AJB

PROBLEMAS DINÁMICA DE FLUIDOS

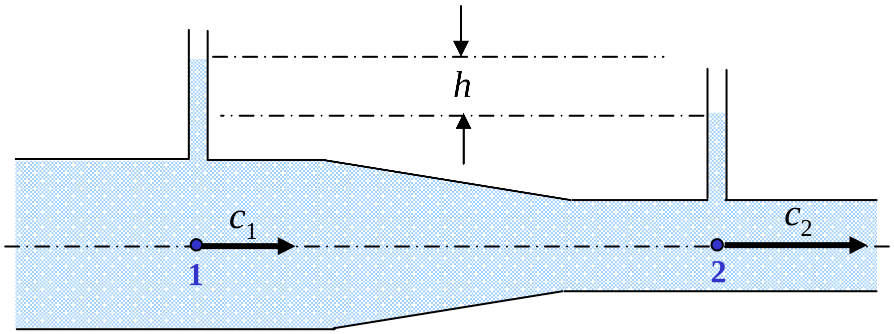
Lecciones de Física

PROBLEMA 1

En una tubería horizontal hay dos secciones diferentes, cuyos radios son 20 cm y 8 cm respectivamente. En cada sección hay un tubo vertical abierto a la atmósfera, y entre ellos se aprecia una diferencia en el nivel que alcanza el líquido que circula por la tubería.

a) ¿Cómo varía la diferencia de nivel entre los dos tubos abiertos si el flujo volumétrico se duplica? ¿En cuál de ellos es mayor la altura alcanzada por el líquido?

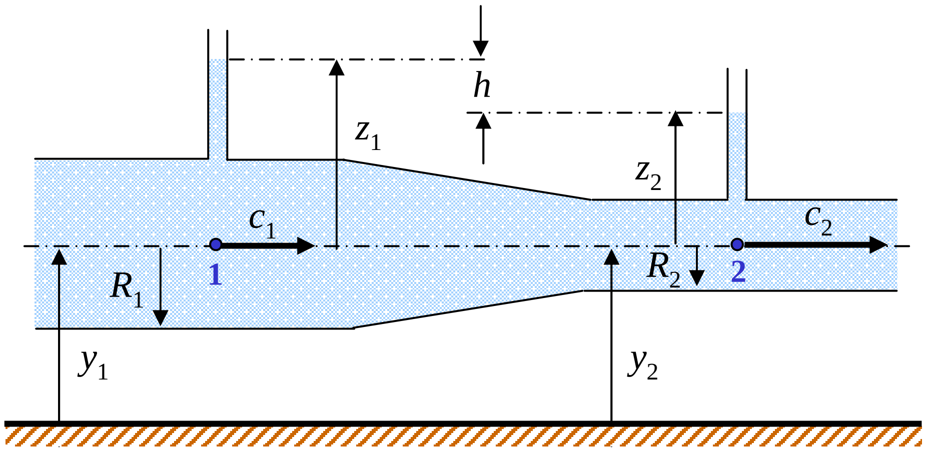
b) Si la densidad del líquido circulante es 1.060 g/cm^3 y su velocidad en la parte ancha es 2,5 m/s, determinar la diferencia de nivel en los tubos abiertos y la diferencia de presiones entre ambas secciones de la tubería.



PROBLEMA 1

Ecuación de Bernoulli

Apartado a)



$$P_1 + \frac{1}{2}\rho c_1^2 + \cancel{\rho g y_1} = P_2 + \frac{1}{2}\rho c_2^2 + \cancel{\rho g y_2}$$

