

PROBLEMAS RESUELTOS DINÁMICA SÓLIDO RÍGIDO

Equipo docente

Antonio J Barbero, Alfonso Calera, Mariano Hernández.

Escuela Técnica Superior de Agrónomos (Albacete)

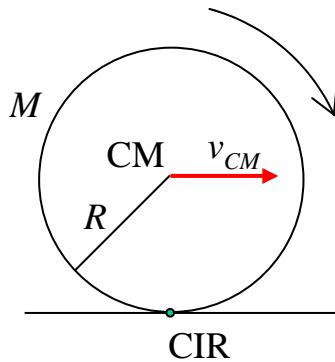
Pablo Muñiz, José A. de Toro

E.U.Ingeniería Técnica Agrícola (Ciudad Real)

Departamento Física Aplicada UCLM

PROBLEMA 1

Demuestre que la energía cinética de un cuerpo que rueda sin deslizar es la suma de la energía cinética de rotación con respecto al eje que pasa por el CM más la energía cinética del movimiento lineal del cuerpo como si toda su masa estuviese concentrada en el CM.



Respecto al CIR el cuerpo rodante tiene un movimiento de rotación pura; por tanto la energía cinética de su movimiento es:

$$E_{C(CIR)} = \frac{1}{2} I_{CIR} \omega^2$$

Teorema de Steiner:

$$I_{CIR} = I_{CM} + MR^2$$

Si rueda sin deslizar $v_{CM} = \omega R$

$$E_{C(CIR)} = \frac{1}{2} (I_{CM} + MR^2) \omega^2 = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} MR^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} M (\omega R)^2$$

$$E_{C(CIR)} = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} M v_{CM}^2$$

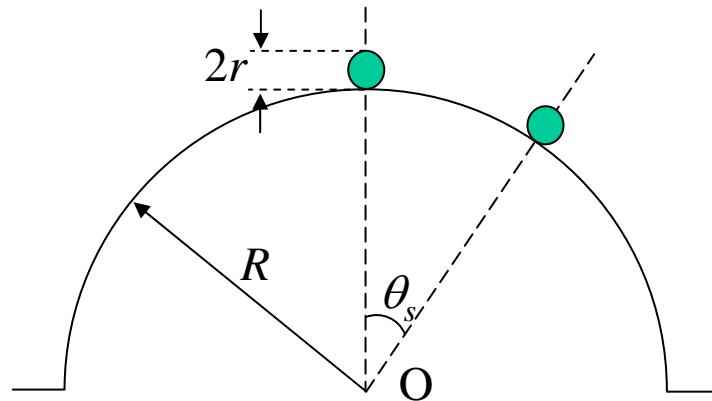
Energía cinética de rotación con respecto al eje que pasa por el CM

Energía cinética de traslación del CM

PROBLEMA 2

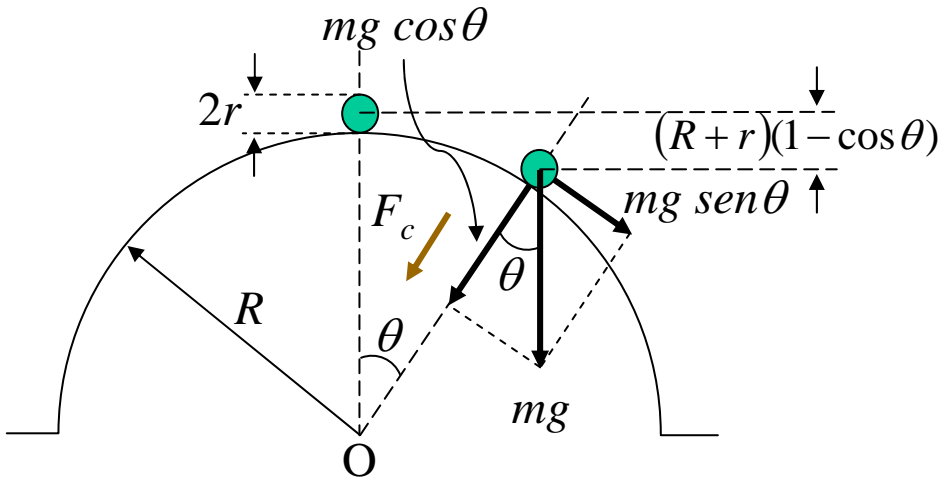
Una pequeña bolita de diámetro $2r$ situada inicialmente en reposo en el polo de una cúpula semiesférica cuyo radio es R ($R = 100r$) empieza a rodar sobre la superficie de la misma. Se pide:

- Determinar la velocidad del centro de masas de la bolita desde que empieza a rodar hasta que pierde contacto con la cúpula, determinando el ángulo θ_s , medido con respecto a la vertical, para el que se produce dicha pérdida de contacto (suponemos que la fuerza de rozamiento es suficiente para mantener la rodadura en todo el trayecto de la bolita sobre la cúpula. Para ver hasta qué punto esta suposición es realista, véase problema siguiente).
- Representar gráficamente el cuadrado de la velocidad del centro de masas de la bolita en unidades gR .
- Determinar la velocidad angular de la bolita en el momento en que pierde contacto con la superficie semiesférica. ¿Cuántas vueltas da la bolita hasta ese momento?



PROBLEMA 2 (Continuación)

En un instante cualquiera



A medida que rueda, la energía potencial de la bolita se va convirtiendo en energía cinética de traslación y energía cinética de rotación

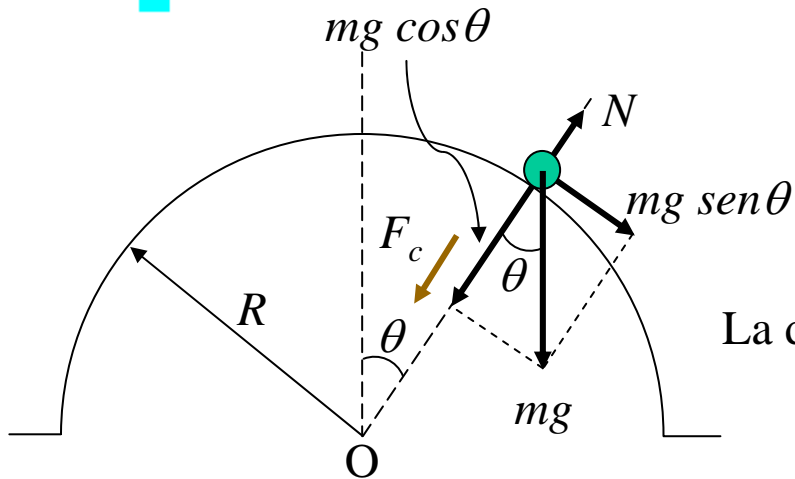
$$mg(R+r)(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mr^2\right)\left(\frac{v}{r}\right)^2 = \frac{7}{10}mv^2$$

Relación entre la velocidad del centro de la bolita y el ángulo descrito sobre la superficie

$$v^2 = \frac{10}{7}g(R+r)(1-\cos\theta)$$

¿Qué fuerza obliga a la bolita a seguir una trayectoria curva?

PROBLEMA 2 (Continuación)



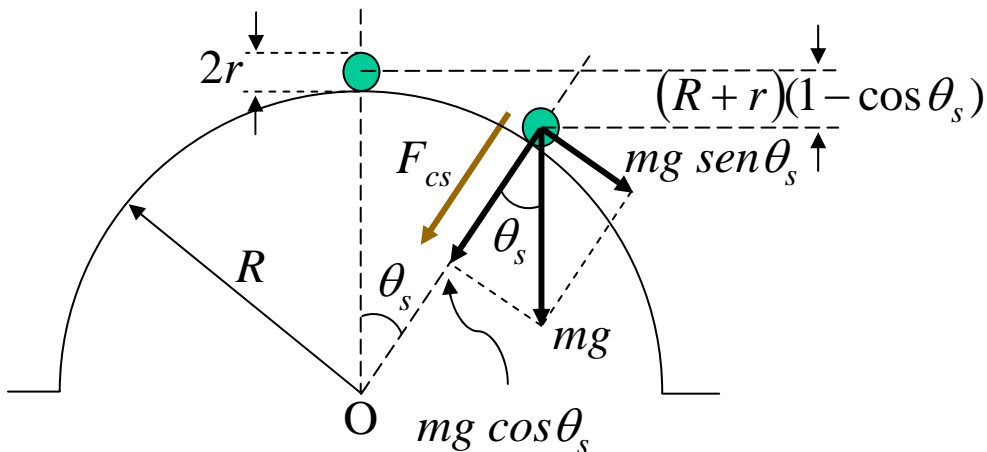
A la componente radial del peso...

