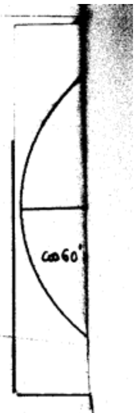
MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE



PROBLEMA RESUELTO 1

Un bloque unido a un muelle de constante elástica 2000 N/m oscila sin rozamiento en un plano horizontal con una frecuencia angular $\omega = 5\pi$ rad/s y una amplitud de 10 cm.

a) Escribir la ecuación del movimiento del bloque tomando como origen de tiempos el instante en que el resorte alcanza su máxima longitud. ¿Qué tiempo invierte el bloque en realizar una oscilación completa?

b) Escribir la ecuación del movimiento del bloque tomando como origen de tiempos el instante en que el resorte tiene una longitud igual a su longitud en reposo *más* la mitad de la amplitud del movimiento. Discutir los distintos casos posibles.

c) Escribir la ecuación del movimiento del bloque tomando como origen de tiempos el instante en que el resorte tiene una longitud igual a su longitud en reposo *menos* la mitad de la amplitud del movimiento. Discutir los distintos casos posibles.

d) Determinar la energía total del movimiento.

e) Determinar la velocidad y la aceleración en el instante en que la fase es $5\pi/4$ rad.

f) Determinar la energía cinética y la energía potencial en el instante en que la fase es $5\pi/4$ rad.

APARTADO a)

El movimiento es armónico simple (llamamos $\vec{i}$ al vector unitario según el eje x, dirigido hacia la derecha).

$$\boxed{\vec{x}(t) = \vec{i} \cdot A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)}$$ ECUACIÓN DEL MOVIMIENTO

Según el enunciado $\left.\begin{array}{l} A = 10 \text{ cm} \\ \omega = 5\pi \ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \end{array}\right\} \rightarrow \vec{x}(t) = 10\,\vec{i} \cdot \cos(5\pi t + \varphi_0)$ (cm)

Fase inicial: Cuando $t = 0 \rightarrow x(0) = A \Rightarrow A = A \cos\varphi_0 \Rightarrow \cos\varphi_0 = 1$

La solución de $\cos\varphi_0 = 1$ es $\varphi_0 = 0, 2\pi, 4\pi, 6\pi, \ldots$ (rad)

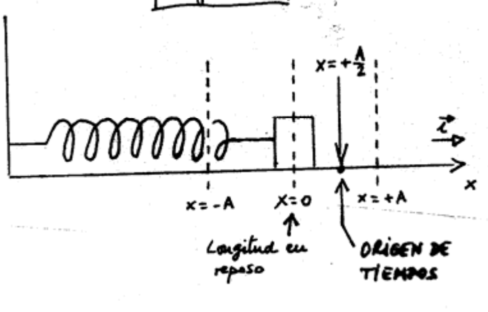
Tomaremos $\varphi_0 = 0$, porque $2\pi, 4\pi, \ldots$ etc.. indica un número entero de oscilaciones posteriores.

Por tanto la ecuación del movimiento es $\boxed{\vec{x}(t) = 10\,\vec{i} \cos 5\pi t \text{ (cm)}}$

Tiempo invertido en una oscilación:

$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{5\pi} = 0.4$ s. $\boxed{T = 0.4 \text{ s}}$

Figura 1



APARTADO b)

Fase inicial: cuando $t = 0 \rightarrow x(0) = \frac{A}{2}$

La situación se esquematiza en la figura 1. Si sustituimos en la ecuación del movimiento tenemos:

$x(0) = \frac{A}{2} = A \cdot \cos\varphi_0 \Rightarrow \cos\varphi_0 = \frac{1}{2}$

Solución de $\cos\varphi_0 = \frac{1}{2} \rightarrow$ dos soluciones (Ver figura 2) $\left\{\begin{array}{l} \varphi_0 = \frac{\pi}{3} \text{ rad} = 60° \\ \varphi_0 = \frac{5\pi}{3} \text{ rad} = 300° \end{array}\right.$

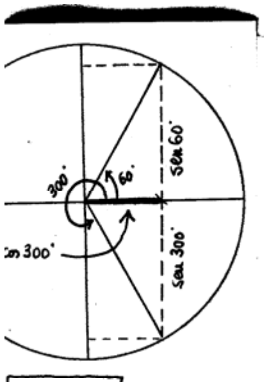


Figura 2

Estudio de las soluciones. Significado físico.

