EJERCICIOS DE CLASE CINEMÁTICA 09

Equipo docente

Antonio J. Barbero / Alfonso Calera / Mariano Hernández
Dpto. Física Aplicada. E.T.S. Agrónomos (Albacete)

Pablo Muñiz / José A. de Toro
Dpto. Física Aplicada. Escuela I.T.A. (Ciudad Real)

AJB

1. El vector de posición de un punto material es

$$\vec{r} = 3\,\vec{i} + t^2\ \vec{j}$$

donde *r* está en m y *t* en s.

Dibuje las gráficas de posición, velocidad y aceleración en función del tiempo.

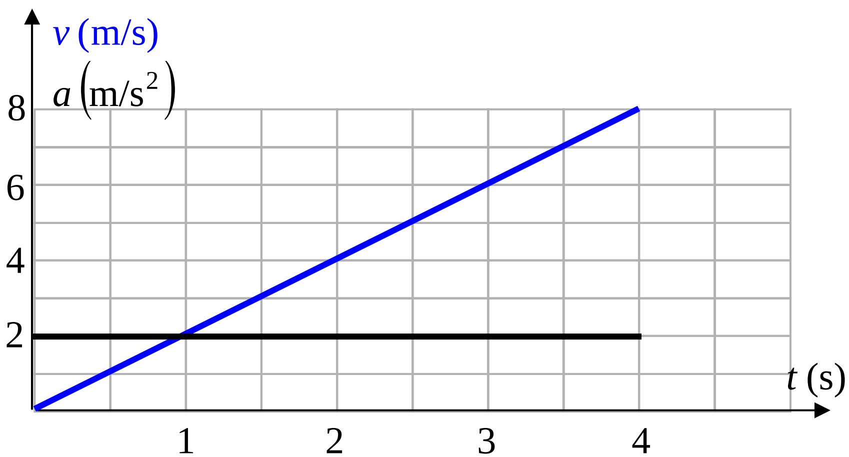
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 2t\ \vec{j} \qquad v = |\vec{v}| = 2t$$

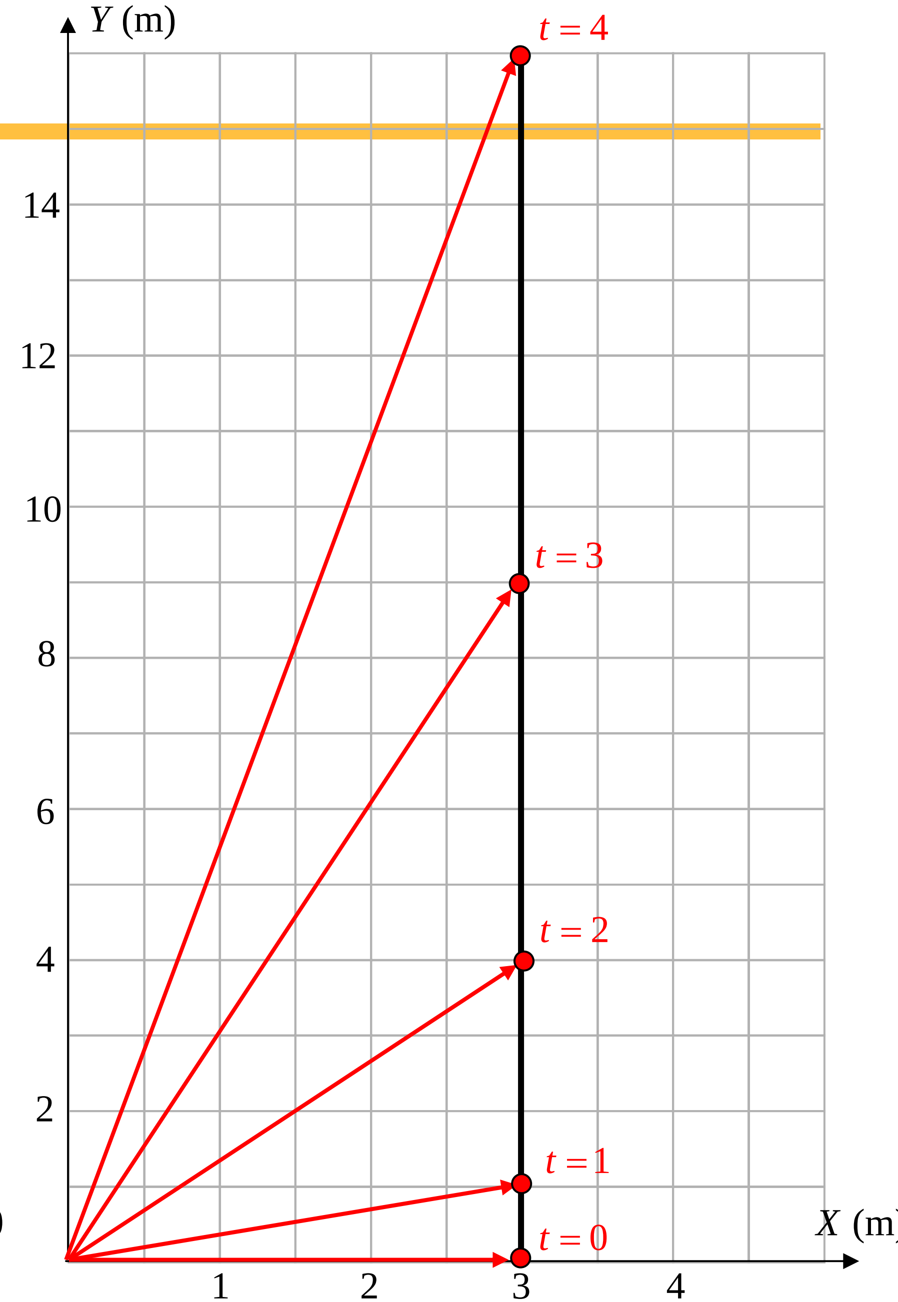
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 2\ \vec{j} \qquad \vec{a} = |\vec{a}| = 2$$