... hay que restarle la reacción normal N sobre la bolita

La diferencia entre ambas es la fuerza centrípeta

$$F_c = mg \cos \theta - N$$

El momento en que la bolita se separa de la superficie esférica es aquel *en que el valor de N se reduce a cero*. Denotaremos por s a las magnitudes en ese momento



$$m \frac{v_s^2}{(R+r)} = mg \cos \theta_s$$

$$v_s^2 = g(R+r) \cos \theta_s$$

PROBLEMA 2 (Continuación)

Combinando este resultado con el balance de energía:

$$v_s^2 = g(R+r)\cos\theta_s$$

$$v_s^2 = \frac{10}{7}g(R+r)(1-\cos\theta_s)$$

$$\cos\theta_s = \frac{10}{7}(1-\cos\theta_s) \rightarrow \begin{cases} \cos\theta_s = \frac{10}{17} \\ \theta_s = 54^\circ \end{cases}$$

Sustituyendo para la velocidad angular: $(\omega_s r)^2 = \frac{10}{7}g(R+r)\left(1-\frac{10}{17}\right) = \frac{10}{17}g(R+r)$

$$\omega_s = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{10}{17}g(R+r)} = 2.40\frac{\sqrt{R+r}}{r} \quad \text{Para } R = 100r \quad \longrightarrow \quad \omega_s = 24.1 \text{ rad/s}$$

La longitud L del arco de circunferencia sobre la cúpula recorrida por el CM de la bolita es

$$L = \theta_s(R+r) = \frac{54\pi}{180}(R+r)$$

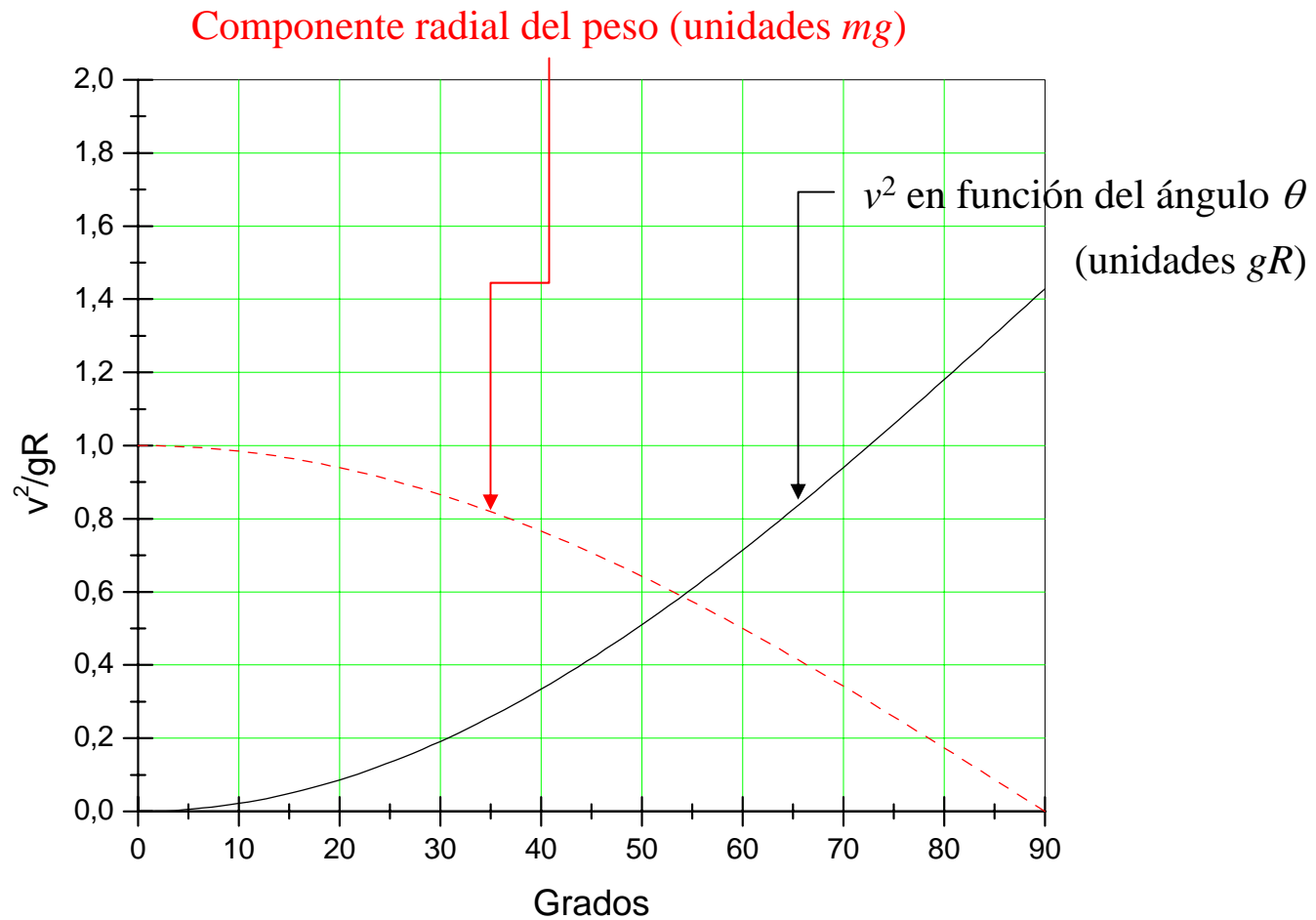
La longitud l de la circunferencia completa de la bolita es

$$l = 2\pi r$$

Por tanto el número de vueltas será (rueda sin deslizar)

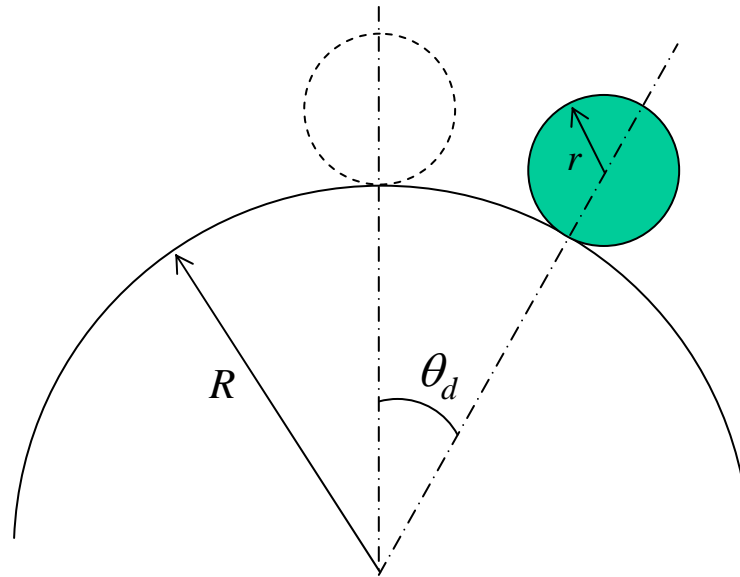
$$n = \frac{L}{l} = \frac{1}{2\pi r} \frac{54\pi(R+r)}{180} = \frac{1}{2\pi r} \frac{54\pi 101r}{180} = 15.15 \text{ vueltas}$$

Representación gráfica (apartado b)

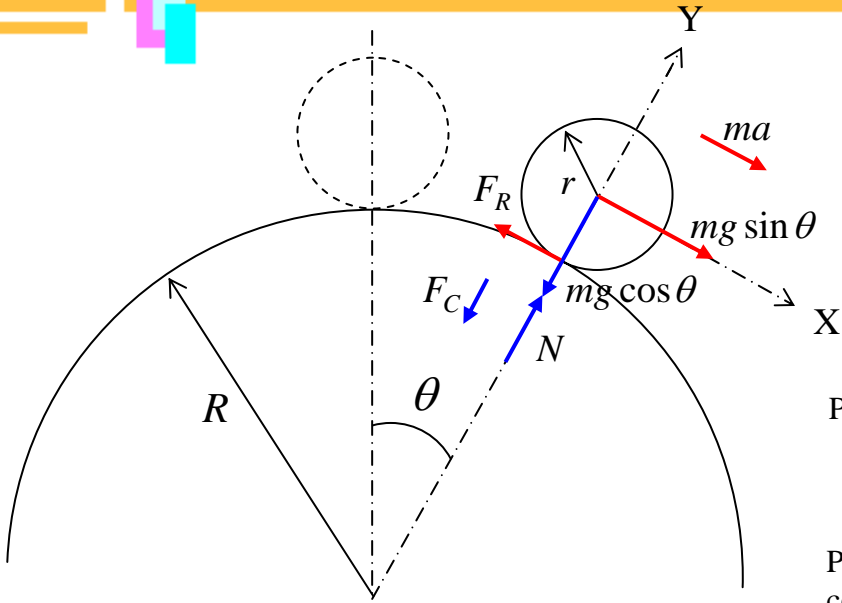


PROBLEMA 3

Una esfera maciza y homogénea de radio $r = 5$ cm está situada inicialmente en reposo en el punto más alto de una superficie semicilíndrica cuyo radio es $R = 20$ cm. El coeficiente de rozamiento estático entre esfera y cilindro es $\mu = 0.70$. Si la esfera empieza a rodar sobre la superficie cilíndrica, determine el valor del ángulo θ_d medido respecto a la vertical para el cual se inicia el deslizamiento, y la velocidad del CM de la esfera en ese momento. ¿Qué valor debería tener el coeficiente de rozamiento para que la esfera rodase hasta su separación de la superficie cilíndrica?