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho\left(c_2^2 - c_1^2\right)$$

$$P_1 = P_{atm} + \rho g z_1 \qquad P_2 = P_{atm} + \rho g z_2$$

$$P_1 - P_2 = \rho g\left(z_1 - z_2\right) = \rho g h$$

Por continuidad $c_1 < c_2$ ➡ Esto implica $P_1 > P_2$

$$h = \frac{P_1 - P_2}{\rho g}$$

Como $P_1 > P_2$, $z_1 - z_2 = h > 0$

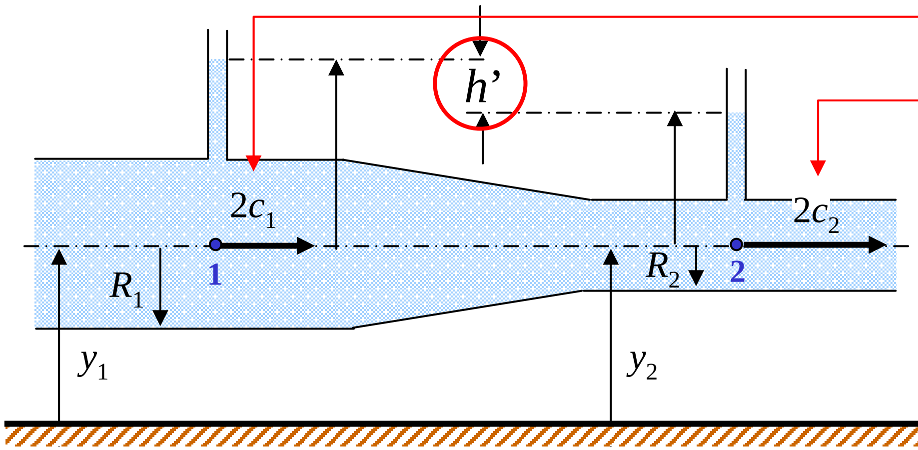
El fluido asciende más sobre la parte ancha de la conducción

La altura h es proporcional a la diferencia de presiones P_1 - P_2

PROBLEMA 1

Si el flujo volumético $S \cdot c$ se duplica...

... la ecuación de continuidad predice que las velocidades se duplican también



Por lo tanto la diferencia de presiones aumenta:

$$\Delta P = \frac{1}{2}\rho\left[(2c_2)^2 - (2c_1)^2\right] =$$

$$= 2^2\left[\frac{1}{2}\rho\left(c_2^2 - c_1^2\right)\right] = 4(P_1 - P_2)$$

Es decir, si a una diferencia de presiones $P_1 - P_2$

correspondía una diferencia de nivel $h = \dfrac{P_1 - P_2}{\rho g}$

... a la diferencia de presiones $4(P_1 - P_2)$ le corresponde $h' = 4h$

En general, la diferencia de nivel entre los tubos abiertos aumenta proporcionalmente al cuadrado del flujo volumétrico

PROBLEMA 1

Apartado b)

Cálculo de la velocidad en la parte estrecha (continuidad):

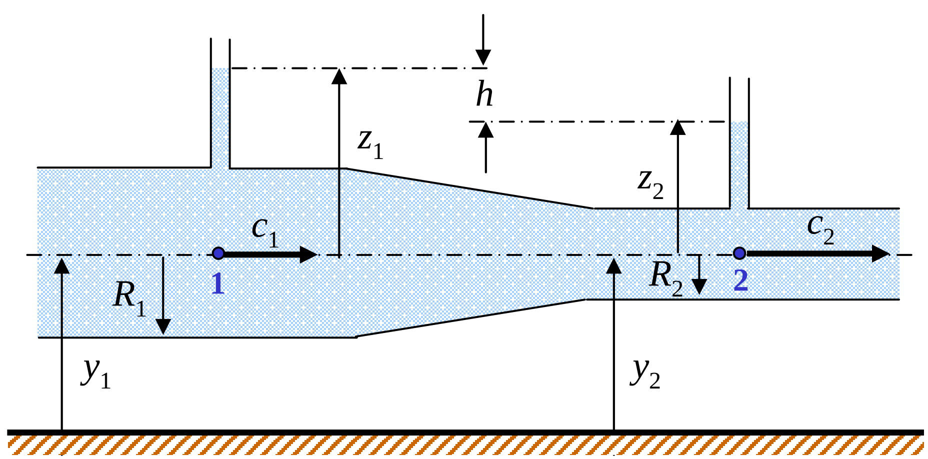
$$R_1 = 0{,}20\ \text{m}$$

$$R_2 = 0{,}08\ \text{m}$$

$$c_2 = \frac{R_1^2}{R_2^2} c_1$$

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho\left(c_2^2 - c_1^2\right) = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{R_1^2}{R_2^2}c_1^2 - c_1^2\right) = \frac{1}{2}1060\cdot 2.5^2\left(\frac{0.20^2}{0.08^2} - 1\right) = 1.74\cdot 10^4\ \text{Pa}$$

