PROBLEMAS RESUELTOS DE DINÁMICA DEL PUNTO

Equipo docente:
Antonio J. Barbero García
Mariano Hernández Puche
Alfonso Calera Belmonte

PROBLEMA 1

Sobre un punto material de masa m = 2 kg inicialmente en reposo y que se desplaza a lo largo del eje X actúa una fuerza variable que, expresada en unidades del sistema internacional, se escribe en función del tiempo como $\vec{F} = \dfrac{4}{(1+t)^2}\,\vec{i}$

a) Determinar su momento lineal como función del tiempo y el impulso mecánico que la fuerza le ha comunicado al cabo de 3 s.

b) La velocidad y la aceleración al cabo de 3 s.

c) La máxima velocidad que puede adquirir.

---

a) Aplicando la 2ª ley de Newton $F = \dfrac{4}{(1+t)^2} = \dfrac{dp}{dt}$ $\quad \Delta p = p(t) - p(0) = \displaystyle\int_0^t \frac{4}{(1+t)^2}dt$

El impulso mecánico es el incremento del momento lineal Δp

Inicialmente en reposo $\rightarrow p(0) = 0$

$$\Delta p = p(t) - p(0) = \int_0^t \frac{4}{(1+t)^2}dt = -\left[\frac{4}{1+t}\right]_0^t = -\left[\frac{4}{1+t} - 4\right] = 4 - \frac{4}{1+t}$$

$$\Delta p = p(t) - \cancel{p}(0) = \frac{4t}{1+t}$$

$$p(t) = \frac{4t}{1+t} \quad (\text{kg}\cdot\text{m/s})$$

Al cabo de t = 3 s $\quad \Delta p_{t=3} = p(3) - p(0) = 3\ \text{kg}\cdot\text{m/s}$

b) Velocidad y aceleración $\quad p(t) = m\,v(t) = \dfrac{4t}{1+t}$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{4}{m}\frac{1}{(1+t)^2} \qquad a(3) = 0.125\ \text{m/s}^2$$

$$v(t) = \frac{1}{m}\left(\frac{4t}{1+t}\right) \qquad v(3) = \frac{3}{2}\ \text{m/s}$$

(Basta con derivar el módulo porque el movimiento es unidimensional a lo largo del eje X)

c) Velocidad máxima

$$v_{máx} = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{m}\left(\frac{4t}{1+t}\right) = \frac{4}{m} = 2\ \text{m/s}$$

PROBLEMA 2

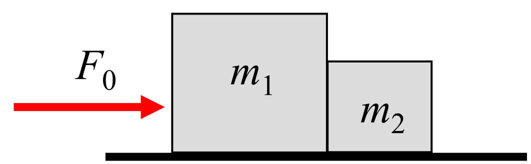
Sobre una mesa horizontal se colocan dos bloques de masas m_1 y m_2, y el conjunto se acelera aplicando sobre el primero de ellos una fuerza horizontal F_0 en la forma indicada en la figura. Los coeficientes de fricción de los bloques con la mesa son μ_1 y μ_2, respectivamente. Se pide:

a) Determinar la expresión de la aceleración en función de F_0, μ_1, m_1, μ_2 y m_2.

b) Si los valores numéricos de F_0, μ_1, m_1, μ_2 y m_2 son

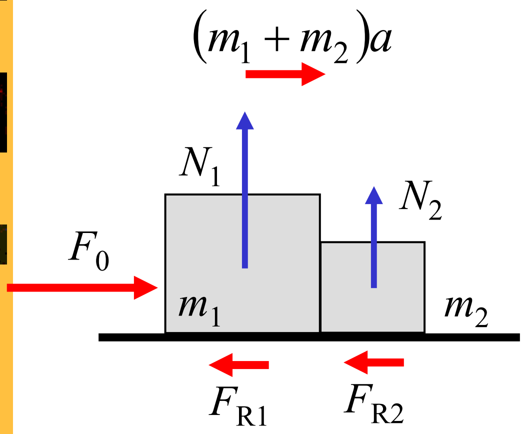
$F_0 = 2{,}50$ kp $\mu_1 = 0.075$ $\mu_2 = 0.040$ $m_1 = 8$ kg $m_2 = 6$ kg

determínese la fuerza que el primer bloque ejerce sobre el segundo y la fuerza que el segundo ejerce sobre el primero.



