FUNDAMENTOS FÍSICOS DE LA INGENIERÍA

CÁLCULO DE MOMENTOS DE INERCIA

Equipo docente:

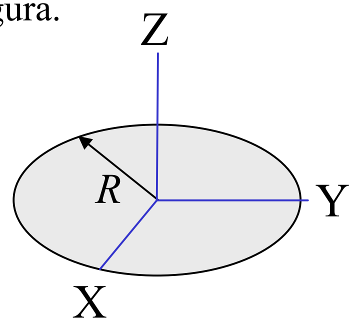
Antonio J. Barbero García
Mariano Hernández Puche
Alfonso Calera Belmonte
} ETS Agrónomos (Albacete)

Pablo Muñiz García
José A. de toro Sánchez
} E.U. I. T. Agrícola (Ciudad Real)

Departamento de Física Aplicada
E.T.S. Agrónomos albacete
UCLM

PROBLEMA 1

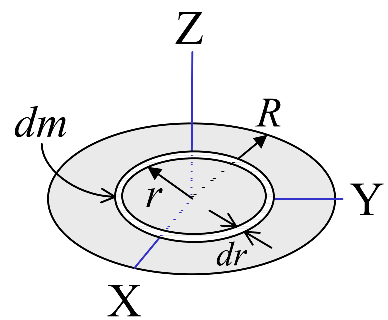
Calcular el momento de inercia de un disco homogéneo de radio R, densidad superficial ρ y espesor despreciable, respecto a los ejes X, Y, Z indicados en la figura.



1. Momento de inercia respecto al eje Z $\quad I_{zz} = \int_0^R r^2 dm$

donde r es el radio de un elemento de masa dm

$dm = \rho\, 2\pi\, r\, dr$ y donde $r^2 = x^2 + y^2$ (distancia al eje Z)

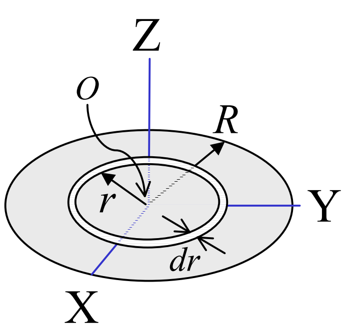


$$I_{zz} = \int_0^R r^2 \rho\, 2\pi\, r\, dr = 2\pi\rho \int_0^R r^3 dr$$

$$I_{zz} = \frac{1}{2}\pi\rho\, r^3 \Big]_0^R = \frac{1}{2}\pi\rho\, R^4 = \frac{1}{2} M R^2$$

Expresado en función de la masa $M = \rho\, \pi\, R^2$

2. Para el cálculo de los momentos de inercia respecto a los ejes X e Y consideremos primero el momento de inercia respecto al punto central del disco O.



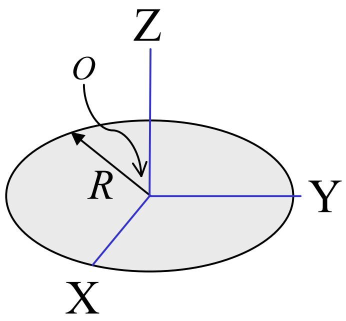
Véase que al no haber materia fuera del plano del disco, el cálculo de I_O da el mismo resultado que obtuvimos para I_{zz}:

$$I_O = \int_0^R r^2 dm = \int_0^R r^2 \rho\, 2\pi\, r\, dr = \frac{1}{2}\pi\rho\, r^3 \Big]_0^R = \frac{1}{2}\pi\rho\, R^4 = \frac{1}{2} M R^2$$

Pero aquí, el significado de r^2 es $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ (distancia al centro O)

Véase que, puesto que la figura es plana, todas las coordenadas z son iguales a cero; por eso el momento de inercia respecto a O es el mismo que respecto al eje Z.

