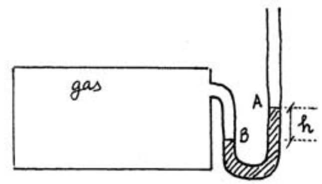
PROBLEMAS ESTÁTICA DE FLUIDOS

1 La presión absoluta de un tanque de gas es proporcional a la masa que contiene, y se controla mediante un manómetro de mercurio, que marca una diferencia de alturas de 200 mm. Después de realizar una carga adicional, se observa que la diferencia de alturas sube hasta 700 mm. Determinar el porcentaje en masa de gas que se ha añadido, suponiendo que en el proceso no varía la temperatura. Densidad del mercurio: $\rho = 13.6\ g/cm^3$.



SOLUCIÓN

La presión en el punto B es la presión debida al gas. La presión en A es la presión atmosférica. De acuerdo con la ec. fundamental de la estática de fluidos debe verificarse

$$p_B = p_A + \rho g h$$

(Nótese que el manómetro nos da la presión manométrica $p_B - p_A = \rho g h$)

Inicialmente $h = h_1$ y $p_B = p_1$ $:\rightarrow p_1 = p_A + \rho g h_1$

Después de cargar gas $\begin{cases} h = h_2 \\ p_B = p_2 \end{cases} : \longrightarrow p_2 = p_A + \rho g h_2$

Como la presión del gas es proporcional a su masa, ha de verificarse $p = K \cdot m \Rightarrow \begin{cases} p_1 = K m_1 \\ p_2 = K m_2 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{ll} K m_1 = p_A + \rho g h_1 & (*) \\ K m_2 = p_A + \rho g h_2 & (**) \end{array}\right\}$$

Restando $(**) - (*)$

$$K(m_2 - m_1) = \rho g (h_2 - h_1) \qquad (\overset{*}{**})$$

Finalmente, dividiendo $\frac{(\overset{*}{**})}{(*)} : \rightarrow \frac{m_2 - m_1}{m_1} = \frac{\rho g (h_2 - h_1)}{p_A + \rho g h_1}$

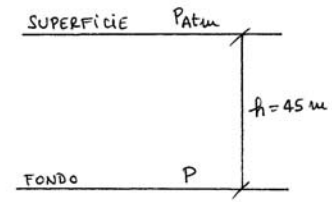
Llamando $m_2 - m_1 = \Delta m$, queda

$$\frac{\Delta m}{m_1} = \frac{\rho g (h_2 - h_1)}{p_A + \rho g h_1} = \frac{13600\ \frac{Kg}{m^3} \cdot 9.8\ m/s^2 \cdot 0.5\ m}{101293\ Pa + 13600\ \frac{Kg}{m^3} \cdot 9.8\ \frac{m}{s^2} \cdot 0.2\ m} = \frac{66640}{127949} = 0{,}5208$$

Porcentaje añadido : $100 \cdot \frac{\Delta m}{m_1} = 52{,}08\ \%$

2 Un submarinista experto en misiones de rescate de pecios tiene que sumergirse a 45 m de profundidad para inspeccionar los restos de un galeón hundido. Si la máxima descompresión a la que es prudente someterse sin que haya efectos fisiológicos graves es de 0.15 bar/minuto, ¿cuánto tiempo debe invertir y cómo debe realizar el viaje de regreso a la superficie una vez concluido su trabajo?. Densidad del agua del mar: $1.03\ g/cm^3$.

SOLUCIÓN



A 45 m de profundidad la sobrepresión que reina con respecto a la superficie es:

$$p - p_{atm} = \Delta p = \rho g h$$

$$\Delta p = 1.03 \cdot 10^3\ \frac{Kg}{m^3} \cdot 9.8\ \frac{m}{s^2} \cdot 45\ m = 454230\ Pa$$

$$\Delta p = 4.54\ bar$$

Cuando regresa a la superficie ha de sufrir una descompresión de 4.54 bar. Para hacerlo a razón de 0.15 bar/minuto, deberá invertir un tiempo de

$$t = \frac{\Delta p}{0.15} = \frac{4.54}{0.15} = 30.27 \simeq 30\ min.$$

La máxima distancia que debe subir en 1 minuto es:

$$y = \frac{0.15\ bar}{\rho g} = \frac{15000\ Pa}{1.03 \cdot 10^3\ \frac{Kg}{m^3} \cdot 9{,}8\ \frac{m}{s^2}} = 1.49\ m. \simeq 1.5\ m.$$

El viaje de regreso tendrá que realizarlo subiendo 1.5 m cada vez, deteniéndose 1 minuto, y así sucesivamente. Alcanzará la superficie al cabo de 30 minutos.