PROBLEMA 2 (Continuación)

$F_0 = 2{,}50$ kp $\quad \mu_1 = 0.075 \quad \mu_2 = 0.040 \quad m_1 = 8$ kg $\quad m_2 = 6$ kg



Fuerzas de rozamiento

$$F_{R1} = \mu_1 N_1 = \mu_1 m_1 g$$

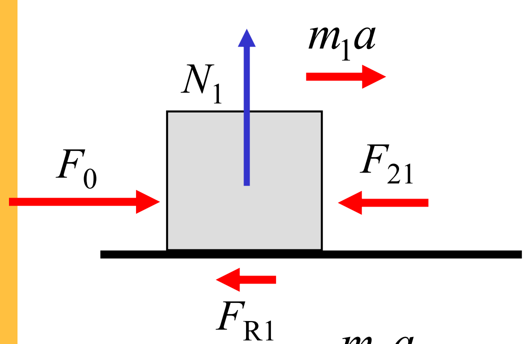
$$F_{R2} = \mu_2 N_2 = \mu_2 m_2 g$$

2ª ley de Newton

$$F_0 - F_{R1} - F_{R2} = (m_1 + m_2)a$$

$$a = \frac{F_0 - \mu_1 m_1 g - \mu_2 m_2 g}{m_1 + m_2}$$

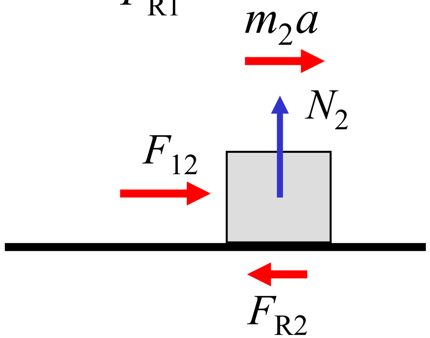
Resultado numérico $\quad a = 1.162$ m/s^2



2ª ley de Newton

$$F_0 - F_{21} - F_{R1} = m_1 a$$

$$F_{21} = F_0 - F_{R1} - m_1 a = F_0 - \mu_1 m_1 g - m_1 a = 9.324 \text{ N}$$



2ª ley de Newton

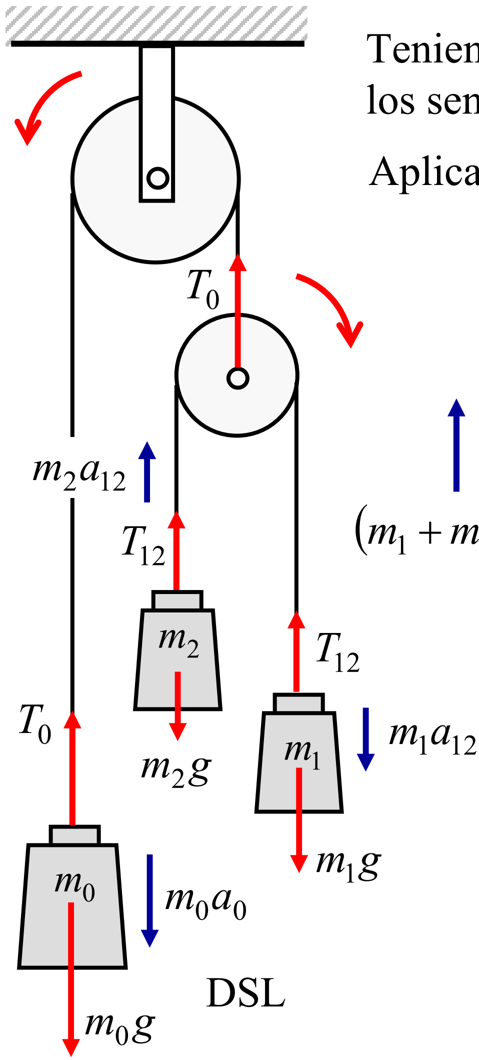
$$F_{12} - F_{R2} = m_2 a$$

F_{12} y F_{21} tienen que ser iguales (acción y reacción)

