, por lo que la solución de este caso es la misma en lo que se refiere al cálculo de aceleración angular (véase apartado anterior).

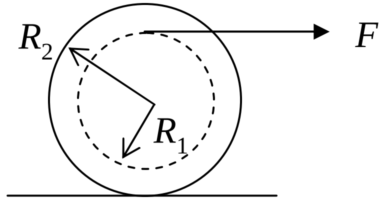
Además, la condición de rodadura sigue siendo la misma, por lo que el límite mínimo del coeficiente de rozamiento para rodadura es también igual.

$$\mu > \frac{\mathrm{tg}\,25}{3}$$

EJEMPLO 2

Dos discos de radio R_2 están unidos simétricamente mediante otro disco de radio menor, R_1, de modo que forman un carrete con simetría de revolución respecto del eje perpendicular a los tres discos, el cual se coloca sobre un suelo horizontal rugoso. La masa del carrete es m, y su momento de inercia respecto al eje de simetría perpendicular que pasa por su CM es I.

Se enrolla una cuerda sobre el disco central, y se tira de ella aplicando una fuerza constante F dirigida hacia la derecha (la cuerda no desliza).



a) ¿Cuál es el valor mínimo del coeficiente de rozamiento con el suelo para que el carrete ruede sin deslizar? ¿Cuál es su aceleración angular?

b) Discuta cuál es el sentido de la fuerza de rozamiento estática en el caso anterior.

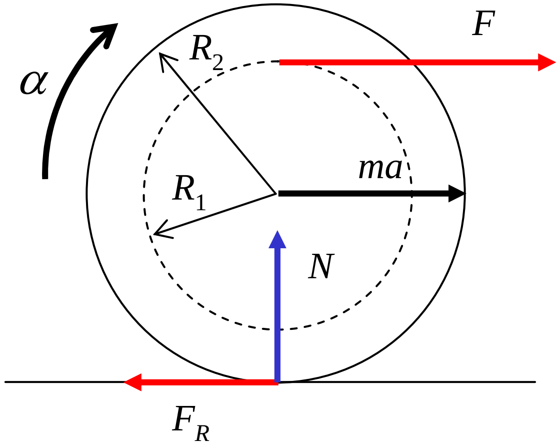
c) Determine la fuerza de rozamiento y compruebe la hipótesis de rodadura sin deslizamiento usando los siguientes valores numéricos:

R_1 = 15 cm R_2 = 20 cm m = 4 kg F = 8 N μ = 0.20

Radio de giro R_g = 16 cm

EJEMPLO 2 (CONTINUACIÓN)

Apartado a)



Fuerzas que actúan en sentido horizontal:

* La fuerza F con que se tira de la cuerda, dirigida hacia la derecha.
* La fuerza de rozamiento F_R (desconocida por ahora, hay que calcularla) y a la que *suponemos* dirigida hacia la izquierda.

Segunda ley de Newton: $\sum F = ma$ $\qquad$ $F - F_R = ma$

(a es la aceleración del CM)

Suma de momentos respecto al CM $\qquad R_1 F + R_2 F_R = I\alpha$

Suponiendo que rueda sin deslizar: $\alpha = \dfrac{a}{R_2}$

$$R_1 F + R_2 F_R = \frac{Ia}{R_2}$$

$$R_1 F + R_2 (F - ma) = \frac{Ia}{R_2}$$

$$R_1 F + R_2 F = R_2 ma + \frac{Ia}{R_2}$$

$$a = F\,\frac{\left(1 + \dfrac{R_1}{R_2}\right)}{\left(m + \dfrac{I}{R_2^2}\right)}$$

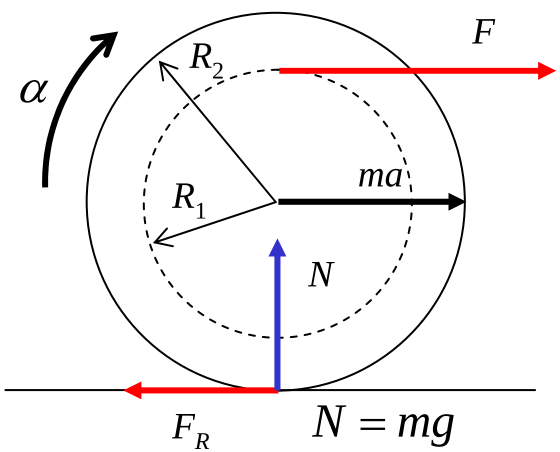
$$\alpha = \frac{F}{R_2}\,\frac{\left(1 + \dfrac{R_1}{R_2}\right)}{\left(m + \dfrac{I}{R_2^2}\right)}$$

Condición para que ruede sin deslizar:

$$F_R < \mu N$$

EJEMPLO 2 (CONTINUACIÓN)

