AJB

Lecciones de Física

UCLM

# PROBLEMAS DE ESTÁTICA


Fundamentos Físicos de la Ingeniería. Departamento Física Aplicada UCLM

Equipo docente:
Antonio J Barbero
Alfonso Calera
Mariano Hernández.

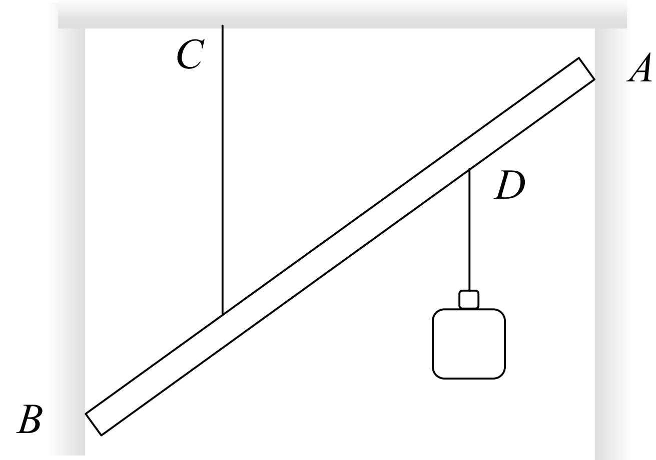
ETS Agrónomos Albacete

Pablo Muñiz García
José A. de Toro Sánchez

EU. I.T. Agrícola Ciudad Real

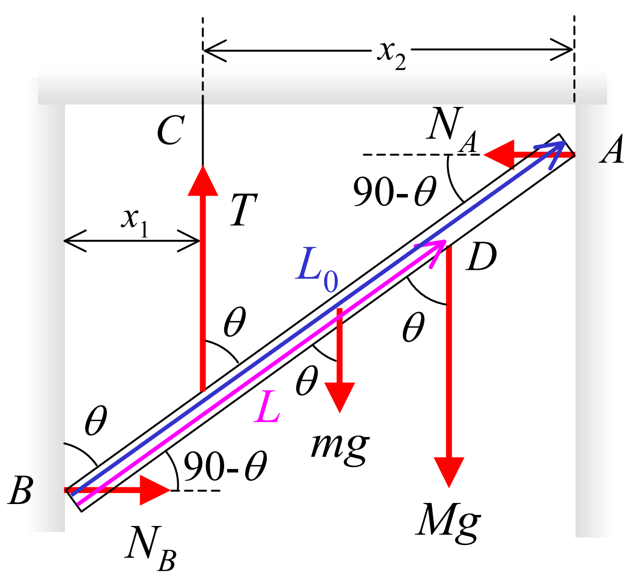
# PROBLEMA 1

Un tablón $AB$ de longitud $L_0$ y masa $m$ se encuentra encajado entre dos paredes lisas, sujeto del techo por un cable unido al punto $C$ y soportando un contrapeso de masa $M$ en $D$ (véase esquema). Si la distancia $BD$ es $L$, calcular la tensión del cable y las reacciones en $A$ y en $B$. Las distancias de $C$ a las esquinas izquierda y derecha son respectivamente $x_1$ y $x_2$. Aplicación numérica: $m = 10$ kg, $M = 50$ kg, $L_0 = 3$ m, $L = 2$ m, $x_1 = 0.5$ m, $x_2 = 1.5$ m.




---

Diagrama de sólido libre



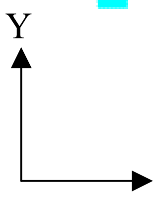

Las reacciones en los puntos $A$ y en $B$ son normales a las paredes ya que éstas son lisas y no presentan rozamiento

<u>Cálculo ángulo $\theta$</u>

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{x_1 + x_2}{L_0} \qquad \cos\theta = \frac{1}{L_0}\sqrt{L_0^2 - (x_1 + x_2)^2}$$

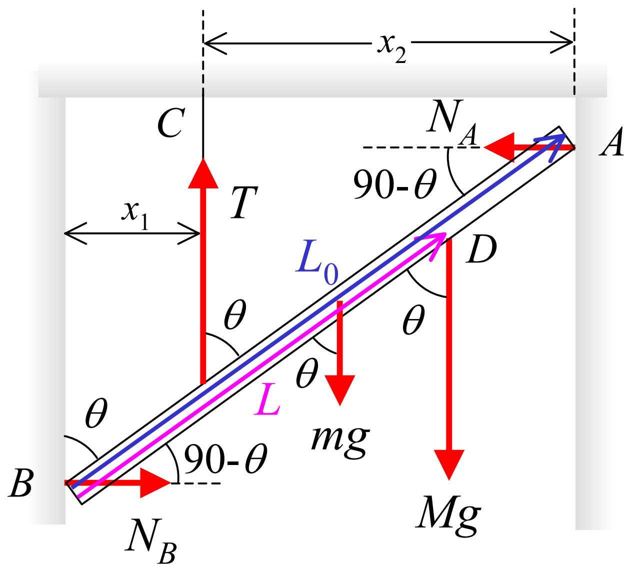
UCLM

# PROBLEMA 1 (2/2)




$$\sum F_x = 0 \qquad N_B - N_A = 0 \qquad N_A = N_B$$

$$\sum F_y = 0 \qquad T - (M+m)g = 0 \qquad T = (M+m)g$$




$$\sum M_B = 0 \qquad T \cdot x_1 - mg\frac{L_0}{2}\operatorname{sen}(180-\theta) - MgL\operatorname{sen}(180-\theta) + N_A L_0 \operatorname{sen}(90+\theta) = 0$$

$$T \cdot x_1 - mg\frac{L_0}{2}\operatorname{sen}\theta - MgL\operatorname{sen}\theta + N_A L_0\cos\theta = 0$$

$$N_A L_0 \cos\theta = mg\frac{L_0}{2}\operatorname{sen}\theta + MgL\operatorname{sen}\theta - (M+m)gx_1$$

$$N_A = \frac{mg\frac{L_0}{2}\operatorname{sen}\theta + MgL\operatorname{sen}\theta - (M+m)gx_1}{L_0\cos\theta} = N_B$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{x_1 + x_2}{L_0}$$