$$F_{12} = F_{R2} + m_2 a = \mu_2 m_2 g + m_2 a = 9.324 \text{ N}$$

PROBLEMA 3

En el sistema de poleas de la figura se verifica que $m_1 > m_2$ y $m_0 > m_1 + m_2$
Las masas de las poleas son muy pequeñas, los hilos son inextensibles y los rozamientos son despreciables. Determinar la aceleración de cada masa y las tensiones en los hilos.



Teniendo en cuenta los valores de las masas dados en el enunciado, los sentidos de movimiento son los que se indican.

Aplicamos la 2ª ley de Newton a cada parte del sistema.

Incógnitas:

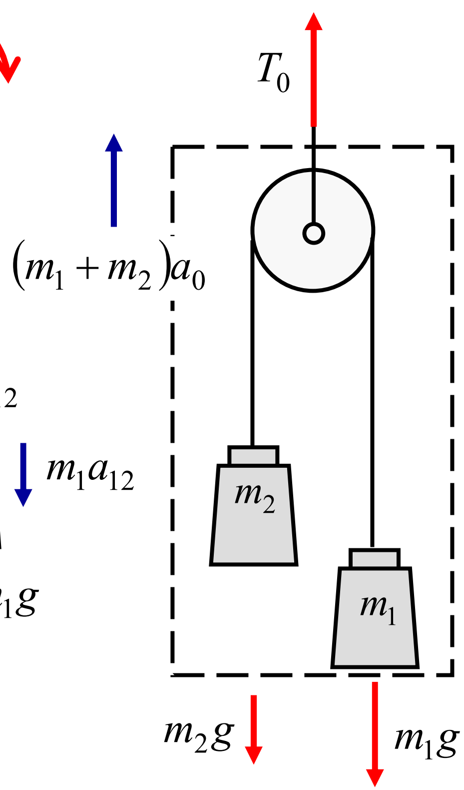
a_0, T_0, a_{12}, T_{12}

Masa m_0 : $m_0 g - T_0 = m_0 a_0$

Masa m_1 : $m_1 g - T_{12} = m_1 a_{12}$

Masa m_2 : $T_{12} - m_2 g = m_2 a_{12}$

Necesitamos una ecuación más



Conjunto $m_1 + m_2$: $T_0 - (m_1 + m_2) g = (m_1 + m_2) a_0$

La tensión T_{12} no interviene aquí porque es una fuerza *interna*

Resolución del sistema para obtener

a_0, T_0, a_{12}, T_{12}

PROBLEMA 3 (Continuación)

Masa m_0 : $m_0 g - T_0 = m_0 a_0$ (1)

Masa m_1 : $m_1 g - T_{12} = m_1 a_{12}$ (2)

Masa m_2 : $T_{12} - m_2 g = m_2 a_{12}$ (3)

Masa $m_1 + m_2$: $T_0 - (m_1 + m_2)g = (m_1 + m_2)a_0$ (4)