PROBLEMA 3 (Continuación)



Posición en un instante cualquiera

$$\sum \tau_{CM} = F_R r = I_{CM} \alpha \quad \alpha = \frac{F_R r}{I_{CM}}$$

$$\sum F_X = mg \sin \theta - F_R = ma = F_R \frac{mr^2}{I_{CM}}$$

$$I_{CM} = Qmr^2$$

Q es un coeficiente que depende de la simetría, en el caso de una esfera su valor es 2/5

$$\sum F_X = mg \sin \theta - F_R = ma$$

$$\sum F_Y = N - mg \cos \theta = -F_C = -\frac{mv^2}{R+r}$$

Velocidad CM ↑

Para que ruede sin deslizar la condición es

$$F_R < \mu N$$

Por tanto debemos calcular la fuerza de rozamiento y la normal para comprobar si hay rodadura o deslizamiento

Hipótesis de rodadura:

$$\alpha = \frac{a}{r}$$

$$a = \alpha r = \frac{F_R r^2}{I_{CM}}$$

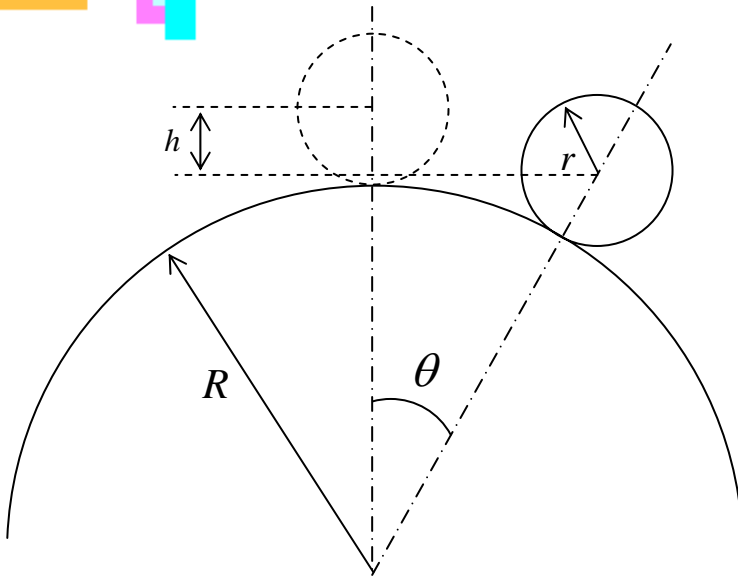
$$F_R = \frac{mg \sin \theta}{1 + (mr^2/I_{CM})}$$

$$F_R = \left(\frac{Q}{Q+1} \right) mg \sin \theta$$

$$F_R = \frac{2}{7} mg \sin \theta$$

PROBLEMA 3 (Continuación)

Determinación de la normal N



Posición en un instante cualquiera

Hipótesis de rodadura: $\omega = \frac{v}{r}$

Cuando la esfera ocupa la posición mostrada, su CM ha descendido h

$$h = (R + r)(1 - \cos \theta)$$

$$mgh = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} mv^2$$

$$mg(R + r)(1 - \cos \theta) = \frac{1}{2} Qmr^2 \left(\frac{v}{r}\right)^2 + \frac{1}{2} mv^2$$

$$v^2 = \left(\frac{2}{Q+1}\right) g(R + r)(1 - \cos \theta)$$

$$\sum F_Y = N - mg \cos \theta = -F_C = -\frac{mv^2}{R + r}$$

$$N + \frac{mv^2}{R + r} = mg \cos \theta$$

Nótese que a medida que el sólido rodante cae, el módulo de la fuerza centrípeta va aumentando y el de la fuerza normal N va disminuyendo; la separación del sólido y la superficie se produce en el momento en que la fuerza normal vale cero.

Cálculo del ángulo θ_s en que se produce la separación de la superficie

$$N + \frac{mv_s^2}{R + r} = mg \cos \theta_s$$

...en esta ecuación, queda...

Sustituyendo para el ángulo θ_s el valor de v^2 dado por

PROBLEMA 3 (Continuación)

$$v_s^2 = \left(\frac{2}{Q+1}\right)g(R+r)(1-\cos\theta_s) \quad \frac{m}{(R+r)}\left(\frac{2}{Q+1}\right)g(R+r)(1-\cos\theta_s) = mg \cos\theta_s$$

$$\cos\theta_s = \frac{2/(Q+1)}{1+[2/(Q+1)]}$$

$$\theta_s = \cos^{-1}\left[\frac{2/(Q+1)}{1+[2/(Q+1)]}\right]$$

Sustituyendo $Q = 2/5$

$$\theta_s = 54^\circ$$

Este resultado es el mismo que el del problema anterior...

... pero para que pueda ser aceptado hay que demostrar la hipótesis de rodadura!

Cálculo de la normal en un instante cualquiera:

$$N = mg \cos\theta - \frac{mv^2}{R+r} = mg \cos\theta - \left(\frac{m}{R+r}\right)\left(\frac{2}{Q+1}\right)g(R+r)(1-\cos\theta)$$

$$N = mg\left(1 + \frac{2}{Q+1}\right)\cos\theta - mg\left(\frac{2}{Q+1}\right)$$

Para que ruede sin deslizar la condición es

$$F_R < \mu N$$

$$F_R = \left(\frac{Q}{Q+1}\right)mg \sin\theta$$

Rodará si

$$\mu > \frac{\left(\frac{Q}{Q+1}\right)\sin\theta}{\left(1 + \frac{2}{Q+1}\right)\cos\theta - \left(\frac{2}{Q+1}\right)}$$

PROBLEMA 3 (Continuación)

El deslizamiento comenzará cuando

$$\mu = \frac{\left(\frac{Q}{Q+1}\right) \sin \theta_d}{\left(1 + \frac{2}{Q+1}\right) \cos \theta_d - \left(\frac{2}{Q+1}\right)}$$

Tenemos que comprobar si el ángulo de deslizamiento θ_d es menor que el ángulo de separación θ_s calculado anteriormente.

$$\underbrace{\mu \left(1 + \frac{2}{Q+1}\right)}_A \cos \theta_d - \underbrace{\mu \left(\frac{2}{Q+1}\right)}_C = \underbrace{\left(\frac{Q}{Q+1}\right)}_B \sin \theta_d$$

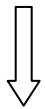
$$A \cos \theta_d - C = B \sin \theta_d \quad A^2 \cos^2 \theta_d + C^2 - 2AC \cos \theta_d = B^2 (1 - \cos^2 \theta_d)$$

$$(A^2 + B^2) \cos^2 \theta_d - 2AC \cos \theta_d + C^2 - B^2 = 0$$

Sustituyendo

$$\mu = 0.70, Q = 2/5$$

$$\cos \theta_d = \frac{1}{2(A^2 + B^2)} \left(2AC \pm \sqrt{4A^2C^2 - 4(A^2 + B^2)(C^2 - B^2)} \right)$$



$$A = 1.70$$

$$\cos \theta_d = \frac{AC \pm B\sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{A^2 + B^2} \quad \begin{array}{ll} \cos \theta_d = 0.70708 & \theta_d = 45^\circ \\ \cos \theta_d = 0.43707 & \theta_d = 64^\circ \end{array}$$

$$B = 2/7$$

$$C = 1$$

El deslizamiento comienza para el menor de los valores calculados de θ_d , es decir, para un ángulo de $45^\circ \dots$
 ... que es menor que el ángulo de separación $\theta_s = 54^\circ$ calculado suponiendo rodadura en todo el trayecto.