PROBLEMAS ESTÁTICA DE FLUIDOS

3 Considerando la atmósfera como un fluido en reposo, determinar la presión a una altura de 670 m, 4000 m y 8800 m por encima del nivel del mar. Datos al nivel del mar: Densidad $\rho_0 = 1.25\ Kg/m^3$; Presión normal $p_0 = 1013\ mb$; Aceleración de la gravedad: $g = 9.80\ m/s^2$

Nota. Se entiende que estos datos se refieren a una temperatura concreta y que la aceleración de la gravedad no varía significativamente en el intervalo de alturas considerado.

SOLUCIÓN

De acuerdo con la ec. fundamental de la estática de fluidos: $\frac{dp}{dy} = -\rho g$

El aire es un fluido compresible, en el que la densidad es proporcional a la presión:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{P}{P_0}$$

Por tanto

$$\frac{dp}{dy} = -\rho_0 \frac{P}{P_0} g \Rightarrow \frac{dp}{P} = -\frac{\rho_0 g}{P_0} dy$$

Al nivel del mar: $y = y_0 = 0$; $p = p_0 = 1013\ mb$

A una altura y: $y = y$; $p = p$

$$\int_{P_0}^{P} \frac{dp}{P} = -\int_0^y \frac{\rho_0 g}{P_0} dy = -\frac{\rho_0 g}{P_0}\int_0^y dy \Rightarrow \boxed{\ln \frac{P}{P_0} = -\frac{\rho_0 g}{P_0} y}$$

$$\boxed{P = P_0\, e^{-\frac{\rho_0 g}{P_0} y}}$$

Llamando $a = \frac{\rho_0 g}{P_0} = \frac{1.25\ Kg/m^3 \cdot 9{,}8\ m/s^2}{1{,}013 \cdot 10^5\ Pa} = 1{,}209 \cdot 10^{-4}\ m^{-1} = 0{,}1209\ Km^{-1}$

$$\boxed{P = P_0\, e^{-ay}}$$

$P_0 = 1013\ mb$

$a = 1{,}209 \cdot 10^{-4}\ m^{-1} = 0{,}1209\ Km^{-1}$

Casos particulares:

a) $y = 760\ m = 0{,}76\ Km$ (≃ Altura de Albacete): $P_a = 1013 \cdot e^{-0.1209 \cdot 0{,}76} = 924\ mb$

b) $y = 4000\ m = 4\ Km$ (≃ Altura de Bogotá) $P_b = 1013\ e^{-0.1209 \cdot 4} = 625\ mb$

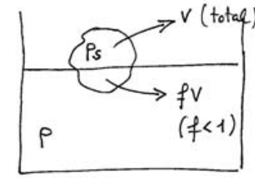
c) $y = 8800\ m = 8{,}8\ Km$ (≃ Altura del Everest) $P_c = 1013\ e^{-0.1209 \cdot 8.8} = 350\ mb$

4 Un trozo de madera flota en agua y mantiene sumergidas tres cuartas partes de su volumen. Después se echa en aceite y mantiene sumergido un 95% del volumen. Determinar la densidad de la madera y del aceite.

SOLUCIÓN

De acuerdo con el P. de Arquímedes, cualquier sólido sumergido en un líquido sufre un empuje vertical hacia arriba igual al peso del volumen de líquido que desaloja.

En particular, cuando un sólido flota en un líquido, el empuje proviene de un volumen de líquido igual a la parte sumergida, y este volumen equilibra el peso del cuerpo.