(1)+(4) $m_0 g - (m_1 + m_2)g = (m_0 + m_1 + m_2)a_0$

$$a_0 = \frac{m_0 - (m_1 + m_2)}{m_0 + m_1 + m_2} g$$

(2)+(3) $m_1 g - m_2 g = (m_1 + m_2)a_{12}$

$$a_{12} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$$

Cálculo de las tensiones

Para T_0, despejamos de (1) $T_0 = m_0(g - a_0) = m_0\left(1 - \frac{m_0 - (m_1 + m_2)}{m_0 + m_1 + m_2}\right)g$

$$T_0 = \frac{2m_0(m_1 + m_2)}{m_0 + m_1 + m_2} g$$

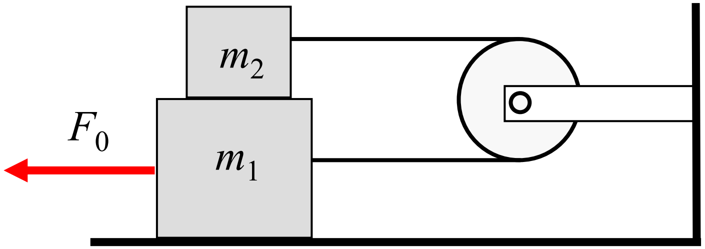
Para T_{12}, despejamos de (2) $T_{12} = m_1(g - a_{12}) = m_1\left(1 - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)g$

$$T_{12} = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

PROBLEMA 4

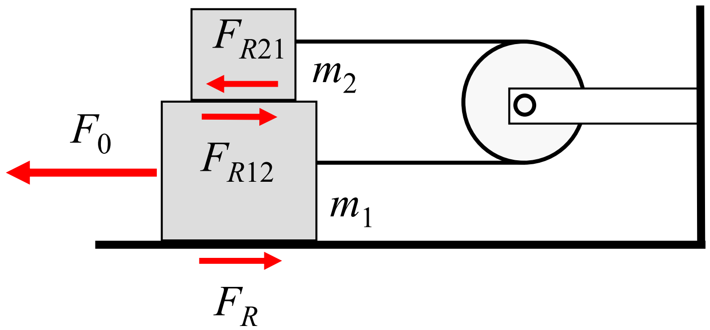
Dos bloques de masas m_1 y m_2 están unidos en la forma indicada en la figura por medio de un cable ideal (inextensible y sin masa) que pasa a través de la polea situada a la derecha, de masa despreciable y carente de rozamiento. El coeficiente de rozamiento estático de m_1 sobre el suelo es μ_1 y el coeficiente de rozamiento estático de m_2 sobre m_1 es μ_2.

¿Qué fuerza F_0, aplicada en m_1 y dirigida hacia la izquierda, es necesaria para iniciar el movimiento?



PROBLEMA 4 (Continuación)

En este problema están implicadas las fuerzas de rozamiento señaladas abajo.



Para iniciar el movimiento

$$F_0 = |F_R| + |F_{R12}| + |F_{R21}|$$

$$F_0 = (\mu_1 m_1 + 3\mu_2 m_2)g$$

F_R es la fuerza de rozamiento estática de m_1 sobre el suelo $\qquad F_R = \mu_1(m_1 + m_2)g$

Su sentido es hacia la derecha porque la fuerza aplicada sobre m_1 está dirigida hacia la izquierda. Además, la normal en la superficie de contacto es igual a la suma de los pesos de m_1 y m_2.

F_{R12} es la fuerza de rozamiento estática de m_1 sobre m_2 $\qquad F_{R12} = \mu_2 m_2 g$

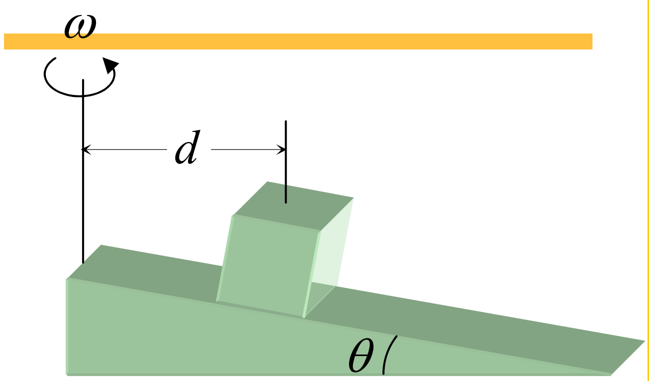
Su sentido es hacia la derecha porque la fuerza aplicada sobre m_1 está dirigida hacia la izquierda. Además, la componente normal del peso aplicada sobre la superficie de contacto es $m_2 g$.