PROBLEMA 3 (Continuación)

Velocidad del CM al iniciarse el deslizamiento:

$$\theta_d = 45^\circ \quad v^2 = \left(\frac{2}{Q+1} \right) g(R+r)(1 - \cos \theta_d) = \left(\frac{2}{2/5+1} \right) 9.8(0.20+0.05)(1 - \cos 45)$$

$$v^2 = 1.025$$

$$v = 1.01 \text{ m/s}$$

¿Qué valor debería tener el coeficiente de rozamiento para que hubiese rodadura hasta la separación de la superficie?

$$\mu_s > \frac{\left(\frac{Q}{Q+1} \right) \sin \theta_s}{\left(1 + \frac{2}{Q+1} \right) \cos \theta_s - \left(\frac{2}{Q+1} \right)} \quad \mu_s > \frac{\left(\frac{2/5}{2/5+1} \right) \sin 54^\circ}{\left(1 + \frac{2}{2/5+1} \right) \cos 54^\circ - \left(\frac{2}{2/5+1} \right)}$$

Antes de hacer ningún cálculo... ¿Qué resultado cabe esperar al hacer la operación? $\mu_s \rightarrow \infty$!!

La razón es simplemente que la condición del coeficiente μ para que haya rodadura es $\mu > F_R / N$

Y como la separación de la superficie se produce cuando $N = 0$, la consecuencia es que el coeficiente de rozamiento para que siga habiendo rodadura en $\theta = \theta_s$ tiende a infinito.

Observación: para hacer la operación sustitúyase $\theta_s = \cos^{-1}(10/17)$, que es el valor exacto...

PROBLEMA 5

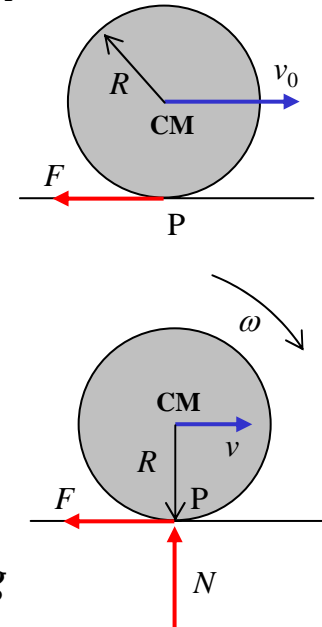
En un campeonato de bolos el experto jugador Pedro Picapiedra lanza la bola con una velocidad de 8 m/s. Inicialmente la bola tiene velocidad angular nula y desliza sin rodar por el piso de la bolera, donde el coeficiente de rozamiento dinámico es $\mu = 0.25$. ¿Cuánto tiempo tardará la bola en comenzar a rodar sin deslizamiento, y qué distancia recorre hasta ese momento?

Momento de inercia de una esfera respecto a un diámetro: $I = (2/5)mR^2$

Sean m , R la masa y radio de la bola.

Cuando la bola toma contacto con el piso (punto P), a su movimiento se opone la fuerza de rozamiento dinámica F , ya que la bola desliza (hay velocidad relativa entre el punto de contacto y el suelo).

Dicha fuerza F reduce progresivamente la velocidad del CM (inicialmente $v_0 = 8$ m/s), y al mismo tiempo crea un momento respecto al CM que hace que la bola empiece a girar, de modo que su velocidad angular ω crece mientras que la velocidad v de su CM se reduce.



¿Hasta cuando se mantiene esta situación?

La causa de la fricción dinámica es que el punto P tiene velocidad relativa respecto al suelo. Pero en el momento en que se alcanzan unos valores v_f y ω_f que cumplen la condición $v_f = \omega_f R$ (condición de rodadura) esto deja de ocurrir: P está instantáneamente en reposo respecto al suelo. Por lo tanto la fuerza de rozamiento dinámica deja de influir, y a partir de ese momento la bola rodará (ya no desliza).

Determinación de la velocidad del CM en función del tiempo *antes* de la rodadura: $F = \mu N = \mu mg$

Mientras dure el deslizamiento esta fuerza origina un movimiento uniformemente retardado cuya aceleración es:

$$a = -\frac{F}{m} = -\mu g = -2.45 \text{ m/s}^2$$

Por lo tanto la velocidad en función del tiempo es: $v(t) = v_0 + at = v_0 - \mu gt = 8 - 2.45t$ (m/s)

PROBLEMA 5 (Continuación)

Además, la fuerza F crea un momento respecto al CM cuyo módulo es $\tau = RF = \mu mgR$ y está asociado con un giro horario.

De acuerdo con la ecuación fundamental de la dinámica de rotación $\tau = I\alpha = \mu mgR$, donde I es el momento de inercia respecto al CM y α es la aceleración angular.

$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{\mu mgR}{(2/5)mR^2} = \frac{5\mu g}{2R}$$

Esta es la aceleración angular mientras dura el deslizamiento: gracias a ella la velocidad angular crece desde 0 hasta $\omega_f = v_f/R$ en el momento en que se inicia la rodadura (valor de velocidad angular que se mantiene posteriormente si se considera despreciable la resistencia a la rodadura).

$$\text{Mientras dura el deslizamiento} \quad \omega(t) = \alpha \cdot t = \frac{5\mu g}{2R} t$$

Velocidad lineal del CM

Velocidad angular

En el instante de comienzo de la rodadura,
una vez transcurrido un tiempo t_f :

$$v_f = v_0 - \mu g t_f = 8 - 2.45 t_f$$

$$\omega_f = \frac{5\mu g}{2R} t_f$$

$$\text{Relación entre ambas: } v_f = \omega_f R \quad v_0 - \mu g t_f = \frac{5\mu g}{2} t_f \quad t_f = \frac{2v_0}{7\mu g} = 0.93 \text{ s}$$

Velocidad del CM en ese instante: $v_f = v_0 - \mu g t_f = 8 - 2.45 \cdot 0.93 = 5.72 \text{ m/s}$

Se trata de un movimiento uniformemente retardado donde el espacio recorrido es:

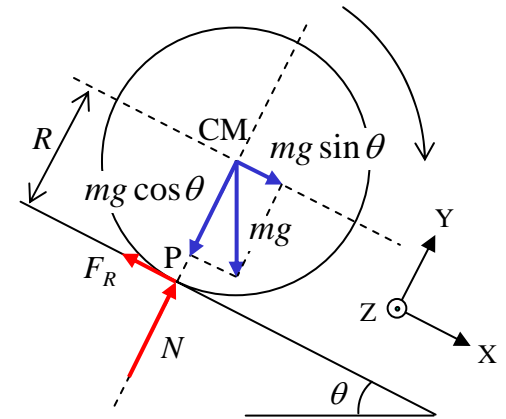
$$x_f = \frac{v_f^2 - v_0^2}{2a} = \frac{5.72^2 - 8^2}{2(-2.45)} = 6.38 \text{ m}$$

PROBLEMA 6

Un cilindro macizo de masa m y radio R rueda sin deslizar a lo largo de un plano inclinado un ángulo θ sobre la horizontal. En el punto más alto la velocidad del CM es v_0 . Haciendo uso del concepto de momento angular, calcule la velocidad del CM y la velocidad angular del cilindro en cualquier instante posterior. Determine también cual es el valor mínimo del coeficiente de rozamiento entre el plano inclinado y el cilindro para que éste caiga efectivamente rodando sin deslizar.

Elegimos como referencia el punto P de contacto entre el cilindro y el plano inclinado.

Si rueda sin deslizar, este punto de contacto P es el CIR, y su velocidad relativa a la superficie inclinada es nula (aunque su aceleración *no es* nula).



Momento angular respecto al punto P: $\vec{L}_P = \vec{L}_{CM} + \vec{R} \times m\vec{v}$

$$\vec{L}_{CM} = I_{CM} \overset{\text{Velocidad angular}}{\omega} (-\vec{k}) \quad \vec{R} = R\vec{j} \quad \vec{R} \times m\vec{v} = Rm\upsilon(-\vec{k})$$

↓ Momento inercia respecto al CM
 ↙ Velocidad del CM

$$\vec{L}_P = \vec{L}_{CM} + \vec{R} \times m\vec{v} = (I_{CM} \omega + Rm\upsilon)(-\vec{k}) = \omega (I_{CM} + mR^2)(-\vec{k})$$

↑
Si rueda sin deslizar $\upsilon = \omega R$

PROBLEMA 6 (Continuación)

Momento de las fuerzas respecto al punto P: la única que crea un torque es la componente $mg \sin \theta$. $\vec{\tau}_P = R \vec{j} \times mg \sin \theta \vec{i}$

Ecuación fundamental de la dinámica de rotación: $\vec{\tau}_P = \frac{d\vec{L}_P}{dt}$ $\vec{\tau}_P = Rmg \sin \theta (-\vec{k})$

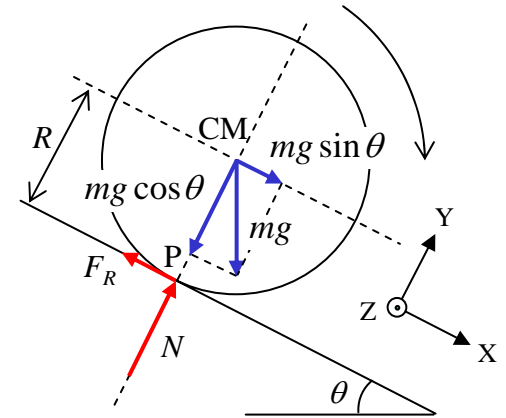
La caída del cilindro es un movimiento bidimensional en el plano XY. Todos los vectores axiales están dirigidos según Z.