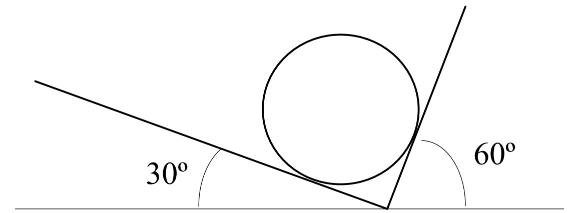
$$\cos\theta = \frac{1}{L_0}\sqrt{L_0^2 - (x_1+x_2)^2}$$

Valores numéricos

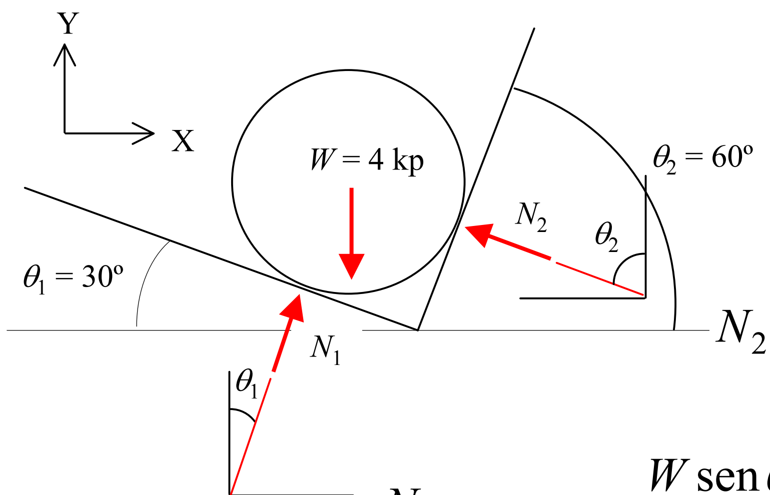
$T = 588$ N $\qquad N_A = N_B = 204.5$ N

# PROBLEMA 2

Un cilindro de peso 4 kp está apoyado sobre dos planos inclinados que forman ángulos de 30º y 60º con la horizontal. Suponiendo que las superficies de los dos planos inclinados son lisas, calcúlese la reacción de cada uno de los planos inclinados sobre el cilindro.




---




$$\sum F_X = N_1 \operatorname{sen}\theta_1 - N_2 \operatorname{sen}\theta_2 = 0$$

$$\sum F_Y = -W + N_1 \cos\theta_1 + N_2 \cos\theta_2 = 0$$

$$N_2 = N_1 \frac{\operatorname{sen}\theta_1}{\operatorname{sen}\theta_2} \qquad N_1 \cos\theta_1 + N_1 \frac{\operatorname{sen}\theta_1}{\operatorname{sen}\theta_2} \cos\theta_2 = W$$

$$N_1 = \frac{W \operatorname{sen}\theta_2}{\cos\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2} = \frac{W \operatorname{sen}\theta_2}{\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)} = 2\sqrt{3} \text{ kp}$$

$$N_2 = \frac{W \operatorname{sen}\theta_1}{\cos\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2} = \frac{W \operatorname{sen}\theta_1}{\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)} = 2 \text{ kp}$$

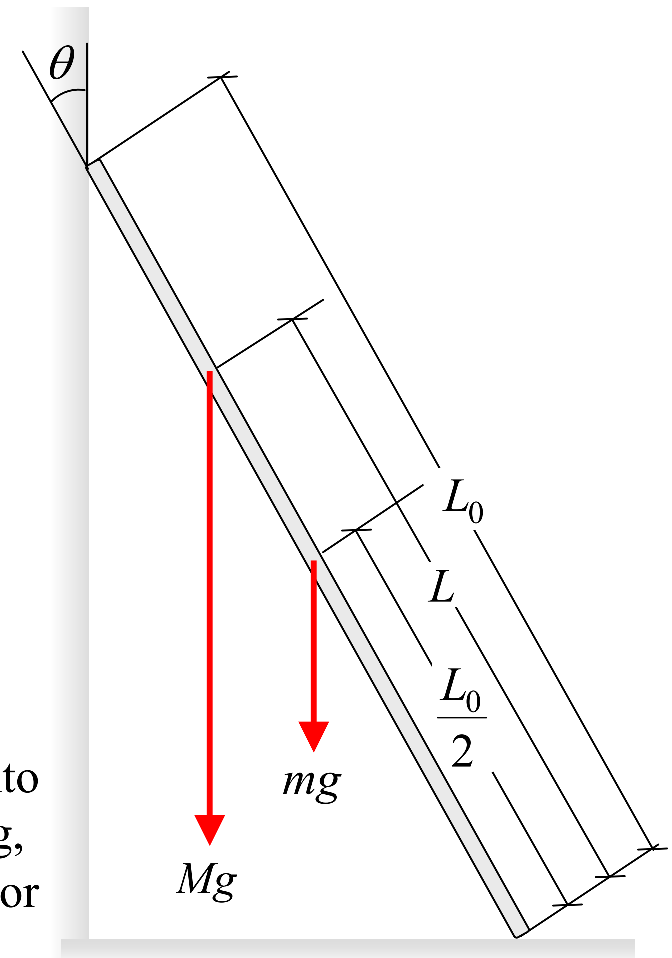
# PROBLEMA 3

Una escalera de longitud $L_0$ y masa $m$ está apoyada contra una pared vertical formando un ángulo θ con la misma. Cuando un hombre de masa $M$ sube por la escalera y alcanza un punto situado a una distancia $L$ del extremo inferior, la escalera se encuentra a punto de deslizar. Si el coeficiente de rozamiento estático entre la escalera y la pared es $\mu_A$, se pide:

a) Dibújese el D.S.L. De la escalera cuando el hombre ha subido al punto indicado.