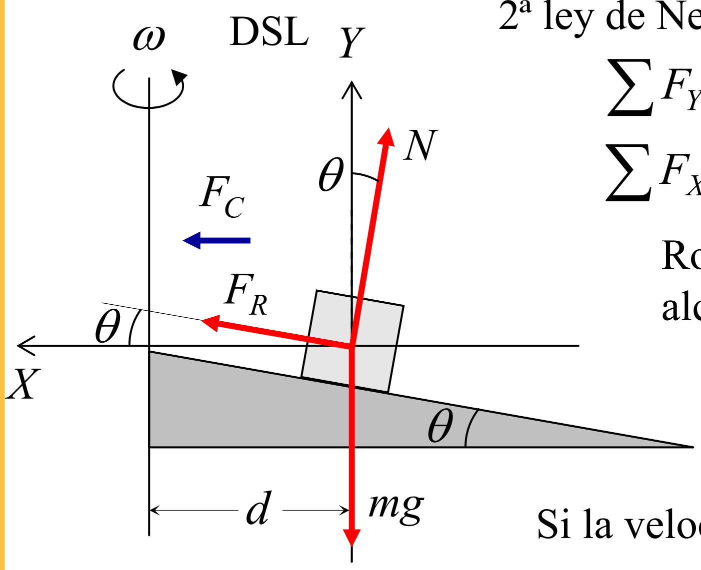
F_{R21} es la fuerza de rozamiento estática de m_2 sobre m_1 $\qquad F_{R21} = \mu_2 m_2 g$

Su sentido es hacia la izquierda porque la fuerza aplicada sobre m_2 está dirigida hacia la derecha, a través del cable que la une con m_1. Además, la componente normal del peso aplicada sobre la superficie de contacto es $m_2 g$.

PROBLEMA 5

Sobre una plataforma inclinada que puede girar en torno a un eje vertical (véase el esquema) hay un pequeño dado cuyo CM está situado a una distancia d = 20 cm del eje. (a) Si la plataforma gira a razón de 30 rpm y su ángulo es θ = 5º, determinar el coeficiente de rozamiento mínimo necesario para que el dado se mantenga en su lugar sin deslizarse. (b) Repetir el cálculo suponiendo que el dado se encuentra situado sobre un plano horizontal.





2ª ley de Newton

$$\sum F_Y = 0 \qquad F_R \sin\theta + N\cos\theta - mg = 0$$

$$\sum F_X = F_C \qquad F_R \cos\theta - N\sin\theta = F_C \; = m\omega^2 d$$

Rozamiento: el valor máximo que puede alcanzar la fuerza de rozamiento estática es $F_{R\,\text{máx}} = \mu_E N$

Por lo tanto, el dado permanecerá sin moverse mientras se cumpla la condición $F_{R\,\text{máx}} \cos\theta - N\sin\theta < m\omega^2 d$

Si la velocidad angular es lo bastante alta para que se cumpla que

$F_{R\,\text{máx}} \cos\theta - N\sin\theta = m\omega^2 d$ el dado estará a punto de moverse

Para que el dado no se mueva si la velocidad angular es ω, el coeficiente de rozamiento mínimo debe verificar

$$\mu_E N\cos\theta - N\sin\theta = m\omega^2 d$$

Y además tiene que cumplirse

$$\mu_E N\sin\theta + N\cos\theta = mg$$

PROBLEMA 5 (Continuación)

$$\mu_E N\cos\theta - N\sin\theta = m\omega^2 d$$
$$\mu_E N\sin\theta + N\cos\theta = mg$$

$$\frac{\mu_E\cos\theta - \sin\theta}{\mu_E\sin\theta + \cos\theta} = \frac{\omega^2 d}{g}$$

$$\mu_E g\cos\theta - g\sin\theta = \mu_E\omega^2 d\sin\theta + \omega^2 d\cos\theta$$

$$\mu_E\left(g\cos\theta - \omega^2 d\sin\theta\right) = g\sin\theta + \omega^2 d\cos\theta$$

$$\boxed{\mu_E = \frac{g\sin\theta + \omega^2 d\cos\theta}{g\cos\theta - \omega^2 d\sin\theta}}$$