Por eso podemos establecer la siguiente relación entre los módulos:

$$\tau_P = \frac{dL_P}{dt} \quad Rmg \sin \theta = \frac{d[\omega (I_{CM} + mR^2)]}{dt} = (I_{CM} + mR^2) \frac{d\omega}{dt}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \alpha = \frac{Rmg \sin \theta}{I_{CM} + mR^2} \quad \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \frac{Rmg \sin \theta}{I_{CM} + mR^2} \int_0^t dt$$

(Véase que la aceleración angular es constante)



Puesto que consideramos que ya en el punto más alto el cilindro rueda sin deslizar debe verificarse $\omega_0 = v_0 / R$

$$\omega = \frac{v_0}{R} + \frac{Rmg \sin \theta}{I_{CM} + mR^2} t = \frac{v_0}{R} + \frac{Rmg \sin \theta}{(1/2)mR^2 + mR^2} t$$

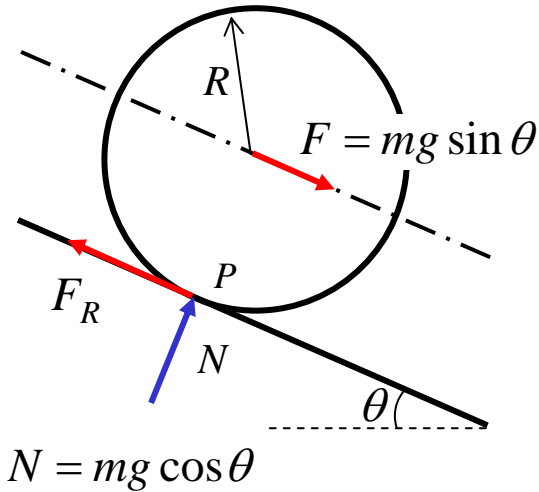
$$\omega = \frac{v_0}{R} + \frac{2g \sin \theta}{3R} t$$

$$v = v_0 + \frac{R^2 mg \sin \theta}{I_{CM} + mR^2} t = v_0 + \frac{R^2 mg \sin \theta}{(1/2)mR^2 + mR^2} t$$

$$v = v_0 + \frac{2g \sin \theta}{3} t$$

PROBLEMA 6 (Continuación)

Se producirá rodadura mientras que la fuerza de rozamiento sea inferior al valor máximo posible de rozamiento estático μN ($N = mg \cos \theta$).



$$F_R < \mu N \quad \text{Condición para rodadura}$$

Aplicando la 2ª ley de Newton: $F - F_R = ma$

Momento creado respecto al punto de contacto P por la componente del peso paralela a la superficie del plano inclinado:

$$FR = I_P \alpha \quad \alpha = \frac{FR}{I_P} \quad a = \alpha R$$

$$F_R = F - ma = F - m \frac{FR^2}{I_P}$$

$$F_R = F - ma = F \left(1 - m \frac{R^2}{(3/2)mR^2} \right) = \frac{1}{3} mg \sin \theta$$

Para que haya rodadura $F_R < \mu N$

$$\frac{1}{3} mg \sin \theta < \mu mg \cos \theta$$

$$\mu > \frac{1}{3} \tan \theta$$

PROBLEMA 7

Un todoterreno con tracción en las cuatro ruedas está parado en una calle donde el coeficiente de rozamiento estático entre neumático y asfalto vale $\mu = 0.75$. Si se pone en marcha, ¿cuál es el valor máximo posible de su aceleración sin que las ruedas patinen?

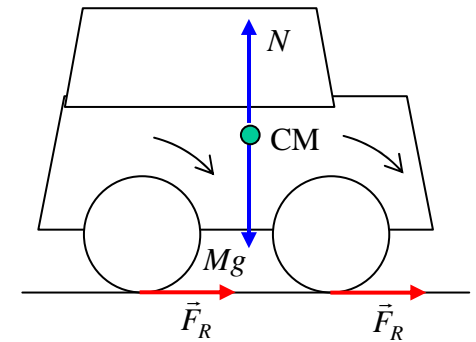
La aceleración máxima de avance corresponde al rozamiento estático máximo entre las ruedas y el asfalto. El motor del vehículo hace girar las ruedas y, mientras éstas no resbalen, la fuerza de rozamiento estática F_R , que se opone a la fuerza que la superficie de los neumáticos en contacto con el asfalto hacen sobre él, impulsa el vehículo *hacia delante*. Téngase en cuenta que la parte inferior de los neumáticos hace sobre el pavimento una fuerza dirigida *hacia atrás*.

Es decir, la fuerza de rozamiento estática determina el movimiento del todoterreno hacia delante porque es la única fuerza externa exterior que actúa en sentido horizontal.

Hay cuatro puntos de contacto con el suelo, uno por cada neumático. Para simplificar supondremos que el peso Mg del vehículo se reparte por igual entre ellos, y que las cuatro fuerzas de rozamiento son iguales.

Fuerza de rozamiento entre cada neumático y el suelo $F_R = \mu \frac{N}{4} = \frac{1}{4} \mu Mg$

$$2^{\text{a}} \text{ ley de Newton: } \sum F = 4F_R = Ma \quad 4\left(\frac{1}{4} \mu Mg\right) = Ma$$



$$a = \mu g = 0.75 \cdot 9.8 = 7.35 \text{ m/s}^2$$

Comentario: si las ruedas resbalasen sobre el terreno, entonces habría velocidad relativa entre la superficie inferior del neumático y el asfalto. Esto daría lugar a un rozamiento dinámico, la fuerza correspondiente también estaría dirigida hacia delante, pero como el coeficiente dinámico es inferior al estático, la aceleración resultante sería menor.

PROBLEMA 8

Un automóvil viaja a 126 km/h por una carretera recta y llana. De improviso una caballería cruza la carretera 150 m por delante del vehículo. Suponiendo que el conductor reaccione de forma instantánea y aplique el freno de inmediato, ¿cómo le conviene hacerlo para evitar el atropello, de forma brusca bloqueando las ruedas o de manera suave pero firme de manera que las ruedas rueden sin deslizarse? Suponga que los frenos actúan por igual sobre las cuatro ruedas del vehículo y que los coeficientes de rozamiento estático y dinámico son, respectivamente, $\mu_E = 0.60$ y $\mu_D = 0.35$.

Caso de frenar bruscamente, bloqueando las ruedas

Las ruedas se deslizan sobre el asfalto y la fuerza responsable de la desaceleración será el rozamiento dinámico.

Suponiendo que el peso se reparte por igual entre las cuatro ruedas, la fuerza de rozamiento dinámica en cada una es

$$F_D = \mu_D \frac{N}{4} = \mu_D \frac{Mg}{4}$$

La fuerza total que actúa sobre el vehículo es $4 F_D$

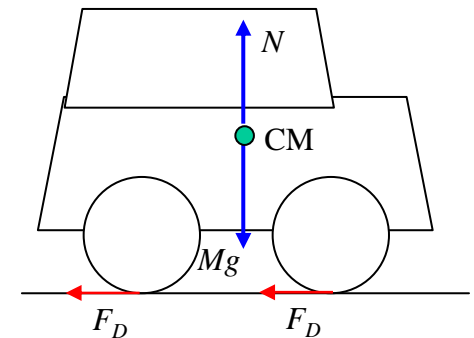
$$4F_D = Ma_D = 4\mu_D \frac{Mg}{4} \quad a_D = \mu_D g = 0.35 \cdot 9.8 = 3.43 \text{ m/s}^2$$

Esta aceleración tiene sentido negativo, y hace disminuir la velocidad de coche; el espacio recorrido hasta detenerse será:

$$v^2 - v_0^2 = -2a_D x_D \quad x_D = \frac{v^2 - v_0^2}{-2a_D} = \frac{-35^2}{-2 \cdot 3.53} = 178.6 \text{ m}$$

$$v_0 = 126 \text{ km/h} = 35 \text{ m/s}$$

$$v = 0 \quad (\text{finalmente se detiene})$$



PROBLEMA 8 (Continuación)



Caso de frenar suavemente, de modo que las ruedas rueden sin deslizar

La frenada se debe a la fuerza de rozamiento estática. Suponiendo, como antes, que el peso se reparte por igual entre las cuatro ruedas, la fuerza de rozamiento en cada una es:

$$F_E = \mu_E \frac{N}{4} = \mu_E \frac{Mg}{4}$$

La fuerza total que actúa sobre el vehículo es $4 F_E$

$$4F_E = Ma_E = 4\mu_E \frac{Mg}{4} \quad a_E = \mu_E g = 0.60 \cdot 9.8 = 5.88 \text{ m/s}^2$$