ρ = densidad del líquido

ρ_s = " " sólido

f = fracción de volumen sumergida

* Si el cuerpo flota $E = P$

$\rho f V \cdot g = \rho_s V g \Rightarrow \rho f = \rho_s$

$E = \rho \cdot f \cdot V \cdot g$

$P = mg = \rho_s V g$

* Cuando el líquido es agua : $\rho = 1\ Kg/dm^3$
$f = 0.75$

* Cuando el líquido es aceite : ρ' = a determinar
$f' = 0.95$

$$\left.\begin{array}{l} \rho f = \rho_s \\ \rho' f' = \rho_s \end{array}\right\} \text{ Igualando } \rho f = \rho' f' \Rightarrow \rho' = \frac{f}{f'}\rho$$

Densidad del aceite $\rho' = \frac{0.75}{0.95} \cdot 1\ Kg/dm^3 = 0.737\ Kg/dm^3$

Densidad de la madera $\rho_s = \rho f = 0.75 \cdot 1\ Kg/dm^3 = 0{,}75\ Kg/dm^3$

PROBLEMAS ESTÁTICA DE FLUIDOS

5 Un vaso parcialmente lleno de agua se coloca sobre el platillo de una balanza de resorte, la cual indica un peso de 75 N. Seguidamente se toma una pequeña bola metálica de densidad relativa 5 y 35 N de peso y, suspendiéndola de una cuerda, se sumerge totalmente en el agua pero sin tocar las paredes ni el fondo. ¿Varía la indicación de la balanza?

SOLUCIÓN

El peso señalado por la balanza de resorte es igual a la reacción R_0 que el resorte ejerce sobre el vaso y el agua que contiene; el peso P_0 es la fuerza que el vaso y el agua hacen sobre la balanza. Para decidir si varía o no la indicación de la balanza hay que estudiar si al sumergir la bola cambia o no dicha reacción.

*) Consideremos la bola sumergida, de peso P y sometida al empuje E y la tensión T (tensión de la cuerda)

Condición estática: $\sum F = 0 \Rightarrow \boxed{T + E = P \quad (1)}$

**) Consideremos el sistema formado por vaso + bola sumergida. R es ahora la reacción que actúa sobre el sistema, es decir, el peso señalado por la balanza de resorte.

Condición estática $\sum F = 0 \Rightarrow T + R = P_s$

donde $P_s \equiv$ peso del sistema (vaso + bola)

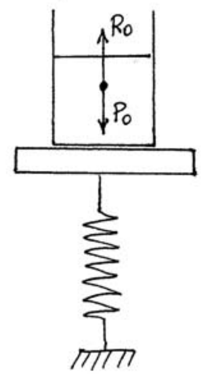
$$\boxed{T + R = P + P_0 \quad (2)}$$

Restando (2) − (1) $\Rightarrow$ $R - E = P_0$

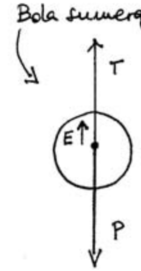
$$\boxed{R = E + P_0}$$

LA INDICACIÓN DE LA BALANZA AUMENTA EN UNA CANTIDAD IGUAL AL EMPUJE

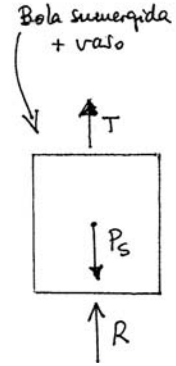
Vaso sin bola



Bola sumergida



Bola sumergida + vaso



Cálculo del empuje

La masa de la bola es $m = \rho V \Rightarrow V = \frac{m}{\rho} = \frac{P/g}{\rho} = \frac{P}{\rho g}$

El empuje es igual al peso del volumen de agua desalojado:

$$E = (\rho_{agua} \cdot V) \cdot g = \rho_{agua} \frac{P}{\rho \cdot g} \cdot g = \frac{P}{\rho/\rho_{agua}} = \frac{P}{\rho_r}$$

donde $\rho_r = 5$ y $P = 35$ N

$$E = \frac{35}{5} = 7 \text{ N}$$

Por tanto la balanza marca $R = P_0 + E = 75 + 7 = \underline{\underline{82 \text{ N}}}$

6

Un joyero emplea una aleación de plata y oro para realizar un objeto decorativo cuyo peso total es 4.50 N. Cuando el objeto se cuelga de una balanza de resorte y se sumerge completamente en agua, el peso registrado es 4.20 N. ¿Cuál es la composición de la aleación? Densidades relativas: Plata 10.5; Oro 19.3.