$v \rightarrow \text{m/s}$

$a \rightarrow \text{m/s}^2$

Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado según el eje *Y*





Lecciones de Física

2. El vector de posición de un punto material es

$\vec{r} = t\,\vec{i} + 4\left(2t - t^2\right)\vec{j}$ donde r está en m y t en s.

Determine la ecuación de su trayectoria, la aceleración del movimiento, y la velocidad y el radio de curvatura cuando t = 1.00 s.

$$\vec{r} = t\,\vec{i} + 4\left(2t - t^2\right)\vec{j} = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j}$$

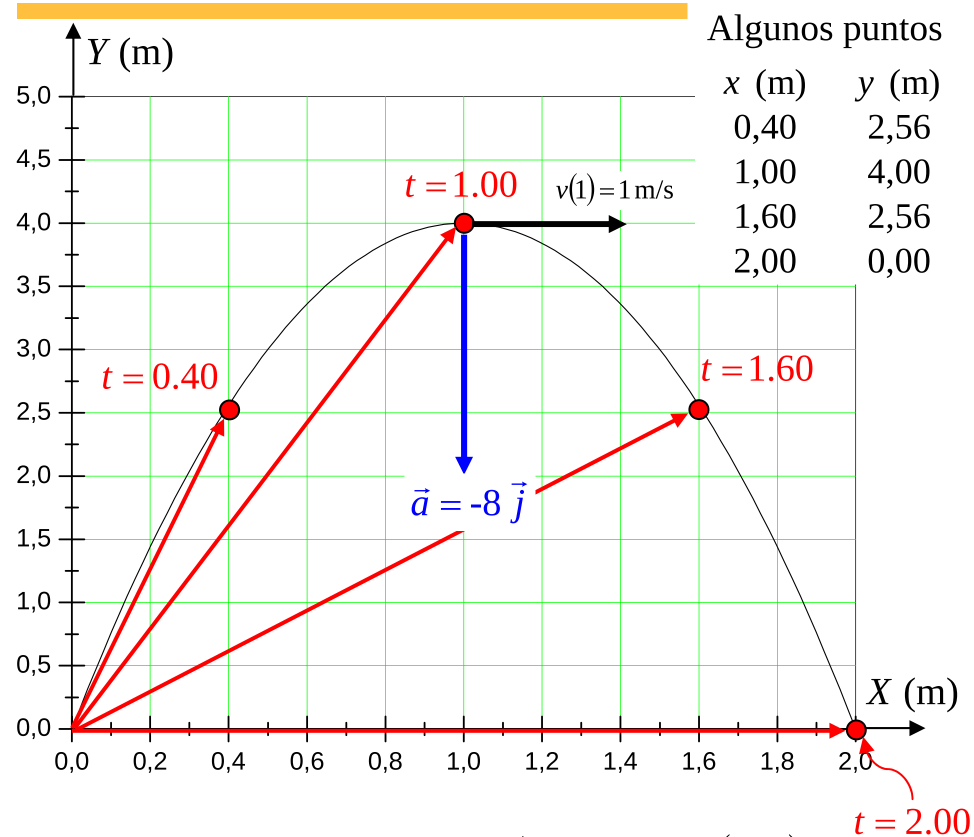
$$x(t) = t\,,\quad y(t) = 4\left(2t - t^2\right) \quad \Rightarrow \quad y = 4\left(2x - x^2\right)$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{i} + 4(2 - 2t)\,\vec{j} \qquad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \text{-}8\,\vec{j}$$