* Primera solución: $\vec{x}(t) = 10\,\vec{i}\,\cos\left(5\pi \cdot t + \frac{\pi}{3}\right)$ (cm)

La velocidad de la masa en su movimiento se obtiene derivando:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{x}(t)}{dt} = -50\pi \cdot \vec{i}\ \text{sen}\left(5\pi \cdot t + \frac{\pi}{3}\right) \quad (\text{cm/s})$$

Cuando $t = 0 \Longrightarrow \vec{v}(0) = -50\pi\,\vec{i}\cdot\text{sen}\,\frac{\pi}{3}$ $\left(\text{sen}\,\frac{\pi}{3} > 0\right)$

ESTO SIGNIFICA QUE LA VELOCIDAD INICIAL ESTA DIRIGIDA EN EL SENTIDO QUE HEMOS DESIGNADO NEGATIVO: ES DECIR, EL ANGULO DE FASE INICIAL $\varphi_0 = \frac{\pi}{3}$ rad $= 60°$ SIGNIFICA QUE LA MASA SE ESTÁ MOVIENDO EN EL INSTANTE INICIAL HACIA EL ORIGEN DE COORDENADAS.

* Segunda solución: $\vec{x}(t) = 10\,\vec{i}\,\cos\left(5\pi \cdot t + \frac{5\pi}{3}\right)$ (cm)

La velocidad de la masa en el instante $t = 0$ es $\vec{v}(0) = -50\pi\,\vec{i}\cdot\text{sen}\,\frac{5\pi}{3}$ $\left(\text{sen}\,\frac{5\pi}{3} < 0\right)$

ESTO SIGNIFICA QUE LA VELOCIDAD INICIAL ESTÁ DIRIGIDA EN EL SENTIDO QUE HEMOS DESIGNADO COMO POSITIVO (PUES $\text{sen}\,\frac{5\pi}{3} < 0$): ES DECIR, EL ÁNGULO DE FASE INICIAL $\varphi_0 = \frac{5\pi}{3}$ rad $= 300°$ INDICA QUE LA MASA SE ESTÁ MOVIENDO EN EL INSTANTE INICIAL ALEJÁNDOSE DEL ORIGEN DE COORDENADAS.

<u>Comentario</u>: debe insistirse en que NO ES SUFICIENTE para caracterizar completamente el movimiento decir únicamente la posición de la masa en $t = 0$, sino que debemos disponer de alguna información adicional (la velocidad). (Únicamente cuando el origen de tiempos se toma en $x = +A$ o $x = -A$, la información sobre la velocidad del cuerpo unido al muelle está implícita).

APARTADO c)

Fase inicial: cuando $t = 0 \longrightarrow x(0) = -\frac{A}{2}$

Haciendo consideraciones análogas a las del apartado b) y remitiéndonos a la figura 3, tenemos dos posibilidades:

$$\left.\begin{array}{l} x(0) = -\frac{A}{2} = A\cdot\cos\varphi_0 \\ \cos\varphi_0 = -\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \varphi_0 = \frac{2\pi}{3}\ \text{rad} = 120° \\ \varphi_0 = \frac{4\pi}{3}\ \text{rad} = 240° \end{array}\right.$$

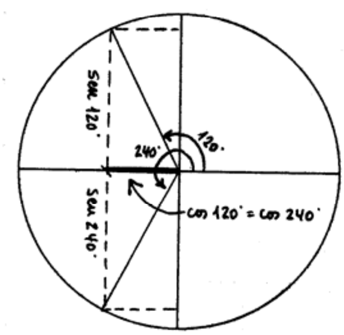


Figura 3

* Primera solución: $\vec{x}(t) = 10\,\vec{i}\,\cos\left(5\pi \cdot t + \frac{2\pi}{3}\right)$ (cm).