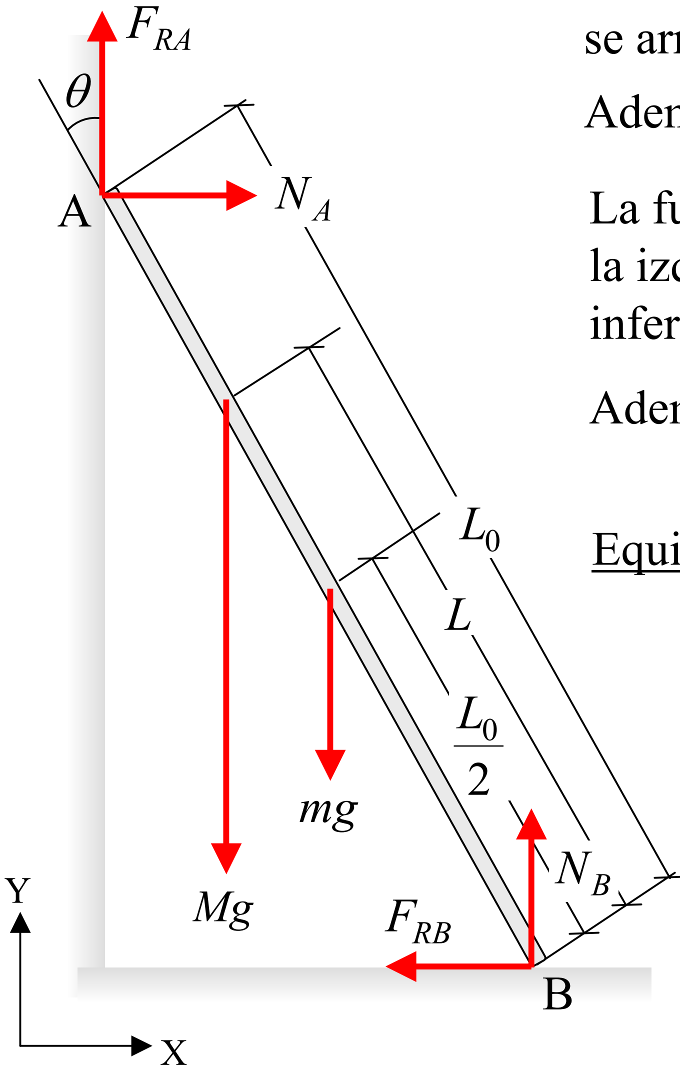
b) Determínese el coeficiente de rozamiento estático entre la escalera y el suelo.

c) Calcúlese numéricamente el coeficiente de rozamiento pedido en el apartado anterior si $L_0 = 4$ m, $m = 10$ kg, $M = 80$ kg, $L = 3$ m, $\theta = 30º$, $\mu_A = 0.2$. Tómese el valor de la aceleración de la gravedad como $g = 10$ m/s$^2$.



# PROBLEMA 3 (2/4)

Diagrama de sólido libre




La fuerza de rozamiento en el punto A está dirigida hacia arriba, ya que si la escalera deslizase su extremo superior se arrastraría hacia abajo.

Además tenemos la reacción normal en el punto A.

La fuerza de rozamiento en el punto B está dirigida hacia la izquierda, ya que si la escalera deslizase su extremo inferior se arrastraría hacia la derecha.

Además tenemos la reacción normal en el punto B.

Equilibrio de fuerzas

$$\sum F_x = 0$$

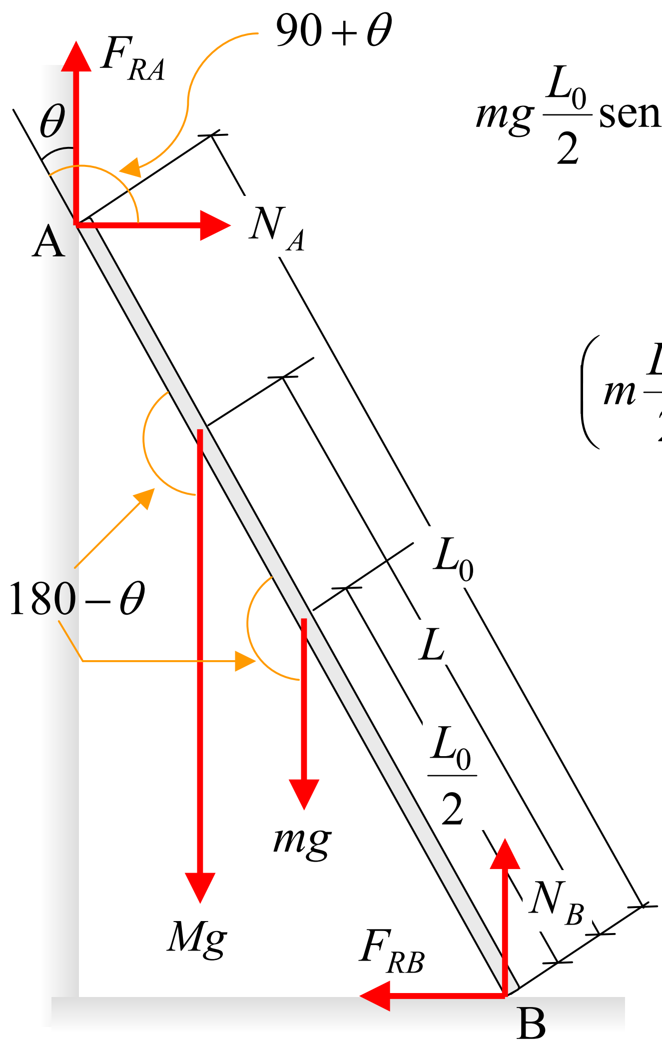
$$N_A - F_{RB} = N_A - \mu_B N_B = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$F_{RA} + N_B - (M+m)g = \mu_A N_A + N_B - (M+m)g = 0$$