Componentes de la aceleración:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_t + \frac{v^2}{\rho}\vec{u}_n$$

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{1^2 + 16\,(2 - 2t)^2} \qquad \frac{dv}{dt} = \frac{64\,(t-1)}{\sqrt{1^2 + 16\,(2-2t)^2}}$$



Algunos puntos

x (m)	y (m)
0,40	2,56
1,00	4,00
1,60	2,56
2,00	0,00

* Cuando t = 1 s (punto x = 1 m, y = 4 m) $\quad v(1) = \sqrt{1^2 + 16\,(2 - 2\cdot 1)^2} = 1\ \text{m/s}$

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=1} = \frac{64\,(1-1)}{\sqrt{1^2 + 16\,(2-21)^2}} = 0$$

Aceleración tangencial nula

Cuando t = 1 s, la aceleración sólo tiene componente normal

$$\vec{a}(1) = -8\,\vec{j} = \frac{v(1)^2}{\rho(1)}\vec{u}_n = \frac{1}{\rho(1)}\left(\text{-}\,\vec{j}\right)$$

$$\rho(1) = \frac{1}{8} = 0.125\ \text{m}$$

En t = 1 s, el vector normal coincide con $-\,\vec{j}$

Nota: la relación que da el radio de curvatura para la curva $y = f(x)$ es

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}$$

Compruébese

AJB

3. Considere el mismo problema anterior.

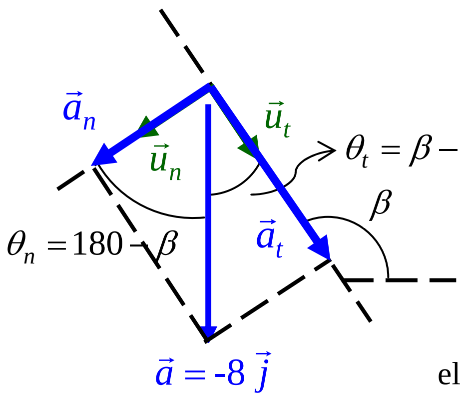
$\vec{r} = t\,\vec{i} + 4\left(2t - t^2\right)\vec{j}$ donde r está en m y t en s.

Determine ahora las componentes de la aceleración y el radio de curvatura cuando t = 1.60 s.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{i} + 4\left(2 - 2t\right)\vec{j} \qquad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \text{-}8\,\vec{j}$$

Componentes de la aceleración:

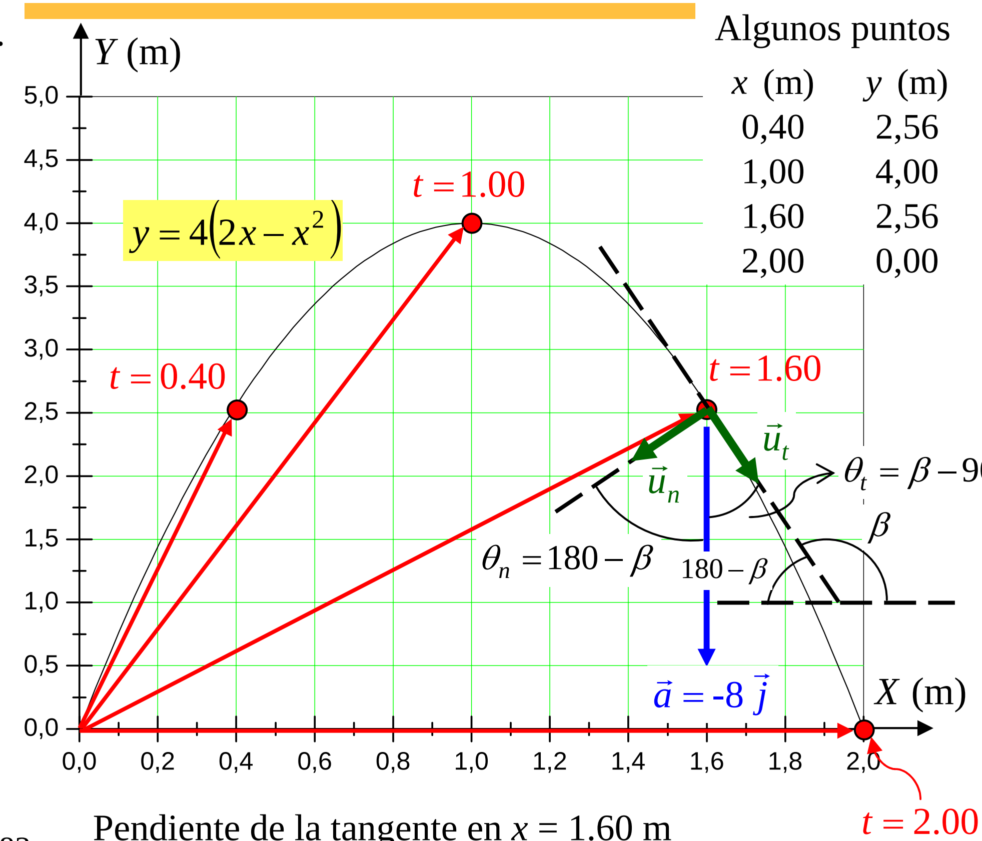
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \underbrace{\frac{dv}{dt}}_{a_t}\vec{u}_t + \underbrace{\frac{v^2}{\rho}}_{a_n}\vec{u}_n$$



Al sustituir el valor t = 1.60 s en

$$\frac{dv}{dt} = \frac{64\,(t-1)}{\sqrt{1^2 + 16\,(2-2t)^2}}$$

el resultado es también 7.83



Algunos puntos

x (m)	y (m)
0,40	2,56
1,00	4,00
1,60	2,56
2,00	0,00

$$a_t = a\cdot\cos\left(\beta - 90\right) = 8\cdot\cos 11.77^{\circ} = 7.83\ \text{m/s}^2$$

$$a_n = a\cdot\sin\left(\beta - 90\right) = 8\cdot\sin 11.77^{\circ} = 1.63\ \text{m/s}^2$$

Pendiente de la tangente en x = 1.60 m

$$m\left(x = 1.60\right) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1.60} = \left[8 - 8x\right]_{x=1.60} = -4.8 = \tan\beta$$

$$\beta = 101.77^{\circ}$$

$$\theta_t = \beta - 90 = 11.77^{\circ}$$

$$\theta_n = 180 - \beta = 78.23^{\circ}$$

Radio de curvatura en t = 1.60 s $\rightarrow$ $a_n = \dfrac{v^2}{\rho}$

$$\left|\vec{v}\right| = v = \sqrt{1^2 + 16\,(2 - 2t)^2}$$

$$v(1.60)^2 = 1^2 + 16\,(2 - 2\cdot 1.60)^2 = 24.04\ \text{m}^2/\text{s}^2$$

$$\rho(1.60) = \frac{v(1.60)^2}{a_n(1.60)} = \frac{24.04}{1.63} = 14.73\ \text{m}$$

Lecciones de Física

A J B

4. La aceleración de un punto material es $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$ expresada en m/s^2. En el instante t = 0 su posición y su velocidad son, respectivamente

$$\vec{r}_0 = 2\vec{i} + \vec{j} \ \text{(m)} \qquad \vec{v}_0 = \vec{i} \ \text{(m/s)}$$