$\vec{v}(0) = -50\pi\,\vec{i}\cdot\text{sen}\,\frac{2\pi}{3}$ $\left(\text{sen}\,\frac{2\pi}{3} > 0\right)$

El sentido de la velocidad es el del vector $-\vec{i}$, luego la velocidad inicialmente se dirige hacia $x = -A$, <u>alejándose</u> del origen de coordenadas.

* Segunda solución: $\vec{x}(t) = 10\,\vec{i}\,\cos\left(5\pi \cdot t + \frac{4\pi}{3}\right)$ (cm)

$\vec{v}(0) = -50\,\vec{i}\cdot\text{sen}\,\frac{4\pi}{3}$ $\left(\text{sen}\,\frac{4\pi}{3} < 0\right)$

El sentido de la velocidad es el del vector $+\vec{i}$, la velocidad en $t = 0$ está dirigida <u>hacia</u> el origen de coordenadas.

SIGUE →

PROBLEMA RESUELTO 1.
(Continuación)

APARTADO d)

La energía total es igual a la energía potencial cuando la masa se encuentra en la posición $x = A$, pus en dicha posición la energía cinética es nula.

$$E = \frac{1}{2} K A^2 = \frac{1}{2} \cdot 2000 \cdot 0.1^2 = 10\ J.$$

APARTADO e)

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt} = -A\omega\,\vec{i}\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi_0) = -50\pi\,\vec{i}\,\mathrm{sen}\,\frac{5\pi}{4} = 111\vec{i}\ \mathrm{cm/s}$$

$\left(\mathrm{sen}\,\frac{5\pi}{4} = \mathrm{sen}\,225^\circ = -0.7071\right)$

Nota: según el enunciado, la fase $(\omega t + \varphi_0) = \frac{5\pi}{4}$. Por eso la solución es única, cualquiera que sea el valor de la fase inicial φ_0. Lo que ocurre es que según sea el origen de tiempos, el tiempo transcurrido hasta que la fase sea $\frac{5\pi}{4}$ rad será diferente. Esquema en figura 4.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -A\omega^2\,\vec{i}\cdot\cos(\omega t + \varphi_0) = -10\cdot(5\pi)^2\,\vec{i}\cdot\cos\frac{5\pi}{4} = \vec{i}\,1745\ \mathrm{cm/s^2}$$