# PROBLEMA 3 (3/4)

Equilibrio de momentos    Respecto al punto B    $\sum M_B = 0$    $+$




$$mg\frac{L_0}{2}\operatorname{sen}(180-\theta) + MgL\operatorname{sen}(180-\theta) -$$

$$- N_A L_0 \operatorname{sen}(90+\theta) - F_{RA} L_0 \operatorname{sen}\theta = 0$$

$$\left(m\frac{L_0}{2} + ML\right) g \operatorname{sen}\theta = N_A L_0 \cos\theta + \mu_A N_A L_0 \operatorname{sen}\theta$$

$$N_A = \frac{\left(m\frac{L_0}{2} + ML\right) g \operatorname{sen}\theta}{L_0 \cos\theta + \mu_A L_0 \operatorname{sen}\theta}$$

$$N_A = \frac{\left(\frac{m}{2} + M\frac{L}{L_0}\right) g \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta + \mu_A \operatorname{sen}\theta}$$

# PROBLEMA 3 (4/4)

Sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 & \boxed{N_A - \mu_B N_B = 0} \\ \sum F_y = 0 & \mu_A N_A + N_B - (M+m)g = 0 \\ & N_A = \dfrac{\left(\dfrac{m}{2} + M\dfrac{L}{L_0}\right) g \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta + \mu_A \operatorname{sen}\theta} \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad N_B = (M+m)g - \mu_A N_A$$

$$\rightarrow \mu_B = \frac{N_A}{N_B} = \frac{N_A}{(M+m)g - \mu_A N_A}$$

$$\mu_B = \frac{N_A}{N_B} = \frac{1}{\left[\dfrac{(M+m)g}{N_A}\right] - \mu_A}$$

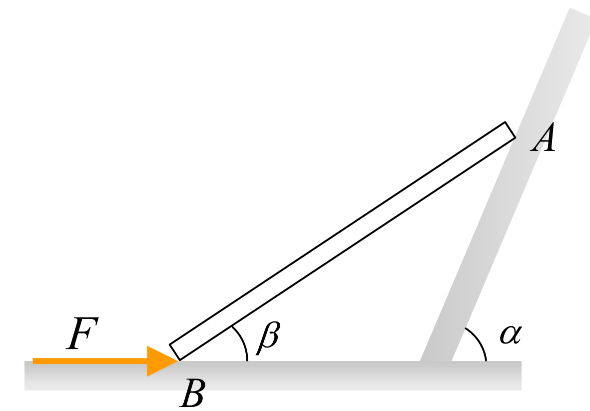
Resolución numérica: $L_0 = 4$ m, $m = 10$ kg, $M = 80$ kg, $L = 3$ m, $\theta = 30^\circ$, $\mu_A = 0.2$, $g = 10$ m/s$^2$

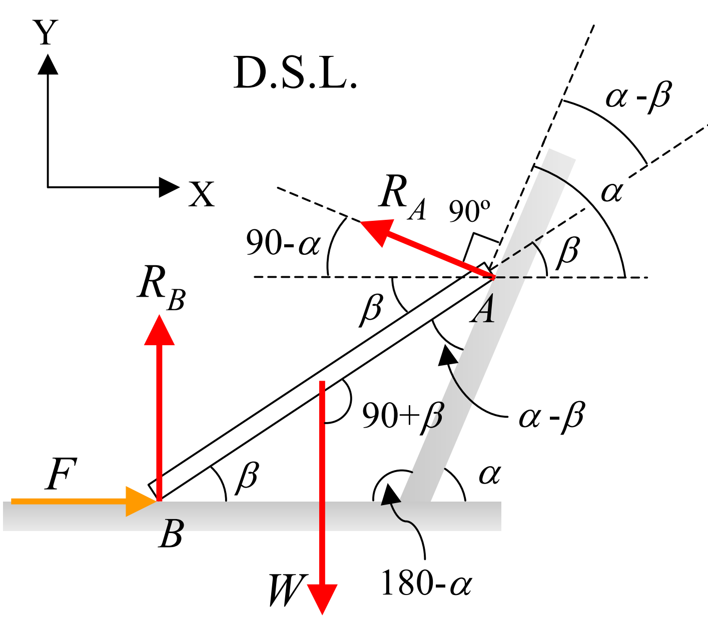
$$N_A = 336.4 \text{ N} \qquad N_B = 832.7 \text{ N} \qquad \mu_B = 0.404$$

# PROBLEMA 4

Una barra homogénea *AB* de longitud $L_0$ y peso *W* se apoya sobre el punto *A* de una pared lisa inclinada un ángulo α y sobre el punto *B* de un suelo rugoso. En equilibrio la barra forma un ángulo $\beta$ con el suelo. Se pide determinar la fuerza horizontal *F* de rozamiento en el punto de contacto con el suelo, las reacciones normales en los dos apoyos y el coeficiente de rozamiento en *B*.

Datos: $W = 5$ kp, $L_0 = 2$ m, $\alpha = 60º$, $\beta = 30º$.




$R_A$ y $R_B$ son las normales en *A* y *B*, respectivamente

$$\sum F_x = 0 \qquad F - R_A \cos(90 - \alpha) = 0$$

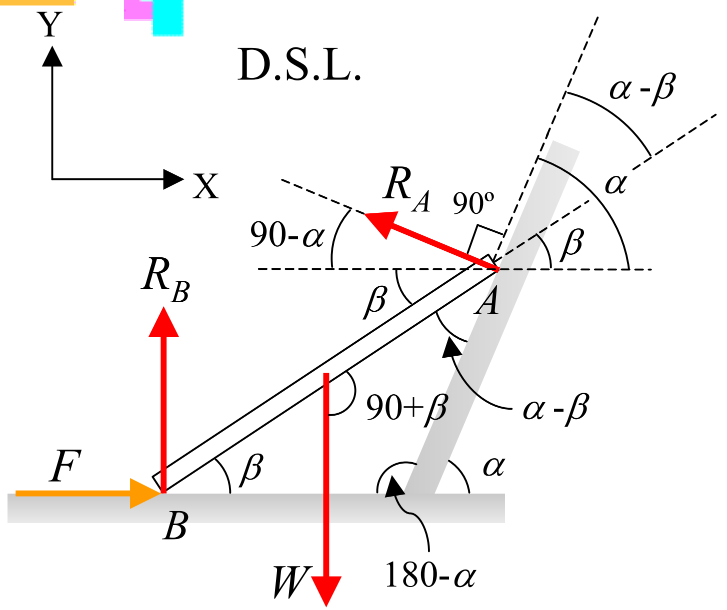
$$F - R_A \operatorname{sen} \alpha = 0 \qquad [1]$$

$$\sum F_y = 0 \qquad R_B - W + R_A \operatorname{sen}(90 - \alpha) = 0$$

$$R_B - W + R_A \cos \alpha = 0 \qquad [2]$$

# PROBLEMA 4 (2/2)

D.S.L.