La relación entre el momento de inercia respecto al centro O y los momentos respecto a los ejes puede verse a partir de sus definiciones:



$$I_O = \int \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dm$$

$$I_{xx} = \int \left(y^2 + z^2\right) dm$$

$$I_{yy} = \int \left(x^2 + z^2\right) dm$$

$$I_{zz} = \int \left(x^2 + y^2\right) dm$$

Sumando estas tres

$$I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} = 2 I_O$$

En el caso del disco, sabemos que $I_O = I_{zz}$

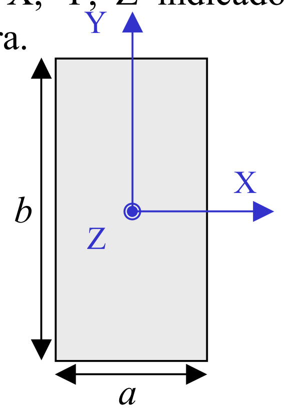
Además, como alrededor del eje Z el disco tiene simetría de revolución debe cumplirse que $I_{xx} = I_{yy}$

Por lo tanto $I_{xx} + I_{yy} = 2 I_O - I_{zz}$ $\quad 2 I_{xx} = 2 I_{yy} = I_{zz}$ $\quad I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{2} I_{zz} = \frac{1}{4} M R^2$

$$I_{xx} = \frac{1}{4} M R^2 \qquad I_{yy} = \frac{1}{4} M R^2 \qquad I_{zz} = \frac{1}{2} M R^2$$

PROBLEMA 2

Calcular el momento de inercia de un rectángulo homogéneo cuyas dimensiones son $a \times b$, su densidad superficial es ρ y su espesor despreciable, respecto a los ejes X, Y, Z indicados en la figura.



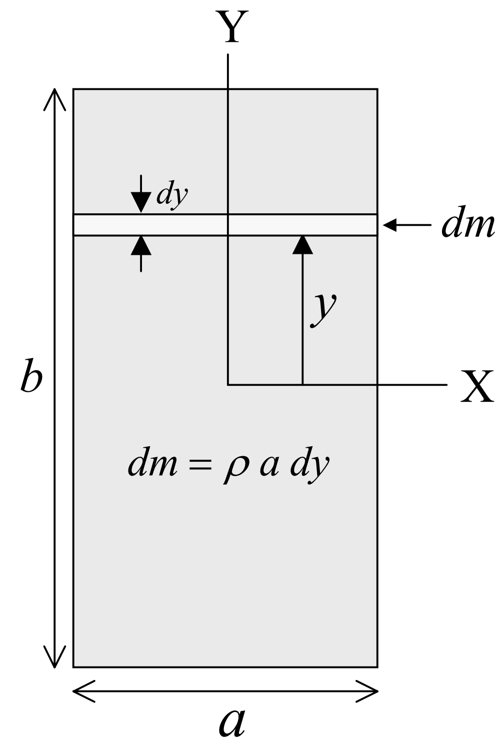
La masa de la figura es su área por su densidad superficial

$$M = \rho\, a\, b$$

<u>Momento de inercia respecto al eje X</u>

$$I_{xx} = \int_{-b/2}^{+b/2} \left(y^2 + \cancel{z^2}\right) dm = \int_{-b/2}^{+b/2} y^2\, dm$$

figura plana

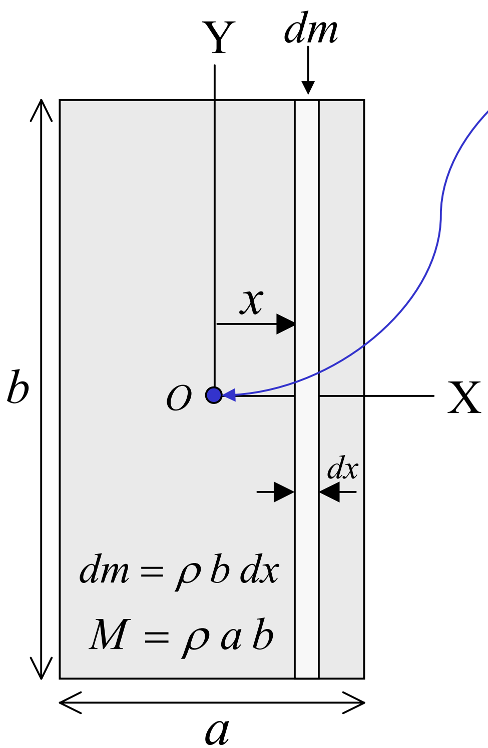


$$I_{xx} = \rho\, a \int_{-b/2}^{+b/2} y^2 dy = \frac{1}{3} \rho\, a\, y^3 \Big]_{-b/2}^{+b/2}$$

$$I_{xx} = \frac{1}{3} \rho\, a \left[\frac{b^3}{8} - \frac{-b^3}{8} \right] = \frac{1}{12} \rho\, a\, b^3 = \frac{1}{12} M\, b^2$$