$$h = \frac{P_1 - P_2}{\rho g} = \frac{1.74\cdot 10^4}{1060\cdot 9.8} = 1.67\ \text{m}$$



PROBLEMA 2

Un depósito cilíndrico de área A = 1 m^2 contiene agua hasta una altura z_0 = 1.5 m. Cuando se abre un grifo situado a 25 cm del fondo, se observa que el nivel de agua desciende muy lentamente. El grifo abierto puede considerarse un agujero de sección S = 10 cm^2.

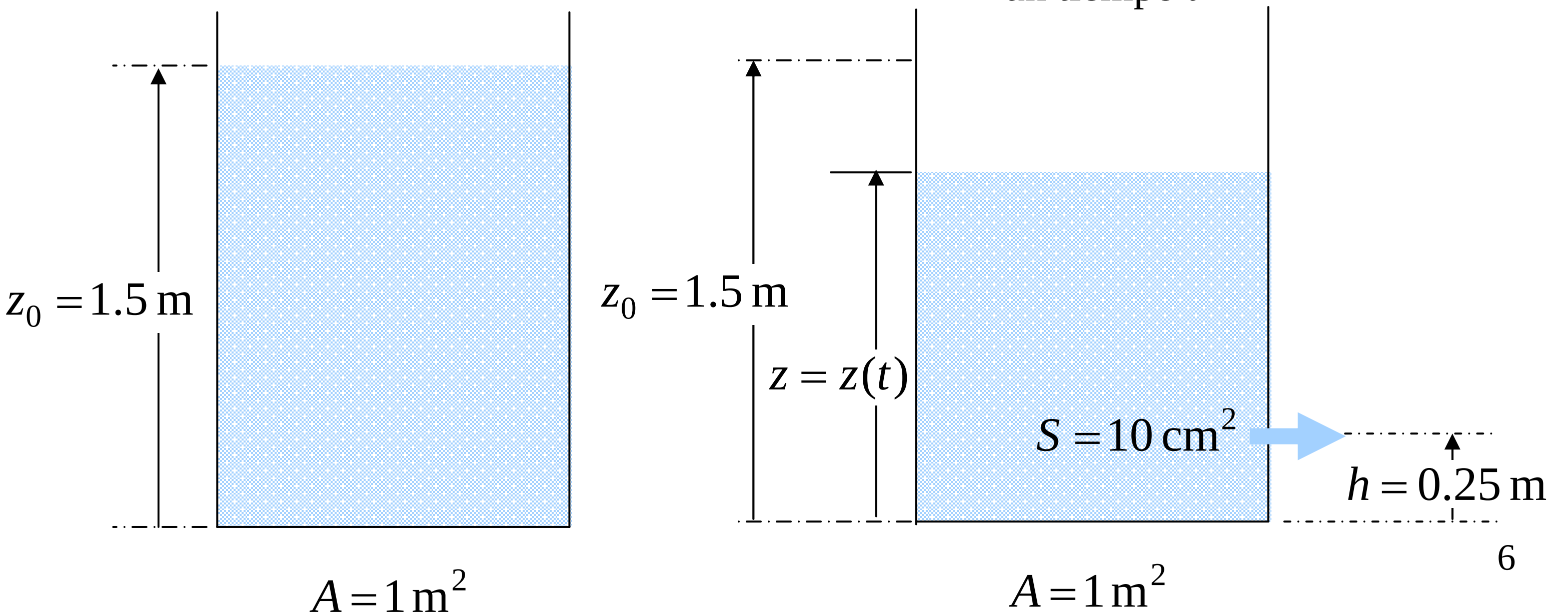
Demuéstrese que la ecuación que relaciona el tiempo transcurrido con el nivel de agua desde el momento en que se abrió el grifo es:

$$t = \sqrt{\frac{2z_0}{g}} \cdot \frac{A}{S}\left[1 - \sqrt{z/z_0}\right]$$

¿Cuánto tiempo tardará el depósito en vaciarse?