Coeficiente de rozamiento mínimo necesario

Cálculos numéricos $\omega = 30\ \text{rpm} = 0.5\ \text{rps} = 0.5\cdot 2\pi\,\frac{\text{rad}}{\text{s}} = \pi\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ $\quad d = 0.20\ \text{m} \quad \theta = 5^{\text{o}}$

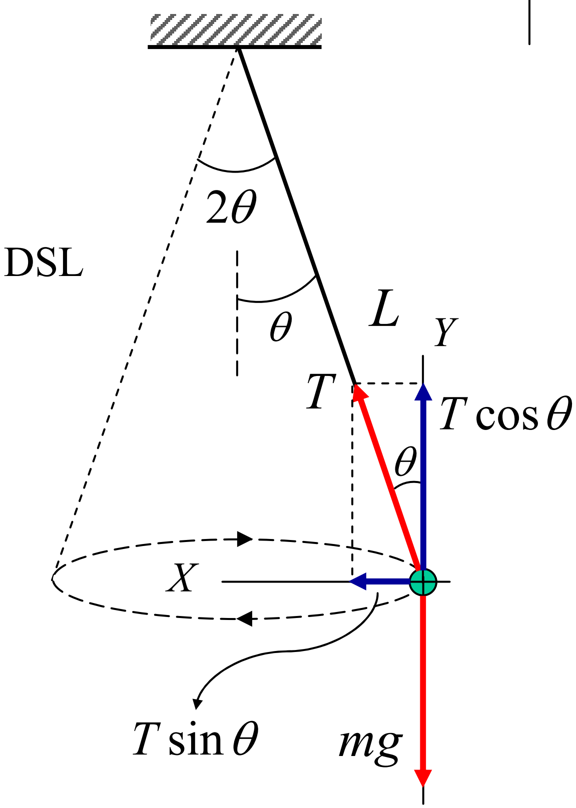
$$\mu_E = \frac{9.8\sin 5^{\text{o}} + \pi^2\cdot 0.20\cdot\cos 5^{\text{o}}}{9.8\cos 5^{\text{o}} - \pi^2\cdot 0.20\cdot\sin 5^{\text{o}}} = 0.29$$

(b) Suponiendo que el dado se encuentra situado sobre un plano horizontal $\rightarrow \quad \theta = 0$

$$\boxed{\mu_E = \frac{\omega^2 d}{g}} = \frac{\pi^2\cdot 0.20}{9.8} = 0.20$$

PROBLEMA 6

Un péndulo cónico consiste en una masa puntual sujeta por un hilo inextensible de longitud L que describe una trayectoria como la indicada en el esquema. Determine el periodo de éste péndulo en función de la longitud y el ángulo del cono.



2ª ley de Newton aplicada a las fuerzas del eje Y

El peso equilibra la componente vertical de la tensión: no hay fuerza vertical neta, ya que el movimiento de la masa puntual discurre en el plano horizontal.

$$T\cos\theta = mg \qquad T = \frac{mg}{\cos\theta}$$

2ª ley de Newton aplicada a las fuerzas del eje X

Puesto que la masa puntual describe una trayectoria circular, la fuerza neta en el eje X, esto es, la componente X de la tensión, es igual a la fuerza centrípeta.

$$F_C = m\omega^2 L\sin\theta = T\sin\theta \qquad \omega^2 = \frac{g}{L\cos\theta}$$

Relación entre velocidad angular y periodo $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{L\cos\theta}{g}}}$$