En función de la masa *M*

Momento de inercia respecto al eje Y



$$I_{yy} = \int_{-a/2}^{+a/2} \left(x^2 + \cancel{z^2}\right) dm = \int_{-a/2}^{+a/2} x^2 dm = \rho\, b \int_{-a/2}^{+a/2} x^2 dx = \frac{1}{3}\rho\, b\, x^3\Big]_{-a/2}^{+a/2} = \frac{1}{3}\rho\, b\left[\frac{a^3}{8} - \frac{-a^3}{8}\right] = \frac{1}{12}\rho\, b\, a^3 = \frac{1}{12} M\, a^2$$

figura plana

Momento de inercia respecto al eje Z

Primero consideremos el momento de inercia respecto al centro *O*

$$I_O = \int \left(x^2 + y^2 + \cancel{z^2}\right) dm = \int \left(x^2 + y^2\right) dm = I_{xx} + I_{yy}$$

figura plana

Además, para cualquier sólido se verifica $I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} = 2 I_O$

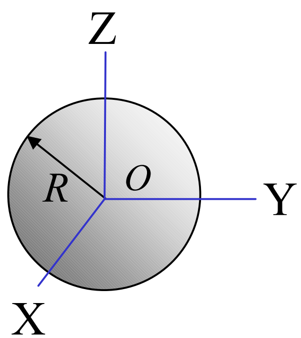
Por lo tanto, para una figura plana $I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} = 2\left(I_{yy} + I_{zz}\right)$

$$I_{zz} = I_{xx} + I_{yy}$$

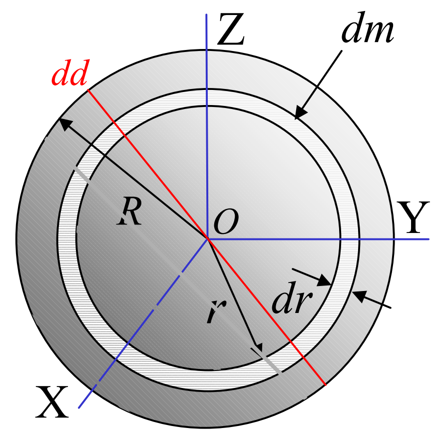
Usando los resultados anteriores $I_{zz} = \frac{1}{12} M \left(a^2 + b^2\right)$

PROBLEMA 3

Calcular el momento de inercia de una esfera homogénea de radio R y densidad ρ respecto a uno de sus diámetros.



Primero consideremos el momento de inercia respecto al centro O



Consideremos a la esfera formada por un gran número de capas concéntricas, todas centradas en O y cada una de masa dm.

Ya que todos los puntos materiales de cada una de esas capas está situado a la misma distancia r del centro, el momento de inercia respecto de O es:

Esta integral debe extenderse a todos los posibles valores de r, es decir, debe comprender todos los elementos de masa situados entre $r = 0$ y $r = R$. $\longrightarrow$ $I_O = \int r^2 dm$

La masa total de la esfera es $M = \frac{4}{3}\pi \rho R^3$ y la masa del elemento dm es $dm = 4\pi \rho r^2 dr$

$$I_O = \int r^2 dm = \int_0^R r^2 4\pi \rho r^2 dr = 4\pi \rho \int_0^R r^4 dr = \frac{4}{5}\pi \rho R^5 = \frac{3}{5}\left(\frac{4}{3}\pi \rho R^3\right) R^2$$

$$\boxed{I_O = \frac{3}{5} M R^2}$$

Para calcular el momento de inercia respecto a un diámetro I_{dd}: por la simetría esférica $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = I_{dd}$

Además, la relación entre el momento de inercia respecto al origen de coordenadas y los momentos de inercia respecto a los tres ejes perpendiculares X, Y, Z es (véase problema 1) $I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} = 2I_O$

$$3I_{dd} = 2I_O \qquad I_{dd} = \frac{2}{3} I_O \qquad \boxed{I_{dd} = \frac{2}{5} M R^2}$$