Situación inicial

Situación cuando ha transcurrido un tiempo *t*

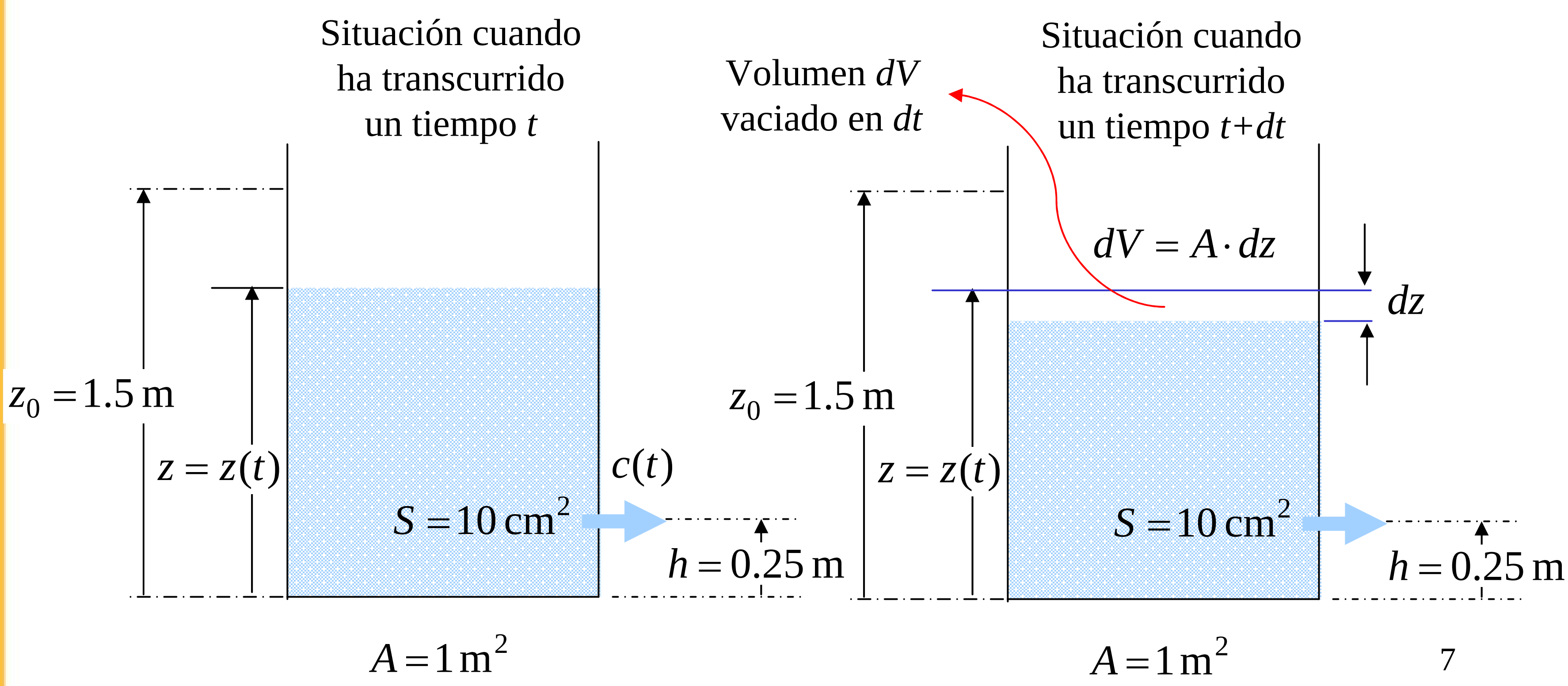


PROBLEMA 2

Admitiremos que cuando se abre el grifo el nivel de la superficie desciende con suficiente lentitud como para suponer que la velocidad de salida de agua por el mismo cumple la ecuación de Torricelli:

$$c(t) = \sqrt{2g \cdot z(t)}$$

Cuando transcurre un intervalo de tiempo *dt*, el nivel desciende *dz*.