$$\sum M_B = 0$$

$$W\frac{L_0}{2}\operatorname{sen}(90+\beta) - R_A L_0 \operatorname{sen}(90+\alpha-\beta) = 0$$

$$W\frac{L_0}{2}\cos\beta - R_A L_0 \cos(\alpha-\beta) = 0 \qquad [3]$$

$$R_A = \frac{W\cos\beta}{2\cos(\alpha-\beta)}$$

[1] $\quad F - R_A \operatorname{sen}\alpha = 0$ $\qquad F = \dfrac{W\operatorname{sen}\alpha\cos\beta}{2\cos(\alpha-\beta)}$

[2] $\quad R_B - W + R_A\cos\alpha = 0$ $\qquad R_B = W\left(1 - \dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{2\cos(\alpha-\beta)}\right)$

**Resultados numéricos**

$R_A = 2.50 \text{ kp}$

$F = 2.17 \text{ kp}$

$R_B = 3.75 \text{ kp}$

$\mu = 0.577$

Coeficiente rozamiento

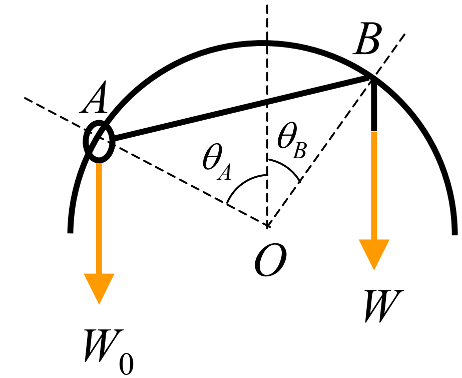
$F = \mu R_B \qquad \mu = \dfrac{F}{R_B}$

$$\mu = \frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta}{2\cos(\alpha-\beta) - \cos\alpha\cos\beta}$$

UCLM

# PROBLEMA 5

En un aro semicircular de centro $O$ hay una anilla $A$ de la que pende un peso $W_0$. La anilla está sujeta mediante un hilo inextensible que pasa por un eje normal al aro en el punto $B$ (ver diagrama), de cuyo extremo cuelga un peso $W$. La anilla resbala sin rozamiento sobre el aro hasta alcanzar la posición de equilibrio, en cuyo momento los ángulos subtendidos con la vertical por las posiciones $A$ y $B$ son respectivamente $\theta_A$ y $\theta_B$. Determínese la razón de los pesos $W_0/W$.

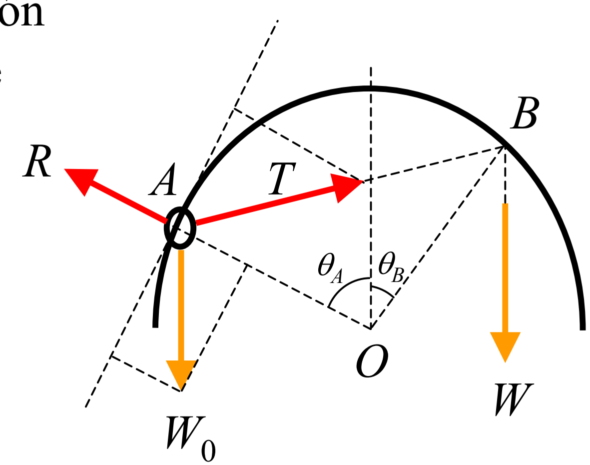



---

Diagrama de sólido libre de la anilla $A$

1º) Como no hay rozamiento entre anilla y aro, la reacción $R$ en el punto de equilibrio debe ser radial: carece de componentes en dirección tangente.

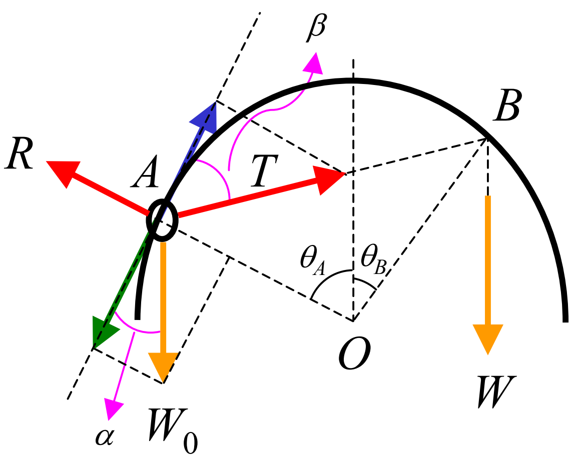
2º) La componente del peso $W_0$ en la dirección tangente y en sentido descendente ha de ser compensada por la componente tangente de la tensión $T$ del hilo en sentido ascendente.

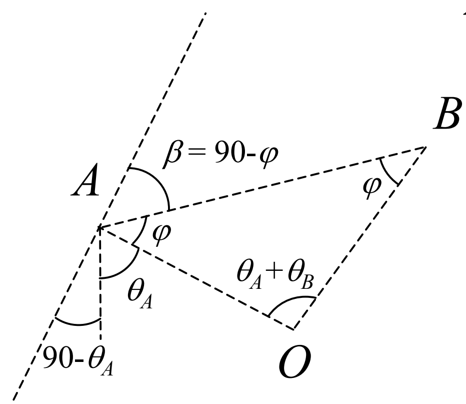



3º) La tensión $T$ del hilo es igual al peso $W$ colgado en B.