SOLUCIÓN

El empuje que sufre el objeto es:

$$E = \text{PESO} - \text{PESO SUMERGIDO} = 4.50 - 4.20 = 0.30\,N$$

El empuje es igual al peso del volumen de agua desplazado:

$$E = \rho_{agua} \cdot g \cdot V \Rightarrow V = \frac{E}{\rho_{agua} \cdot g}$$

$$V = \frac{0.30\,N}{1000\,\frac{Kg}{m^3} \cdot 9.8\,m/s^2} = 3{,}061 \cdot 10^{-5}\,m^3 = 30{,}61\,cm^3$$

Por tanto la densidad media del objeto es:

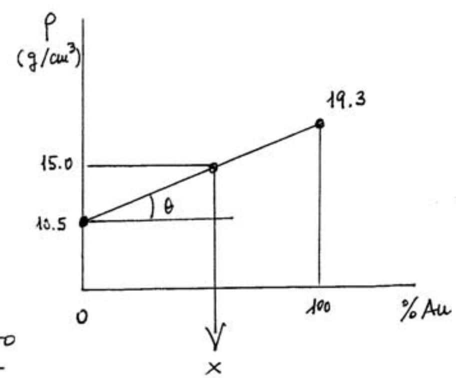
$$\rho = \frac{P}{g \cdot V} = \frac{4.50\,N}{9.8\,\frac{m}{s^2} \cdot 3.061 \cdot 10^{-5}\,m^3} = 15000\,\frac{Kg}{m^3} = 15\,g/cm^3$$

Calculamos la composición por interpolación lineal:

$$\frac{19.3 - 10.5}{100 - 0} = \frac{15.0 - 10.5}{x - 0} = \operatorname{tg}\theta$$

$$\frac{100}{19.3 - 10.5} = \frac{x}{15.0 - 10.5}$$

$$x = 100\,\frac{15.0 - 10.5}{19.3 - 10.5} = \underline{\underline{51.14\,\%\ \text{de oro}}}$$

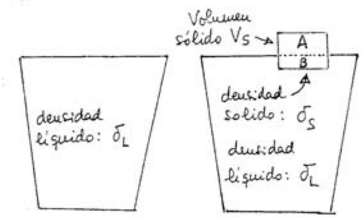


7

Un cubo lleno de agua hasta el borde se pesa en una báscula, obteniendo una pesada P_1. Después se retira de la báscula, se echa dentro un taco de madera que flota sobre la superficie y, una vez que ha escurrido el agua sobrante, se pesa nuevamente en la misma báscula, obteniendo una segunda pesada P_2. Discutir y justificar cual de las dos pesadas es mayor, o en su caso, si son iguales.

SOLUCIÓN

De acuerdo con el principio de Arquímedes, todo cuerpo sumergido en un fluido sufre un empuje hacia arriba igual al peso del volumen de líquido desalojado. En la figura (2) el volumen B está ocupado no por líquido, sino por la parte sumergida del sólido – el cual es menos denso que el líquido, por eso flota –. La variación de peso sufrida por el cubo se puede expresar como sigue:



Cubo lleno de agua: P1 (1)

Cubo con la madera flotando: P2 (2)

Perdido: $V_B \cdot \delta_L \cdot g$ ($g \equiv$ aceleración de la gravedad)

Ganado: $V_{SOLIDO} \cdot \delta_S \cdot g$

Apliquemos Arquímedes: $\left\{ \begin{array}{l} P = \delta_S \cdot V_{SOLIDO} \cdot g \\ E = \delta_L \cdot V_B \cdot g \end{array} \right\}$

$P = E$

Luego el peso perdido y el ganado son iguales, de modo que las pesadas P1 y P2 deben coincidir.