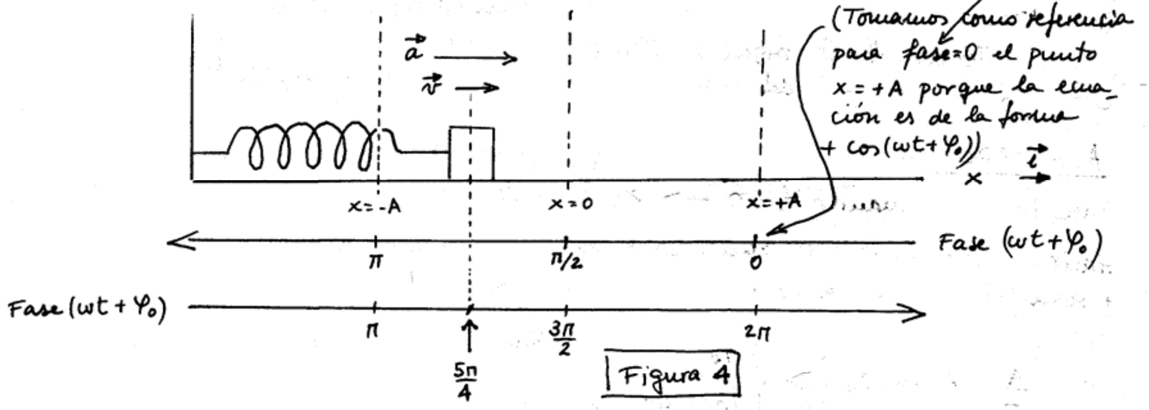


Figura 4

APARTADO f

Energía potencial: $U = \frac{1}{2} K x^2 = \frac{1}{2} K \cdot A^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0) = \frac{1}{2} K A^2 \cos^2 \frac{5\pi}{4}$

$$U = \frac{1}{2} \cdot 2000 \cdot 0.1^2 \cos^2\frac{5\pi}{4} = 10 \cdot \cos^2\frac{5\pi}{4} = 10 \cdot \frac{1}{2} = \boxed{5\ J.}$$

Energía cinética: $E_c = E - U = 10 - 5 = \boxed{5\ J}$

(O también: $E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} m \cdot A^2 \omega^2 \mathrm{sen}^2(\omega t + \varphi_0)$

Como $\omega^2 = \frac{K}{m} \Longrightarrow E_c = \frac{1}{2} K A^2 \mathrm{sen}^2(\omega t + \varphi_0) = \frac{1}{2} \cdot 2000 \cdot 0.1^2 \cdot \mathrm{sen}^2 \frac{5\pi}{4} = 5\ J$)

PROBLEMA RESUELTO 2

En el laboratorio se dispone de dos péndulos simples de igual longitud (L=2.45 m). El primero se separa de la vertical un ángulo de 5º, y el segundo se separa un ángulo de 10º. Después se deja oscilar libremente el primer péndulo, y el segundo se suelta un segundo después de haber liberado el primero.

a) ¿Cuál es el ángulo que forman los dos péndulos 3 s después de haber soltado el primero?

b) ¿Qué velocidad lleva cada péndulo en ese instante?

APARTADO a)

El periodo de estos péndulos es: $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{2.45}{9.80}} = \pi$ s.

La frecuencia angular es: $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2$ rad/s

Tomando como referencia de tiempos ($t=0$) el instante en que se suelta el primer péndulo, la ecuación de su movimiento es:

$\varphi_1(t) = A_1 \cdot \cos \omega t = 5^\circ \cos 2t$

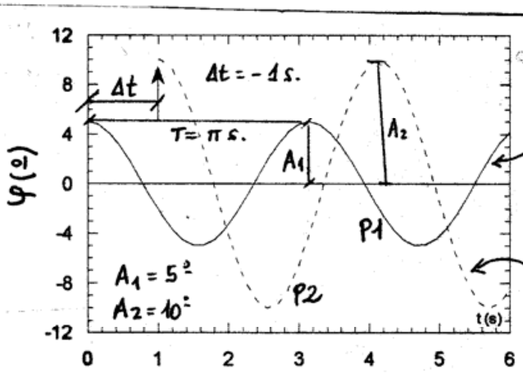
El retraso que el segundo péndulo tiene respecto al primero es $\Delta t = 1$ s; por lo tanto la diferencia de fase es:

$\varphi_0 = \frac{\Delta t}{T} \cdot 2\pi = \frac{-1}{\pi} \cdot 2\pi = -2$ rad

Por tanto, la ecuación del movimiento es:

$\varphi_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_0) =$

$= 10 \cdot \cos(2t - 2)$



$\varphi_1(t) = A_1 \cos \omega t$

$\varphi_0 = \frac{\Delta t}{T} \cdot 2\pi = -\frac{1}{\pi} \cdot 2\pi = -2$ rad

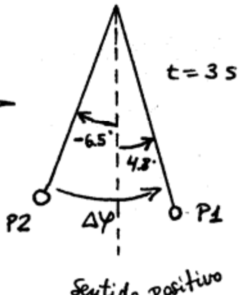
$\varphi_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_0)$

(Véase la representación gráfica).