PROBLEMA 2

Consideremos el volumen de control indicado por la línea discontinua roja

Disminución de masa dentro del volumen de control: $$\dot{m} = \frac{dm}{dt} = -\rho\frac{dV}{dt} = -\rho\cdot A\frac{dz}{dt}$$

Flujo de masa que atraviesa la frontera del volumen de control (a través del grifo):

$$\dot{m} = \rho\cdot S\cdot c$$

Aplicando la conservación de la materia:

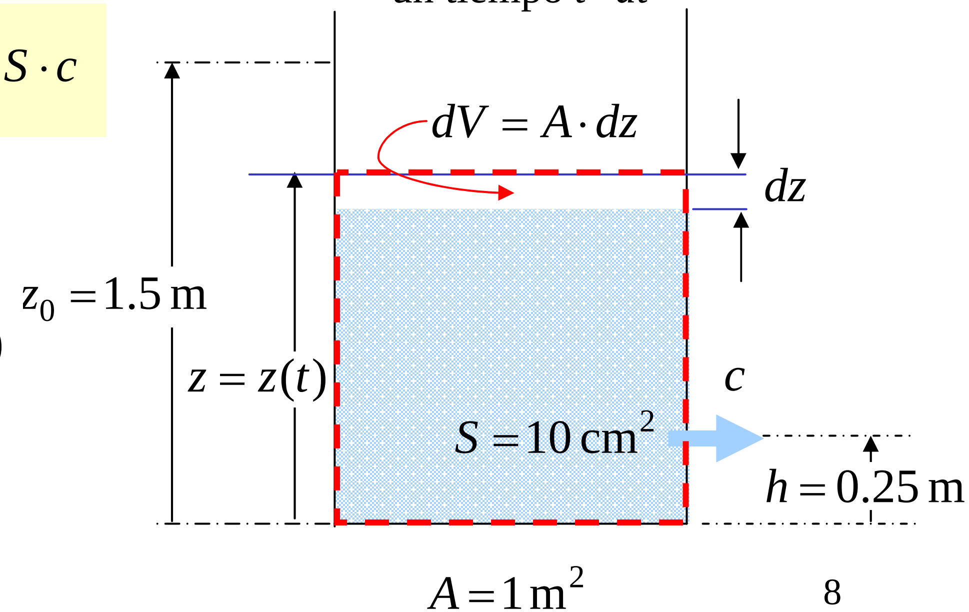
$$\frac{dm}{dt} = \rho\cdot S\cdot c \quad \Rightarrow \quad -\rho\cdot A\frac{dz}{dt} = \rho\cdot S\cdot c$$

Recordemos ahora que $c = \sqrt{2g\cdot z}$

(donde c y z son funciones del tiempo)

$$\frac{-A}{\sqrt{2g}}\frac{dz}{z^{1/2}} = S\cdot dt$$

Situación cuando ha transcurrido un tiempo $t+dt$



PROBLEMA 2

$$\frac{-A}{\sqrt{2g}}\frac{dz}{z^{1/2}} = S \cdot dt$$

Integramos:

$$\frac{-A}{\sqrt{2g}}\int_{z_0}^{z}\frac{dz}{z^{1/2}} = S\int_0^t dt$$

$$\frac{-A}{\sqrt{2g}}2\left[z^{1/2}\right]_{z_0}^{z} = S\left[t\right]_0^t$$

$$\frac{-A}{\sqrt{2g}}2\left[\sqrt{z}-\sqrt{z_0}\right] = S \cdot t$$

$$t = \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \frac{A}{S}\left[\sqrt{z_0}-\sqrt{z}\right]$$

$$t = \sqrt{\frac{2z_0}{g}} \cdot \frac{A}{S}\left[1-\sqrt{z/z_0}\right]$$

Tiempo de vaciado: esto significa calcular el tiempo necesario para que el nivel del líquido descienda hasta la altura del grifo, es decir:

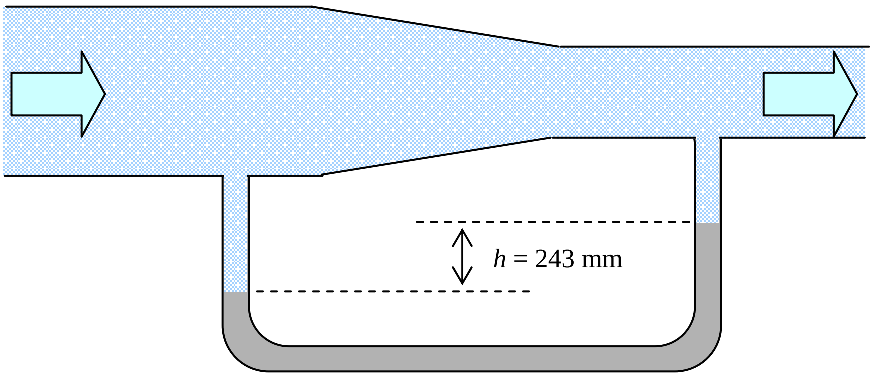
$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot 1.5}{9.8}} \cdot \frac{1}{10^{-3}}\left[1-\sqrt{0.25/1.5}\right] = 327\ \mathrm{s}$$

Sugerencia: Véase además la siguiente dirección web

http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/fluidos/dinamica/vaciado/vaciado.htm

PROBLEMA 3

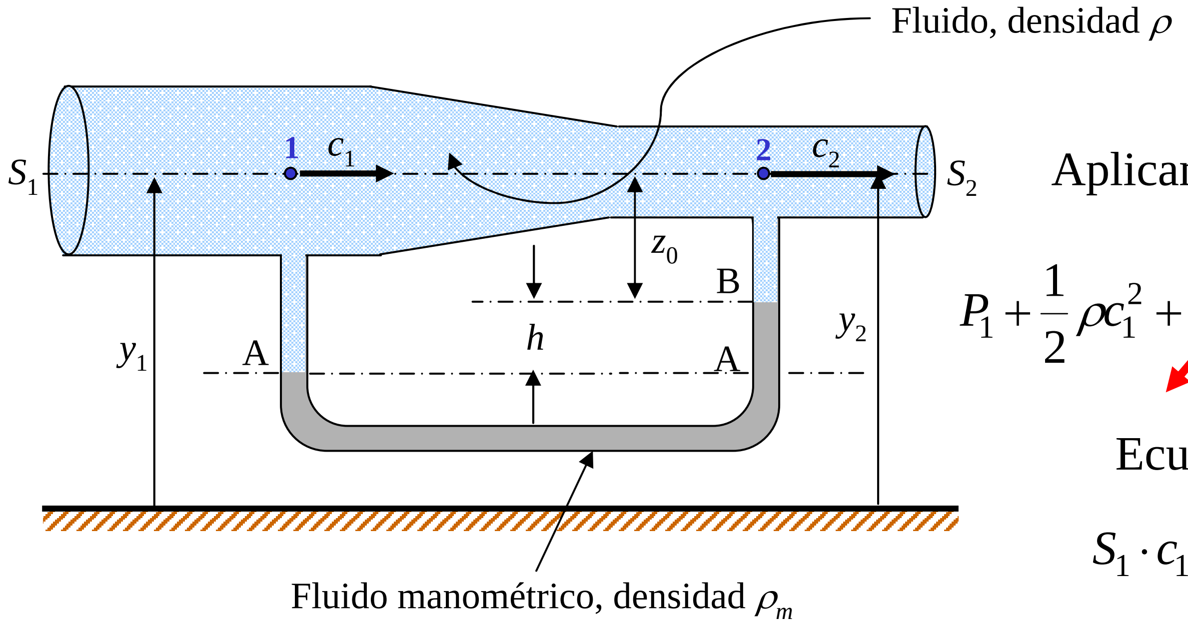
Una tubería horizontal de 20 cm^2 de sección recta termina en una boquilla de sección 5 cm^2, colineal con el eje de la tubería, por la cual se descarga agua a un recipiente abierto. Entre la tubería y la boquilla está instalado un tubo de Venturi para medidas de caudal (véase figura). El líquido manométrico del venturímetro tiene una densidad ρ_m = 13600 kg/m^3 (13,6 veces superior a la del agua circulante). La diferencia de altura entre las dos ramas del venturímetro es h = 243 mm, y la presión atmosférica en el momento de la medida es 1 bar. Suponga que el agua circula en régimen ideal.