Calcular su velocidad y su posición en t = 2 s

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad \vec{v} = \int \vec{a}\, dt + \vec{C} \qquad \vec{v} = \int \left(\vec{i} + \vec{j}\right) dt + \vec{C}$$

$$\vec{v} = t\,\vec{i} + t\,\vec{j} + \vec{C} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = (t+1)\,\vec{i} + t\,\vec{j}$$

$$t = 0 \rightarrow \vec{v}_0 = \vec{i} \quad \Rightarrow \quad \vec{i} = \vec{C}$$

Para t =2 s

$$\vec{v}(2) = 3\,\vec{i} + 2\,\vec{j}$$

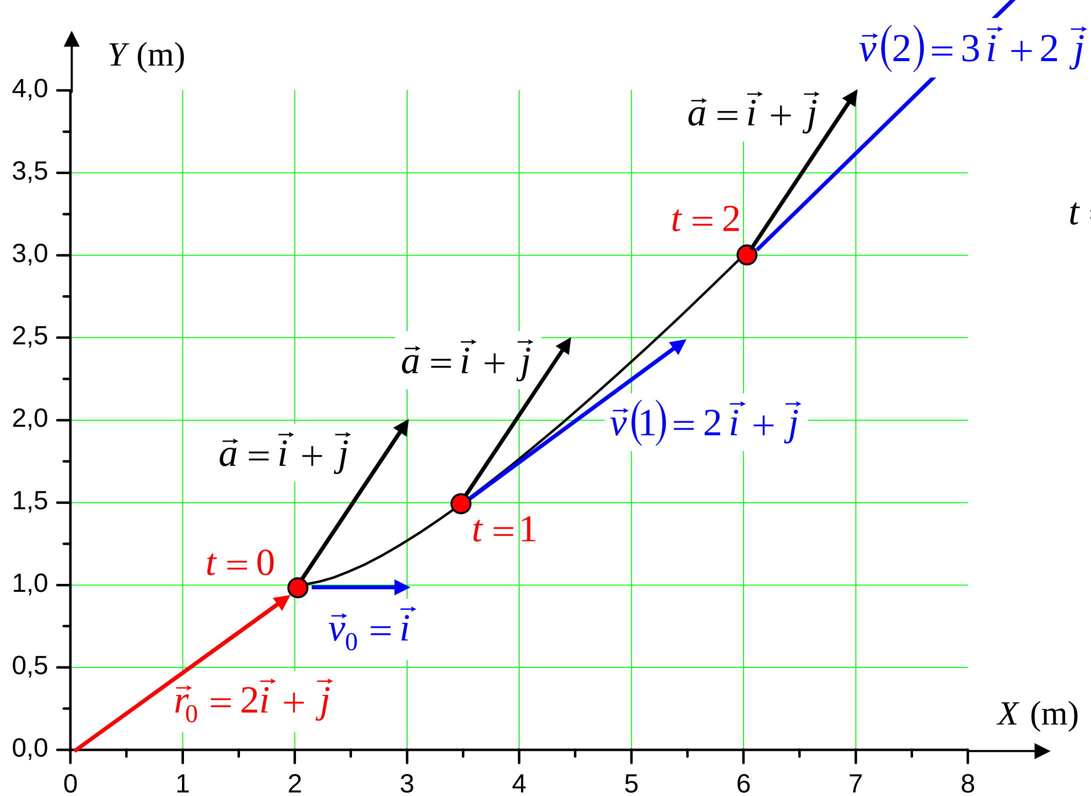
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad \vec{r} = \int \vec{v}\, dt + \vec{D} \qquad \vec{r} = \int \left((t+1)\,\vec{i} + t\,\vec{j}\right) dt + \vec{D}$$

$$\vec{r} = \left(\frac{t^2}{2} + t\right)\vec{i} + \frac{t^2}{2}\,\vec{j} + \vec{D}$$

$$t = 0 \rightarrow \vec{r}_0 = 2\vec{i} + \vec{j} \quad \Rightarrow \quad 2\vec{i} + \vec{j} = \vec{D}$$

$$\vec{r} = \left(\frac{t^2}{2} + t + 2\right)\vec{i} + \left(\frac{t^2}{2} + 1\right)\vec{j}$$

Para t =2 s $\quad \vec{r}(2) = 6\,\vec{i} + 3\,\vec{j}$



Lecciones de Física