Esta aceleración también tiene sentido negativo, y hace disminuir la velocidad del coche; el espacio recorrido hasta detenerse será:

$$v^2 - v_0^2 = -2a_E x_E \quad x_D = \frac{v^2 - v_0^2}{-2a_E} = \frac{-35^2}{-2 \cdot 5.88} = 104.2 \text{ m}$$

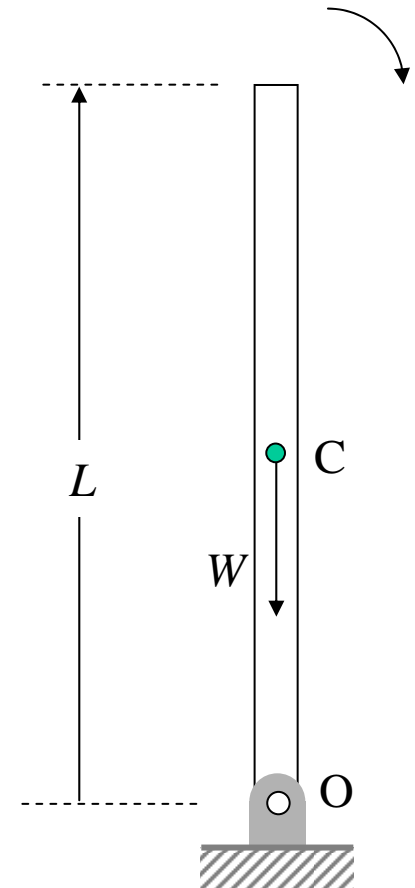
Véase que en el primer caso la distancia de frenada es mayor que la distancia al obstáculo (150 m), mientras que en el segundo caso puede evitarse el atropello.

PROBLEMA 9

Una barra delgada y homogénea de longitud L y peso W está articulada al suelo en su extremo inferior O . Inicialmente se encuentra colocada verticalmente y en reposo (véase figura). En un momento dado empieza a caer moviéndose en el plano vertical de la figura. Se pide:

- Su velocidad angular y su aceleración angular en función del ángulo formado con la vertical.
Representétese gráficamente velocidad y aceleración angular en función del ángulo.
- Las componentes normal y tangencial de la reacción en O en función del ángulo formado con la vertical.
Representétese gráficamente ambas componentes en función del ángulo.

Supóngase ausencia de fricción en la articulación.



PROBLEMA 9 (Continuación)



Apartado a)

En ausencia de rozamiento se conserva la energía mecánica.

Veamos la energía mecánica cuando la barra estaba vertical (1), y cuando se encuentra formando un ángulo θ (2). El C.M, que al principio ocupaba la posición C, pasa a ocupar la posición C'.

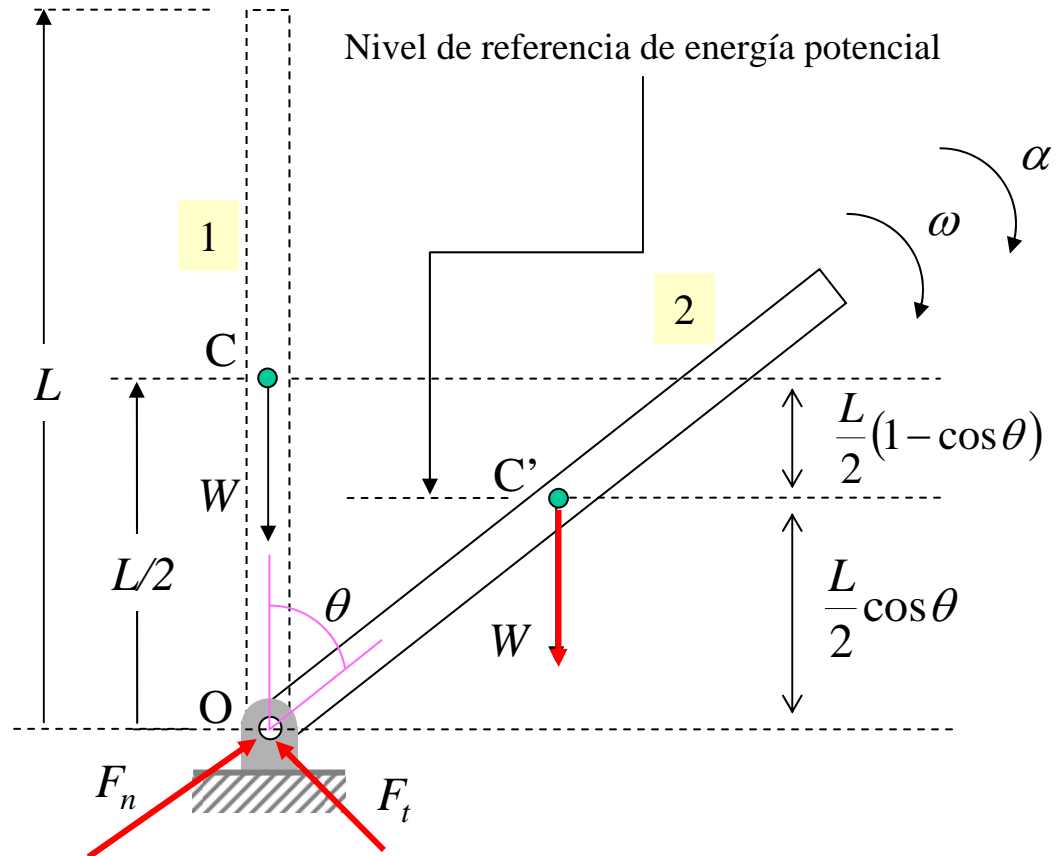
$$U_1 + K_1 = U_2 + K_2$$

$$0 \qquad \qquad 0$$

$$U_1 = W \cdot \frac{L}{2} (1 - \cos \theta)$$

$$K_2 = \frac{1}{2} I_O \omega^2$$

(Rotación)



DSL en un instante cualquiera.

PROBLEMA 9 (Continuación)

Momento de inercia respecto al extremo O

$$K_2 = \frac{1}{2} I_O \omega^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \frac{W}{g} L^2 \right) \omega^2 \quad \Rightarrow$$

DETERMINACIÓN VELOCIDAD ANGULAR

$$U_1 = W \cdot \frac{L}{2} (1 - \cos \theta) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \frac{W}{g} L^2 \right) \omega^2 = K_2$$

$$\omega^2 = \frac{3g}{L} (1 - \cos \theta)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{L} (1 - \cos \theta)}$$

CÁLCULO ACELERACIÓN ANGULAR: PROCEDIMIENTO 1

Tomando momentos de las fuerzas respecto al punto O (véase DSL) sólo queda el momento correspondiente al peso:

$$\sum \tau_O = W \cdot \frac{L}{2} \cdot \text{sen} \theta$$

Ecuación fundamental dinámica rotación: $\sum \tau_O = I_O \cdot \alpha$

$$W \cdot \frac{L}{2} \cdot \text{sen} \theta = \left(\frac{1}{3} \frac{W}{g} L^2 \right) \cdot \alpha$$

$$\alpha = \frac{3g}{2L} \cdot \text{sen} \theta$$

CÁLCULO ACELERACIÓN ANGULAR: PROCEDIMIENTO 2

Relación entre ω y θ

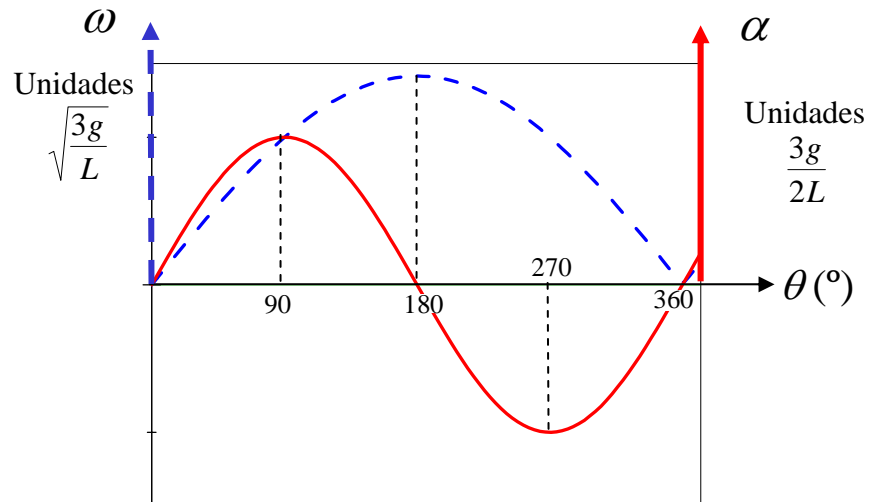
$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}(1 - \cos\theta)}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \omega \cdot \frac{d\omega}{d\theta}$$

$$\frac{d\omega}{d\theta} = \frac{3g}{L} \frac{\sin\theta}{2\sqrt{\frac{3g}{L}(1 - \cos\theta)}} = \frac{3g \sin\theta}{L 2\omega}$$

$$\alpha = \frac{3g}{2L} \cdot \sin\theta$$

Representación gráfica de la velocidad angular y de la aceleración angular en función del ángulo θ



