



PRÁCTICA 5: RODADURA.

1. INTRODUCCIÓN

Decimos que un cuerpo rígido rueda sin deslizar cuando el punto de contacto del mismo sobre la superficie de apoyo permanece instantáneamente en reposo. En este caso, la velocidad de su centro de masas depende de la velocidad angular ω del sólido la según la relación siguiente, donde R es el radio del cuerpo:

$$v_{cm} = \omega R \quad (1)$$

El sentido físico de la ecuación (1), conocida como condición de rodadura sin deslizamiento, es el siguiente: cuando el cuerpo rígido rueda sin deslizar, su centro de masas (c.m.) recorre en un intervalo de tiempo dado una distancia igual al arco que recorre un punto cualquiera situado en su periferia. El punto de contacto entre el sólido y la superficie sobre la que rueda se encuentra así instantáneamente en reposo: decimos que rueda sin deslizar precisamente porque la velocidad relativa del punto de contacto y la superficie es nula. En la figura 1 se ha esquematizado la situación para un cuerpo regular de sección circular y radio R (una esfera o un cilindro): en 1(a) se presenta la situación en un instante arbitrario, cuando la línea que une el c.m. con un punto P forma un ángulo θ con la vertical; en 1(b) tenemos la evolución del movimiento: el c.m. se desplaza hacia la derecha, y como el punto de contacto con el suelo permanece instantáneamente en reposo, tanto el c.m. como P se desplazan la misma distancia d . Entonces se cumple $d = \theta \cdot R$, y derivando esta relación respecto al tiempo se obtiene la ecuación (1). La figura 1(b) presenta en trazo discontinuo la situación inicial; en trazo continuo, la situación final, una vez el punto P ha tomado contacto con el suelo.

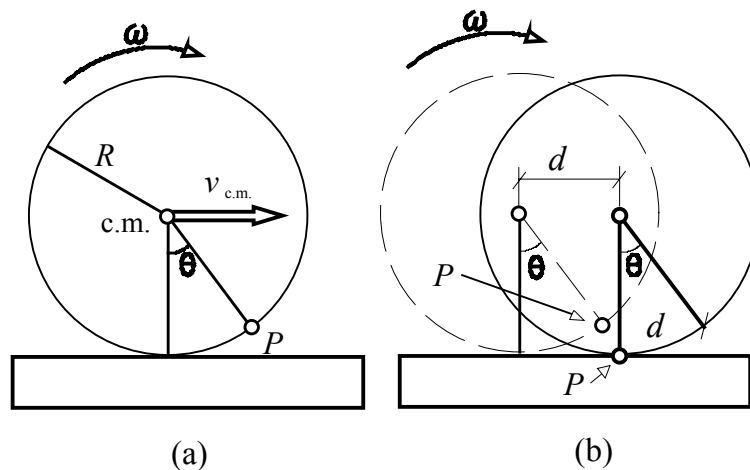


Figura 1. Rodadura sin deslizamiento de un cuerpo rígido regular girando con velocidad angular ω . Ver explicación en el texto.

2. RODADURA SOBRE UN PLANO INCLINADO

Un aspecto del movimiento de rodadura que reviste la mayor importancia se refiere al rozamiento entre el cuerpo rodante y la superficie sobre la que se apoya. Consideremos un ejemplo habitual de rodadura, la caída de un cuerpo regular como una esfera o un cilindro a lo largo de un plano inclinado. El peso del cuerpo tiene una componente paralela al plano inclinado, la cual puede considerarse aplicada en su c.m., mientras que la fuerza de rozamiento se aplica en el punto de contacto. En la figura 2 se esquematiza el diagrama de sólido libre correspondiente: la componente del peso perpendicular a la superficie inclinada ($Mg \cos \theta$) es compensada por la reacción normal N del plano; la componente paralela ($Mg \sin \theta$) y la fuerza de rozamiento F_R originan un par de fuerzas cuyo resultado es la rodadura.

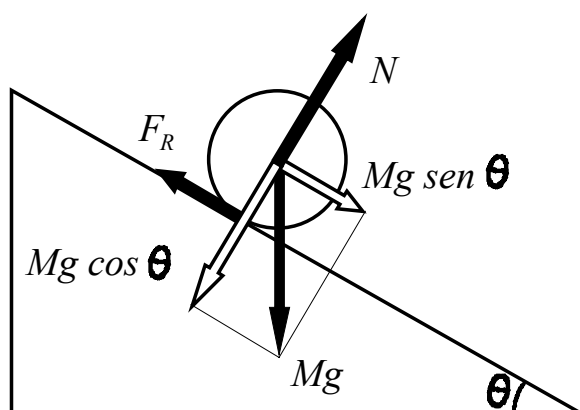


Figura 2. Esfera o cilindro rodando sobre un plano inclinado un ángulo θ (diagrama de sólido libre).