# PROBLEMA 5 (2/2)

En equilibrio se verifica $W_0 \cos\alpha = T \cos\beta$




*OA* y *OB* son iguales al radio del aro, de modo que el triángulo *OAB* es isósceles

$$2\varphi + \theta_A + \theta_B = 180$$

$$\varphi = 90 - \frac{\theta_A + \theta_B}{2}$$

$$\alpha = 90 - \theta_A \qquad \beta = \frac{\theta_A + \theta_B}{2}$$

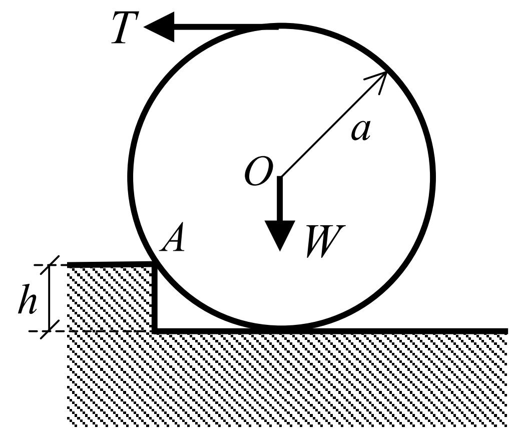
Como la tensión $T$ la proporciona el peso colgado en *B*, se verifica $T = W$

$$W_0 \cos(90 - \theta_A) = W \cos\frac{\theta_A + \theta_B}{2}$$

$$\frac{W_0}{W} = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta_A} \cdot \cos\frac{\theta_A + \theta_B}{2}$$

# PROBLEMA 6

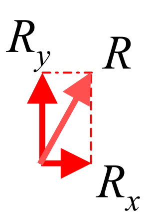
Se tiene que hacer pasar un rodillo cilíndrico de radio *a* y peso *W* por encima de un escalón de altura *h*. Para ello se enrolla un cable alrededor del rodillo y se tira del mismo horizontalmente (véase esquema). El borde *A* del escalón es rugoso. Calcúlese el valor de la tensión *T* aplicada al cable a partir del cual se consigue superar el escalón y la reacción correspondiente en el borde *A*.

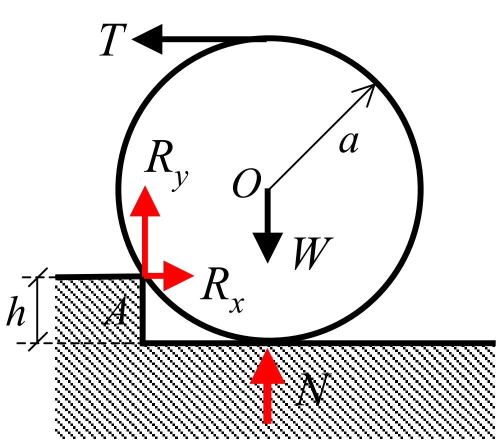



Aplicación numérica: $W = 4000$ N; $a = 2$ m; $h = 50$ cm.

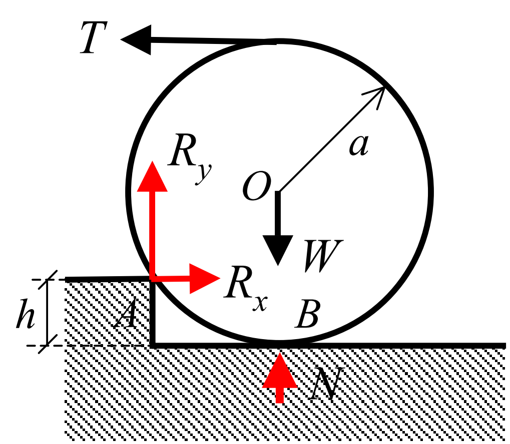
---

A medida que se incrementa la tensión *T* del cable aumenta la reacción en el borde *A* y disminuye la normal aplicada en *B* (punto de contacto con el suelo).



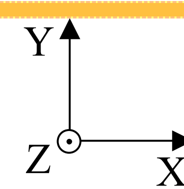




Menor tensión

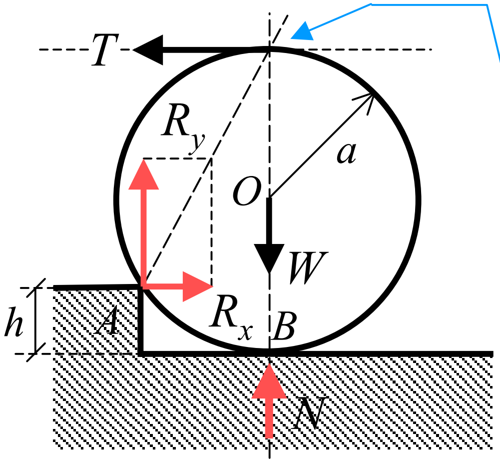



Mayor tensión

# PROBLEMA 6 (2/3)




Equilibrio estático: mientras que el rodillo no supere el escalón




$$\sum F_x = R_x - T = 0$$

$$\sum F_y = R_y + N - W = 0$$

El rodillo está a punto de superar el escalón cuando se cumplen dos condiciones:

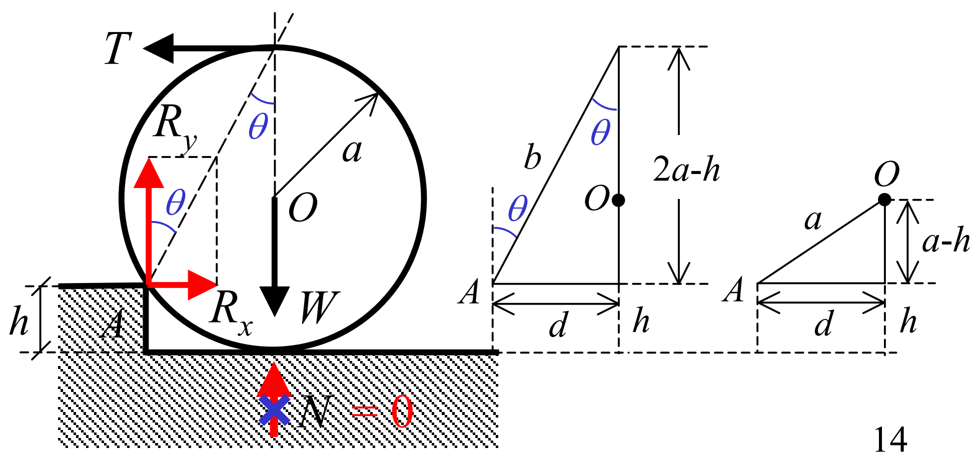
1º) Cuando la normal $N$ vale cero: en ese momento no ejerce presión contra el suelo en el punto $B$

2º) Cuando las líneas de acción de los vectores $T$, $W$ y $R$ concurren en un punto (son vectores coplanarios)

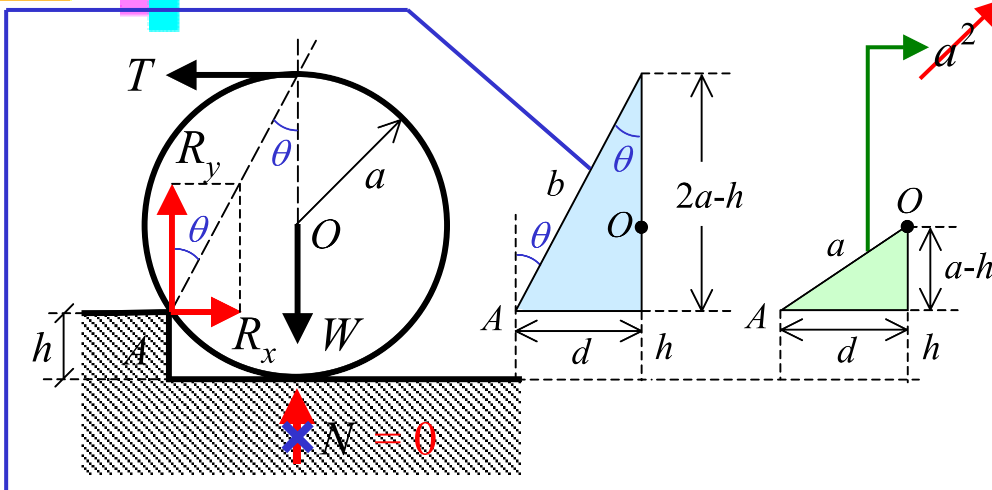
Condiciones en el momento en que $N = 0$

$R_x = T \qquad R_y = W$

Buscamos una relación geométrica adicional que ligue $R_x$ y $R_y$



# PROBLEMA 6 (3/3)




$$\cancel{a^2} = d^2 + (a-h)^2 = d^2 + \cancel{a^2} + h^2 - 2ah$$

$$d^2 = h \cdot (2a-h) \qquad d = \sqrt{h \cdot (2a-h)}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{d}{2a-h} = \sqrt{\frac{h}{2a-h}}$$

VALORES NUMÉRICOS

$$T = 1511.9 \text{ N}$$

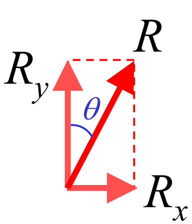
$$R = 2285.7 \text{ N} \qquad \theta = 20.7^{\circ}$$

Disponemos de las siguientes tres ecuaciones

$$R_x = T \qquad R_y = W \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{R_x}{R_y} \rightarrow T = W \operatorname{tg}\theta = W\sqrt{\frac{h}{2a-h}}$$

Este es el valor mínimo para que empiece a remontar el escalón!

Componentes de $R$

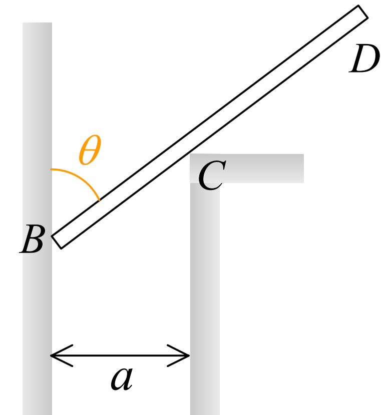


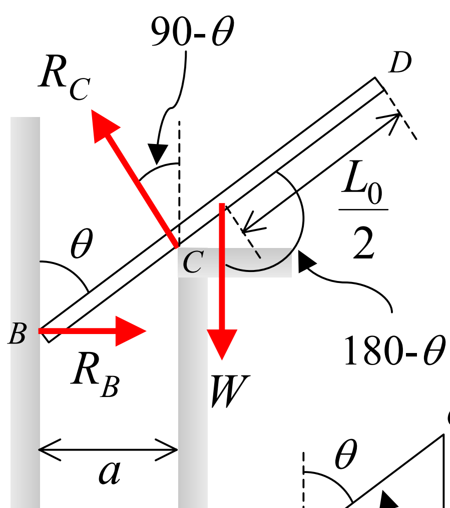

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{W^2 \frac{h}{2a-h} + W^2} = W\sqrt{\frac{2a}{2a-h}}$$

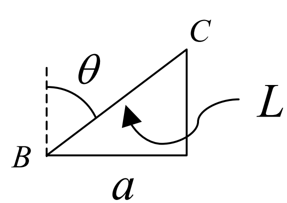
# PROBLEMA 7

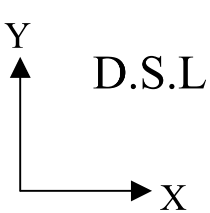
Una barra homogénea *BD* de longitud $L_0$ y peso *W* se apoya en los puntos *B* y *C* indicados en el diagrama adjunto. Los rozamientos en los apoyos son despreciables. Determinar el ángulo $\theta$ para el que se consigue el equilibrio y calcular las reacciones en los apoyos *B* y *C*.