Apartado b)

CÁLCULO REACCIÓN NORMAL

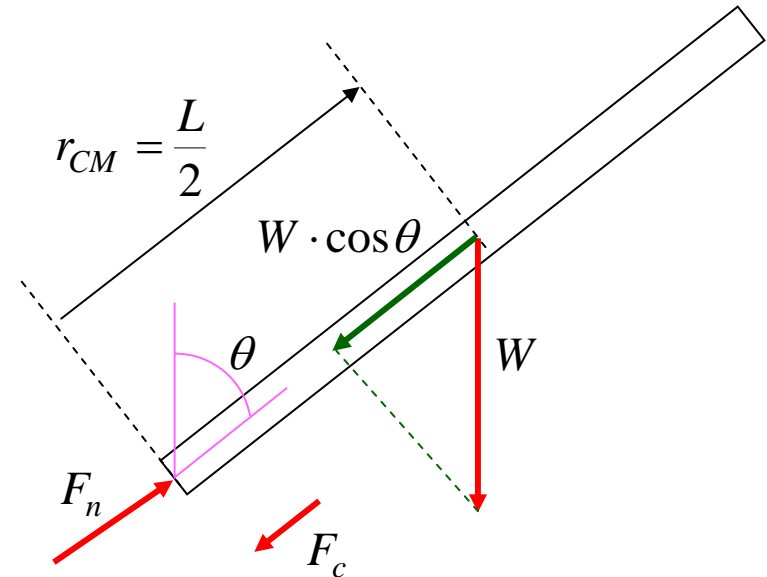
La diferencia entre la componente del peso paralela a la barra $W \cos \theta$ y la reacción normal F_n debe ser igual a la fuerza centrípeta F_c .

$$F_c = \frac{W}{g} \omega^2 \cdot r_{CM} = \frac{W}{g} \omega^2 \cdot \frac{L}{2}$$

$$\omega^2 = \frac{3g}{L} (1 - \cos \theta)$$

$$F_c = W \cdot \cos \theta - F_n = \frac{W}{g} \frac{3g}{L} (1 - \cos \theta) \cdot \frac{L}{2} = \frac{3W}{2} \cdot (1 - \cos \theta)$$

$$F_n = \frac{W}{2} \cdot (5 \cos \theta - 3)$$



CÁLCULO REACCIÓN TANGENCIAL

La suma de fuerzas tangenciales actuando sobre el C.M. de la barra que cae ha de ser igual a su masa por la aceleración tangencial (2ª ley de Newton aplicada a la componente tangente).

$$W \cdot \text{sen} \theta - F_t = \frac{W}{g} \cdot a_t$$

La aceleración tangencial del C.M. es

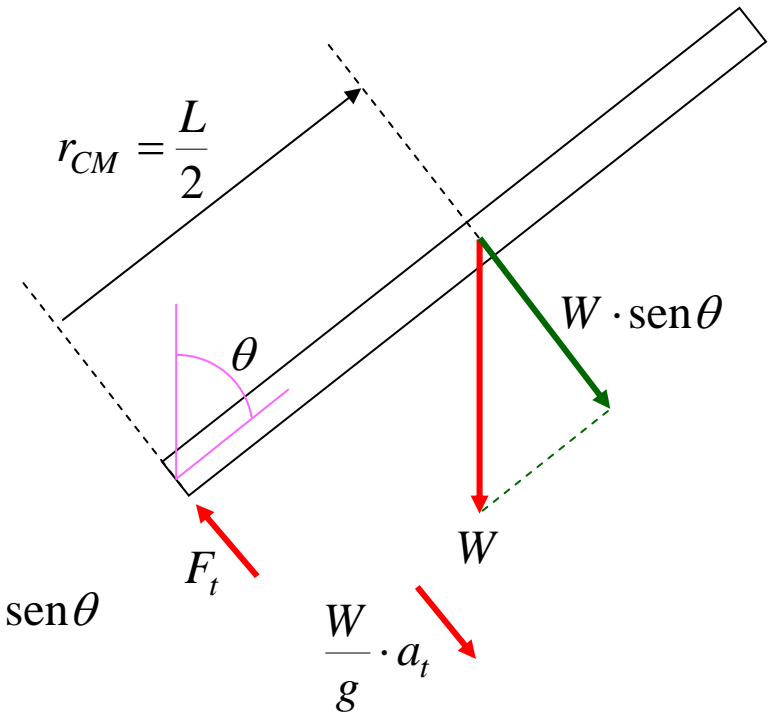
$$a_t = r_{CM} \cdot \alpha = \frac{L}{2} \cdot \alpha$$

$$F_t = W \cdot \text{sen} \theta - \frac{W}{g} \cdot \frac{L}{2} \cdot \alpha$$

$$\alpha = \frac{3g}{2L} \cdot \text{sen} \theta$$

$$F_t = \left(W - \frac{W}{g} \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{3g}{2L} \right) \cdot \text{sen} \theta$$

$$F_t = \frac{W}{4} \cdot \text{sen} \theta$$

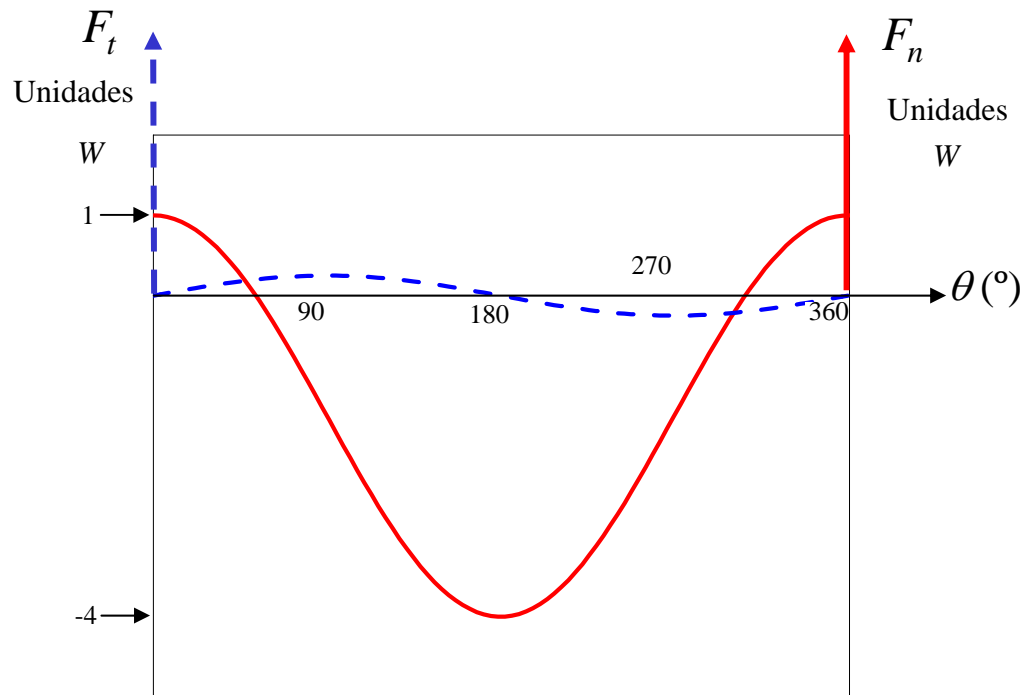


PROBLEMA 9 (Continuación)

Representación gráfica de las reacciones en O

$$F_n = \frac{W}{2} \cdot (5 \cos \theta - 3)$$

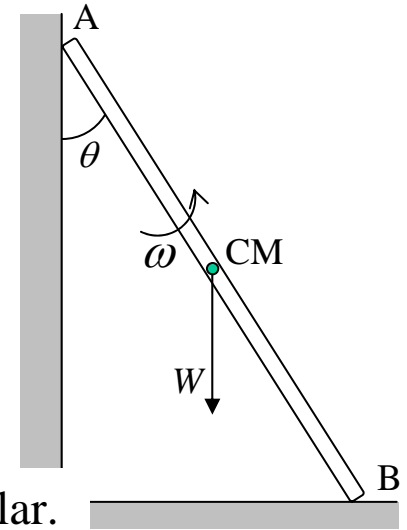
$$F_t = \frac{W}{4} \cdot \text{sen} \theta$$



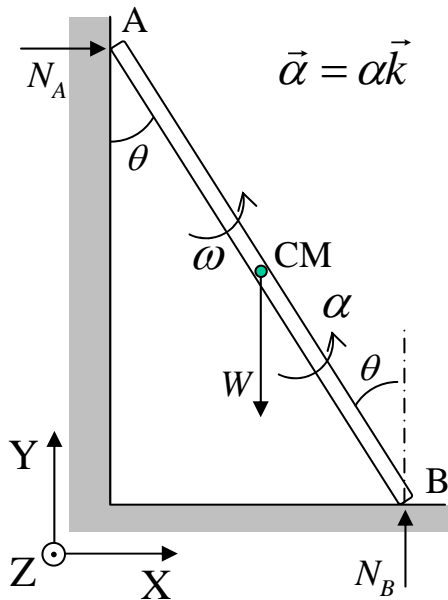
¿Qué significado debe atribuirse al hecho de que para algunos valores de ángulo las reacciones sean *negativas*?