Nótese que al encontrarse el punto de contacto entre el cuerpo rígido y el plano inclinado instantáneamente en reposo sobre la superficie, la fuerza de rozamiento es estática -no dinámica- y no disipa energía. La fuerza de rozamiento estática puede alcanzar un valor máximo dado por el producto del coeficiente de rozamiento μ_e y la normal N : $F_R \leq \mu_e \cdot N$. Como la fuerza de rozamiento y la componente del peso paralela al plano ($Mg \cdot \text{sen } \theta$) originan el par que hace girar al cuerpo, el movimiento será de rodadura sin deslizamiento mientras que dicha componente $Mg \cdot \text{sen } \theta$ no supere a la fuerza de rozamiento estática máxima; pero si $\mu_e \cdot N \leq Mg \cdot \text{sen } \theta$, existirá una componente neta de aceleración dirigida hacia abajo del plano inclinado que hará deslizar el cuerpo además del movimiento de rodadura, con lo cual su aceleración de caída será mayor que la correspondiente a la rodadura sin deslizamiento. Puede demostrarse que el cuerpo empieza a deslizar cuando el ángulo del plano inclinado es $\theta = \text{arc tg } \mu_e$. También puede demostrarse empleando argumentos cinemáticos o a partir de la conservación de la energía que la aceleración con que se mueve sobre el plano inclinado un cilindro o una esfera rodando sin deslizar es:

$$a = \frac{g \cdot \text{sen } \theta}{\left[1 + \frac{I}{mr^2}\right]} \quad (2)$$

donde g es la aceleración de la gravedad, I es el momento de inercia del sólido respecto de un eje paralelo a la superficie inclinada que pasa por el c.m., m es su masa y r su radio.

Resulta interesante comparar el valor teórico de la aceleración dada por la ecuación (2) con medidas reales de aceleración de caída de cilindros y esferas en un plano inclinado. Con estas medidas puede observarse cómo a partir de cierto valor del ángulo del plano inclinado la aceleración es mayor que la predicha por la ecuación (2), indicando así el comienzo del deslizamiento superpuesto a la rodadura.

3. MONTAJE EXPERIMENTAL

Se emplea un plano inclinado de superficie lisa construido en madera, DM o aglomerado, uniendo mediante bisagras dos tablas de una longitud apropiada (1 m), encontrándose la inferior (base del montaje) unida lateralmente a dos soportes verticales en los que se practican unos agujeros para insertar un travesaño que sujete la tabla superior. Según la colocación del travesaño se consigue variar el ángulo del plano inclinado (ver esquema en figura 3). Sobre la superficie inclinada se marca una longitud L , que será la distancia a recorrer por los sólidos que se dejen caer rodando. El seno del ángulo del plano inclinado está dado por:

$$\text{sen } \theta = \frac{h-b}{c} \quad (3)$$

La aceleración de caída se obtendrá midiendo los tiempos t que los diversos objetos rodantes invierten en recorrer la distancia L partiendo del reposo; se trata de un movimiento uniformemente acelerado cuya aceleración es:

$$a_{\text{exp}} = \frac{2L}{t^2} \quad (4)$$

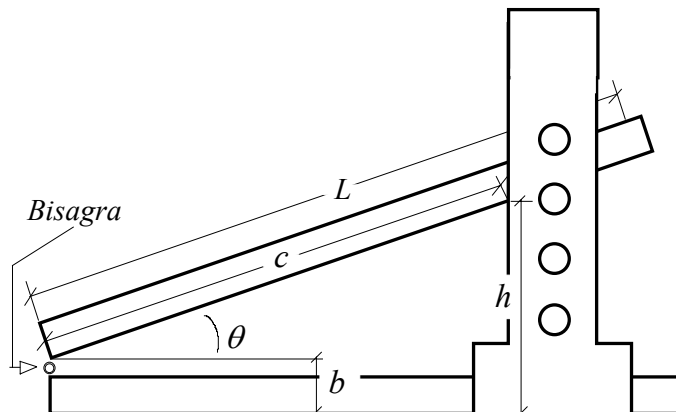


Figura 3. Detalle lateral del plano inclinado y medida del ángulo. La distancia b se mide desde la base hasta la esquina inferior del plano (a medida que el plano se eleva, puede variar unos pocos milímetros al ir girando la bisagra). La distancia h se mide desde la base hasta la intersección con el soporte vertical. La hipotenusa c se mide desde la bisagra hasta el punto de intersección con el soporte vertical.