Datos: $W = 5$ kp, $a = 0.40L_0$.




D.S.L.

$$\sum F_x = 0 \qquad R_B - R_C \operatorname{sen}(90-\theta) = 0 \qquad R_B - R_C \cos\theta = 0$$

$$\sum F_y = 0 \qquad R_C \cos(90-\theta) - W = 0 \qquad R_C \operatorname{sen}\theta - W = 0$$

$$\sum M_B = 0 \qquad \frac{a}{\operatorname{sen}\theta} R_C - W\frac{L_0}{2}\operatorname{sen}(180-\theta) = 0$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{a}{L} \qquad L = \frac{a}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\theta} R_C - W\frac{L_0}{2}\operatorname{sen}\theta = 0$$

# PROBLEMA 7 (2/2)

$$R_B - R_C\cos\theta = 0$$

$$R_C\,\mathrm{sen}\,\theta - W = 0 \quad\longrightarrow\quad R_C = \frac{W}{\mathrm{sen}\,\theta}$$

$$\frac{a}{\mathrm{sen}\,\theta}R_C - W\frac{L_0}{2}\mathrm{sen}\,\theta = 0$$

$$\frac{a}{\mathrm{sen}\,\theta}\frac{W}{\mathrm{sen}\,\theta} = W\frac{L_0}{2}\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\mathrm{sen}^3\,\theta = \frac{2a}{L_0}$$

$$\mathrm{sen}\,\theta = \left(\frac{2a}{L_0}\right)^{1/3}$$

$$R_C = \frac{W}{\mathrm{sen}\,\theta} = W\left(\frac{L_0}{2a}\right)^{1/3}$$

$$R_B = W\sqrt{\left(\frac{L_0}{2a}\right)^{2/3} - 1}$$

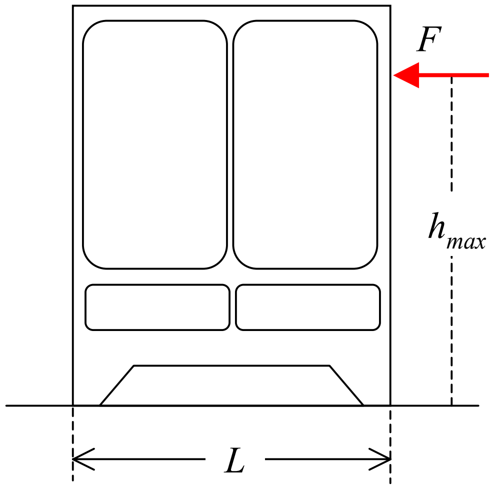
$$R_B = R_C\cos\theta = W\frac{\cos\theta}{\mathrm{sen}\,\theta} = W\frac{\sqrt{1-\mathrm{sen}^2\,\theta}}{\mathrm{sen}\,\theta} = W\sqrt{\frac{1}{\mathrm{sen}^2\,\theta} - 1} = W\sqrt{\left(\frac{L_0}{2a}\right)^{2/3} - 1}$$

Resultados numéricos: usando $W = 5$ kp, $a = 0.40L_0$ tenemos:

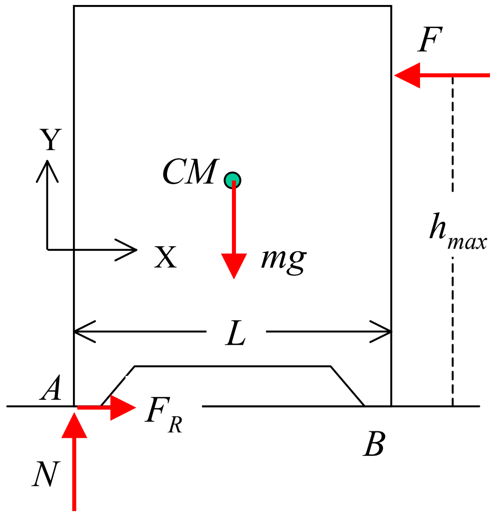
$$\mathrm{sen}\,\theta = \left(\frac{2\cdot 0.40L_0}{L_0}\right)^{1/3} = 0.9283 \qquad \theta = 68.2^{\mathrm{o}}$$

# PROBLEMA 8

En una mudanza es preciso trasladar un armario de peso $mg$ deslizándolo sobre el piso y para ello se le empuja horizontalmente con una fuerza constante $F$. La anchura del armario es $L$ (véase figura). El coeficiente de rozamiento estático es μ. ¿Cuál es la máxima altura $h_{max}$ a la que puede aplicarse la fuerza $F$ sin que el armario vuelque?




Supongamos que aplicamos la fuerza $F$ en el punto preciso para que esté a punto de volcar. El DSL en ese caso es




Observe que cuando el vuelco es inminente la reacción en $B$ es nula, mientras que en $A$ la reacción normal ha de ser igual al peso:

$$\sum F_Y = N - mg = 0 \qquad N = mg$$

La condición para que se produzca el vuelco es que el momento con respecto al punto $A$ de la fuerza $F$ sea mayor que el del peso respecto al mismo punto, así que el vuelco resulta inminente cuando se cumpla que:

$$\sum \tau = F \cdot h_{max} - mg\frac{L}{2} = 0$$

# PROBLEMA 8 (2/2)

Además, en el momento en que el vuelco es inminente, la fuerza de rozamiento estática ha de ser igual a *F*:

$$\sum F_X = F_R - F = 0 \qquad F = F_R = \mu N = \mu mg$$

Sustituyendo en la ecuación de los momentos $F \cdot h_{max} - mg\frac{L}{2} = 0$

$$\mu mg \cdot h_{max} - mg\frac{L}{2} = 0 \longrightarrow \boxed{h_{max} = \frac{L}{2\mu}}$$

Observe que el valor de la altura máxima para que el armario vuelque es independiente del valor de *F*, depende de dónde se aplique la fuerza. Si la altura a la que se aplica *F* es menor que ésta, entonces el armario se deslizará sobre el piso sin volcar, tal y como se pretende.