Apartados a) y b)



$$N = mg$$

$$a = F\,\frac{\left(1+\dfrac{R_1}{R_2}\right)}{\left(m+\dfrac{I}{R_2^2}\right)} \qquad F_R < \mu N \qquad F - F_R = ma$$

$$F_R = F - ma = F - mF\,\frac{\left(1+\dfrac{R_1}{R_2}\right)}{\left(m+\dfrac{I}{R_2^2}\right)} = F\left[1-\frac{1+\dfrac{R_1}{R_2}}{1+\dfrac{I}{mR_2^2}}\right]$$

Para que ruede sin deslizar debe cumplirse que

$$\mu > \frac{F_R}{N} \qquad \mu > \frac{F}{mg}\left[1-\frac{1+\dfrac{R_1}{R_2}}{1+\dfrac{I}{mR_2^2}}\right]$$

(Sugerencia: plantéese de nuevo el problema suponiendo de entrada que la fuerza de rozamiento tiene el mismo sentido que *F* y compruébese que se llega al mismo resultado).

<u>Respecto al sentido de la fuerza de rozamiento (apdo b)</u>:

Si $\left(1+\dfrac{R_1}{R_2}\right) < \left(1+\dfrac{I}{mR_2^2}\right)$

la fuerza de rozamiento tiene el sentido que hemos supuesto

Pero si $\left(1+\dfrac{R_1}{R_2}\right) > \left(1+\dfrac{I}{mR_2^2}\right)$ entonces F_R tiene sentido opuesto al que supusimos, es decir, el mismo sentido que *F*.

EJEMPLO 2 (CONTINUACIÓN)

Apartado c)

$R_1 = 15$ cm $\quad R_2 = 20$ cm $\quad m = 4$ kg $\quad F = 8$ N $\quad \mu = 0.20$

Radio de giro $R_g = 16$ cm

El dato del radio de giro nos permite calcular el momento de inercia: $I = mR_g^2 = 4 \cdot 0.16^2 = 0.1024\ \mathrm{kg \cdot m^2}$

$$\alpha = \frac{F}{R_2}\frac{\left(1+\dfrac{R_1}{R_2}\right)}{\left(m+\dfrac{I}{R_2^2}\right)} = 10.67\ \mathrm{rad/s^2} \qquad a = F\frac{\left(1+\dfrac{R_1}{R_2}\right)}{\left(m+\dfrac{I}{R_2^2}\right)} = 2.13\ \mathrm{m/s^2}$$

$$F_R = F - ma = 8 - 4\cdot 2.13 = -0.54\ \mathrm{N}$$

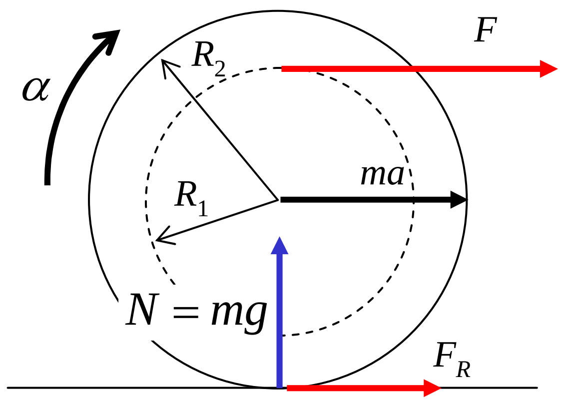
Esto significa que F_R está dirigida en sentido contrario al supuesto inicialmente, es decir, está dirigida en el mismo sentido que F.

Comprobación de la hipótesis de rodadura:

$$\mu \cdot N = 0.20 \cdot 4 \cdot 9.8 = 7.84\ \mathrm{N} > F_R$$

O también ver que $\mu = 0.20$ es mayor que μ_{minimo}

$$\mu_{\text{minimo}} = \frac{F}{mg}\left[1 - \frac{1+\dfrac{R_1}{R_2}}{1+\dfrac{I}{mR_2^2}}\right] = 0.15$$



EJEMPLO 2 (CONTINUACIÓN)

Preguntas adicionales a propósito de este problema

1. Si la masa del carrete cambiase, quedando igual todo lo demás, ¿cambiaría la fuerza de rozamiento?

$$F_R = F - ma = F - mF\frac{\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)}{\left(m+\frac{I}{R_2^2}\right)} = F\left[1-\frac{1+\frac{R_1}{R_2}}{1+\frac{I}{mR_2^2}}\right]$$

NO!

La fuerza de rozamiento no depende de la masa!

... Porque el momento de inercia es $I = mR_g^2$ y por lo tanto $\frac{I}{mR_2^2} = \frac{R_g^2}{R_2^2}$

2. ¿Qué radio debería tener el disco interno del carrete para que la fuerza de rozamiento cambiase de signo (manteniendo igual todo lo demás)?

F y F_R son del mismo sentido si $\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right) < \left(1+\frac{I}{mR_2^2}\right)$ y de sentidos opuestos en caso contrario

Mismo sentido $\frac{R_1}{R_2} < \frac{I}{mR_2^2} \rightarrow R_1 < \frac{R_g^2}{R_2}$

Sentidos contrarios $R_1 > \frac{R_g^2}{R_2}$