Determinación del ángulo formado: en $t = 3$ s se cumple:

$\varphi_1(t=3) = 5^\circ \cos(2 \cdot 3) = 5^\circ \cdot 0{,}9602 = 4{,}8^\circ$

$\varphi_2(t=3) = 10^\circ \cos(2 \cdot 3 - 2) = 10^\circ \cdot (-0.6536) = -6{,}5^\circ$



Diferencia de ángulos: $\boxed{\Delta\varphi = \varphi_1(t=3) - \varphi_2(t=3) = 4.8 + 6.5 = 11{,}3^\circ}$

APARTADO b) Velocidades. Derivamos respecto al tiempo:

Sentido positivo de ángulos

$\frac{d\varphi_1}{dt} = -A_1\omega \cdot \operatorname{sen} \omega t = -\left(5 \cdot \frac{\pi}{180}\right) \cdot 2 \cdot \operatorname{sen} 2t = -0.1745 \cdot \operatorname{sen} 2t$ (rad/s)

$\frac{d\varphi_2}{dt} = -A_2\omega \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0) = -\left(10 \cdot \frac{\pi}{180}\right) \cdot 2 \operatorname{sen}(2t-2) = -0.3491 \operatorname{sen}(2t-2)$ (rad/s)

(Obsérvese que $A \cdot \omega$ debe expresarse en rad/s; por eso escribimos A_1, A_2 en radianes).

Dado que la longitud de ambos péndulos es L, su velocidad lineal es:

$v_1 = L \cdot \frac{d\varphi_1}{dt} = -0.4275 \operatorname{sen} 2t$ (m/s)

$v_2 = L \cdot \frac{d\varphi_2}{dt} = -0.8552 \operatorname{sen}(2t-2)$ (m/s)

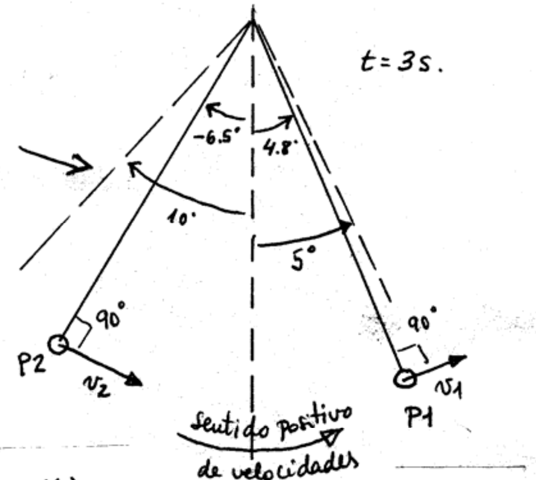
En el instante $t = 3\,s$ se verifica:

$$v_1(t=3) = -0.4275\ \text{sen}(2\cdot 3) = -0.4275\cdot(-0.2794) = +0.12\ m/s$$

$$v_2(t=3) = -0.8552\cdot \text{sen}(2\cdot 3 - 2) = -0.8552\cdot(-0.7568) = +0.65\ m/s$$

<u>Interpretación</u>

El signo positivo de v_1 y v_2 nos indica que las velocidades están orientadas en sentido antihorario (↺) en $t = 3\,s$ (dibujo).



El primer péndulo está próximo a completar una oscilación completa, mientras que el segundo ya ha cubierto la mitad de su primera oscilación y está de retorno, aunque todavía no ha pasado por la vertical.

En la representación gráfica de φ frente a t puede verse que tanto la pendiente de P1 como de P2 es mayor que 0, lo cual es una forma alternativa de comprobar que efectivamente las velocidades se dirigen en el sentido descrito en el párrafo anterior.