Calcule las velocidades en la tubería y en la boquilla, determine el caudal y el flujo másico de agua y la presión en la tubería.

PROBLEMA 3

Aplicaremos la Ec. de Bernoulli junto con la ec. de continuidad y la condición de diferencia de presiones que obtendremos del venturímetro, para determinar la velocidad del agua en las distintas secciones y de ahí el flujo másico y volumétrico.



Aplicamos Bernoulli entre 1 y 2

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho c_1^2 + \cancel{\rho g y_1} = P_2 + \frac{1}{2}\rho c_2^2 + \cancel{\rho g y_2}$$

Ecuación de continuidad

$$S_1 \cdot c_1 = S_2 \cdot c_2 \qquad \boxed{c_2 = \frac{S_1}{S_2} \cdot c_1}$$

$$P_1 - P_2 = \frac{\rho}{2}\left(c_2^2 - c_1^2\right)$$

$$P_1 - P_2 = \frac{\rho c_1^2}{2}\left[\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 - 1\right]$$

$$P_A = P_1 + \rho g\left(h + z_0\right) \qquad P_B = P_2 + \rho g z_0$$

$$P_A = P_B + \rho_m g h \qquad P_A - P_B = \rho_m g h$$

$$P_1 - P_2 = P_A - P_B - \rho g h = \left(\rho_m - \rho\right) g h$$

$$\left(\rho_m - \rho\right) g h = \frac{\rho c_1^2}{2}\left[\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 - 1\right]$$

$$\boxed{c_1 = \sqrt{\frac{2\left(\rho_m - \rho\right) g h}{\rho\left[\left(S_1/S_2\right)^2 - 1\right]}}}$$

PROBLEMA 3

$$c_1 = \sqrt{\frac{2(\rho_m - \rho)gh}{\rho\left[(S_1/S_2)^2 - 1\right]}} = \sqrt{\frac{2(13600 - 1000)9.8 \cdot 0.243}{1000\left[(20/5)^2 - 1\right]}} = 2.0 \text{ m/s}$$

$$c_2 = \frac{S_1}{S_2} \cdot c_1 = \frac{20}{5} 2.0 = 8.0 \text{ m/s}$$

$$\dot{V} = S_1 \cdot c_1 = 20 \cdot 10^{-4} \cdot 2.0 = 4.0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3\text{/s} = 4.0 \text{ litros/s}$$

$$\dot{m} = \rho \dot{V} = 1 \frac{\text{kg}}{\text{litro}} 4.0 \frac{\text{litros}}{\text{s}} = 4.0 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

$$P_1 - P_2 = (\rho_m - \rho)gh = \frac{\rho c_1^2}{2}\left[\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 - 1\right] = 30006 \text{ Pa}$$

Presión exterior P_2 = 1 bar = 10^5 Pa

Presión en tubería P_1 = 1 bar + 0.30006 bar = 1.3 bar