PROBLEMA 10

Una varilla delgada de peso W y longitud L que se encuentra apoyada en una pared y un suelo lisos se desliza hasta que finalmente cae al suelo (considérese que todo el movimiento tiene lugar en el plano de la figura). En el instante presentado en el esquema, cuando el ángulo formado por la parte superior de la varilla con la pared es θ , su velocidad angular es ω (al tiempo que desliza sobre el suelo y la pared, la varilla está girando en sentido contrario a las agujas del reloj).



Determine la aceleración del CM de la varilla y su aceleración angular.



Fuerzas que actúan: DSL

Masa de la varilla: $m = W/g$

Aceleración del CM: $\vec{a}_{CM} = \vec{a}_x i + \vec{a}_y j$ Estas dos componentes cartesianas son desconocidas; hay que calcularlas.

2ª ley de Newton:
$$\begin{cases} \sum F_x = N_A = m \cdot a_x \\ \sum F_y = N_B - W = m \cdot a_y \end{cases}$$

Ecuación de momentos respecto al CM:
$$\oplus \quad I = \frac{1}{12} mL^2$$

$$\sum \tau_{CM} = -N_A \frac{L}{2} \sin(90 - \theta) + N_B \frac{L}{2} \sin \theta = I\alpha$$

PROBLEMA 10 (Continuación)



Tenemos **tres** ecuaciones

$$N_A = m \cdot a_x$$

$$N_B - W = m \cdot a_y$$

$$N_B \frac{L}{2} \sin \theta - N_A \frac{L}{2} \cos \theta = I \alpha$$

... y 5 incógnitas

$$N_A, N_B, a_x, a_y, \alpha$$

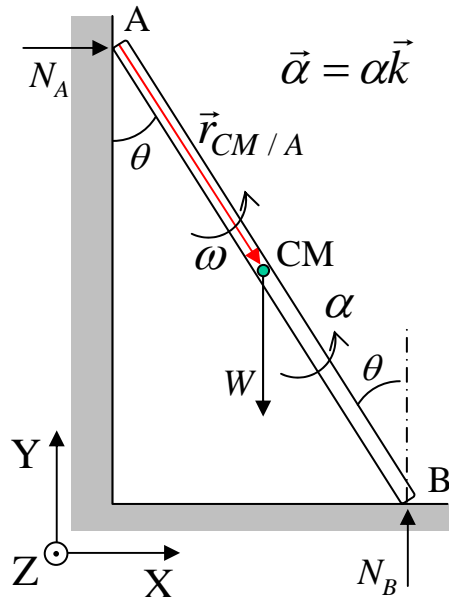
Para resolver esto, necesitamos dos relaciones adicionales, que obtendremos del hecho de que el extremo A resbala hacia abajo a lo largo de la pared (y por eso no tiene aceleración según el eje X) y del hecho de que el extremo B resbala hacia la derecha sobre el suelo (y por tanto no tiene aceleración según el eje Y).

Aceleración del CM respecto de A: $\vec{a}_{CM} = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{CM/A} - \omega^2 \vec{r}_{CM/A}$ $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$

$$\vec{r}_{CM/A} = \frac{L}{2} (\vec{i} \sin \theta - \vec{j} \cos \theta)$$

$$\vec{a}_{CM} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} = a_A \vec{j} +$$

A no tiene aceleración según el eje X!



$$+ \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \alpha \\ \frac{L \sin \theta}{2} & \frac{-L \cos \theta}{2} & 0 \end{vmatrix} - \omega^2 \frac{L}{2} \sin \theta \vec{i} + \omega^2 \frac{L}{2} \cos \theta \vec{j}$$

$$\vec{a}_{CM} = a_A \vec{j} + \frac{L}{2} (\alpha \cos \theta - \omega^2 \sin \theta) \vec{i} + \frac{L}{2} (\alpha \sin \theta + \omega^2 \cos \theta) \vec{j}$$

Igualando componentes

$$\vec{a}_x = \frac{L}{2} (\alpha \cos \theta - \omega^2 \sin \theta) \vec{i}$$

PROBLEMA 10 (Continuación)

Aceleración del CM respecto de B:

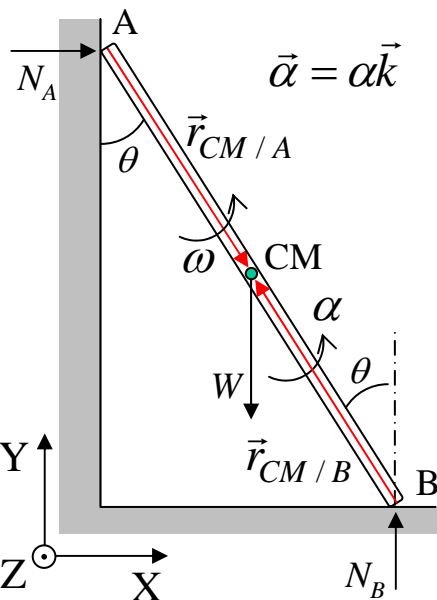
$$\vec{a}_{CM} = \vec{a}_B + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{CM/B} - \omega^2 \vec{r}_{CM/B} \quad \vec{\omega} = \omega \vec{k}$$

B no tiene aceleración según el eje Y

$$\vec{a}_{CM} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} = a_B \vec{i} +$$

$$\begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \alpha \\ \frac{-L \sin \theta}{2} & \frac{L \cos \theta}{2} & 0 \end{bmatrix} + \omega^2 \frac{L}{2} \sin \theta \vec{i} - \omega^2 \frac{L}{2} \cos \theta \vec{j}$$

$$\vec{r}_{CM/B} = \frac{L}{2} (-\vec{i} \sin \theta + \vec{j} \cos \theta)$$



$$\vec{a}_{CM} = a_B \vec{i} + \frac{L}{2} (-\alpha \cos \theta + \omega^2 \sin \theta) \vec{i} - \frac{L}{2} (\alpha \sin \theta + \omega^2 \cos \theta) \vec{j}$$

Iguando componentes

$$\vec{a}_y = -\frac{L}{2} (\alpha \sin \theta + \omega^2 \cos \theta) \vec{j}$$

Las componentes de la aceleración del CM son a_x, a_y .
Falta determinar la aceleración angular.

PROBLEMA 10 (Continuación)

$$N_A = m \cdot a_x \quad N_A = \frac{mL}{2} (\alpha \cos \theta - \omega^2 \sin \theta)$$

$$N_B - W = m \cdot a_y \quad N_B = W - \frac{mL}{2} (\alpha \sin \theta + \omega^2 \cos \theta)$$

$$N_B \frac{L}{2} \sin \theta - N_A \frac{L}{2} \cos \theta = I \alpha$$

$$\frac{L}{2} \sin \theta \left[W - \frac{mL}{2} (\alpha \sin \theta + \omega^2 \cos \theta) \right] - \frac{L}{2} \cos \theta \frac{mL}{2} (\alpha \cos \theta - \omega^2 \sin \theta) = \frac{1}{12} mL^2 \alpha$$

$$\left(\frac{1}{12} mL^2 + \frac{1}{4} mL^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{4} mL^2 \cos^2 \theta \right) \alpha = \frac{L}{2} mg \sin \theta - \frac{L}{2} \omega^2 \sin \theta \cos \theta + \frac{L}{2} \omega^2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4} \right) L^2 \alpha = \frac{L}{2} g \sin \theta \quad \alpha = \frac{3g}{2L} \sin \theta$$

Momento de inercia respecto al CM

$$I = \frac{1}{12} mL^2$$

$$a_x = \frac{L}{2} (\alpha \cos \theta - \omega^2 \sin \theta)$$

$$a_y = -\frac{L}{2} (\alpha \sin \theta + \omega^2 \cos \theta) \quad 33$$