Las medidas de las longitudes que aparecen en las ecuaciones (3) y (4) se toman empleando una cinta métrica; los tiempos de caída, empleando un cronómetro digital que aprecie 1/100 s. Antes de dejar caer rodando cualquier sólido hay que asegurarse de que el mismo se encuentra en reposo encima de la marca que nos indica la distancia L y *que en el momento de soltarlo no se le imprime ningún giro ni velocidad inicial*. Esto último se consigue sin dificultad si el cuerpo se mantiene en su posición usando un cartón que se retira repentinamente hacia el frente (es decir, plano abajo) en el momento de poner en marcha el cronómetro. Para cada ángulo y cada sólido empleado se ha de repetir la medida del tiempo invertido en recorrer la distancia L en 4 ensayos distintos y se tomará la media aritmética (t) con su error estándar correspondiente (Δt) como error de la medida. Se emplearán como sólidos de prueba los siguientes: una esfera y un cilindro hueco, y para cada uno de ellos se tomarán los valores de tiempos de caída para una distancia fija empleando distintos ángulos (se aconseja tomar valores de h -ver figura 3-

comprendidos entre 60 y 250 mm). Con estas medidas se construirá para cada sólido una tabla similar a la que se presenta a continuación:

Tabla 1. Medidas experimentales del tiempo de caída de una bola homogénea según ángulos del plano y aceleraciones calculadas según las ecuaciones indicadas en el encabezamiento de la tabla. Los datos corresponden a una longitud medida sobre el plano de $L = 950$ mm. Los espacios en blanco corresponden a los cálculos a realizar.

Ensayo	Medidas (mm)			Ecs. (3) y (6)		Tiempos de caída (s)				Media/error (s)		Ecs. (4) y (5)	
	h	b	c	sen θ	Δ sen θ	t_1	t_2	t_3	t_4	t_{medio}	Δt	a (m/s ²)	Δa
nº 1	71	24	383			1.53	1.50	1.50	1.44				
nº 2	111	24	390			1.09	1.09	1.09	1.12				
.....
nº 6	187	25	414			0.85	0.81	0.78	0.75				
.....
nº 9	262	25	448			0.69	0.63	0.66	0.66				

Las aceleraciones de caída se obtienen de la ecuación (4) y su incertidumbre aplicando la ley de propagación del error de Gauss:

$$\Delta a_{\text{exp}} = \sqrt{\left(2 \frac{\Delta L}{t^2}\right)^2 + \left(4 \frac{L}{t^3} \Delta t\right)^2} \quad (5)$$

Para la longitud recorrida sobre el plano se aconseja tomar $L = 950$ mm, con $\Delta L = 10$ mm (ya que la colocación del sólido sobre la marca del plano se realiza por inspección visual, y las dimensiones características de los sólidos utilizados son de unos pocos centímetros).

La incertidumbre en el seno del ángulo, según la ley de propagación del error de Gauss aplicada a la ecuación (3), está dada por:

$$\Delta(\text{sen } \theta) = \sqrt{\left(\frac{\Delta h}{c}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{c}\right)^2 + \left(\frac{(b-h)}{c^2} \Delta c\right)^2} \quad (6)$$

4. TRATAMIENTO DE DATOS

a) Esfera homogénea. Para una esfera homogénea que rueda sin deslizar, la aceleración teórica predicha por la ecuación (2) se convierte en:

$$a = \frac{5}{7} g \cdot \text{sen } \theta \quad (7)$$

Realizar, a partir de las medidas de tiempos tabuladas en el experimento, los cálculos de ángulos, tiempos medios de caída y aceleraciones de caída con sus aceleraciones correspondientes. Representar gráficamente la aceleración teórica -ecuación (7)- y las aceleraciones experimentales frente al seno del ángulo del plano inclinado. ¿Existe acuerdo entre ambas?

[En la figura 4 aparece un ejemplo de representación gráfica de la aceleración teórica y de unas medidas experimentales tomadas en el laboratorio (ver pie de figura). Obsérvese que para $\text{sen } \theta < 0.25$ existe un estrecho ajuste entre ambas: los puntos experimentales se encuentran sobre la línea y las barras de error en la aceleración calculadas según la ecuación (5) reflejan incertidumbres muy pequeñas, como consecuencia de la considerable precisión en la medida de los tiempos de caída (con medidas de tiempo típicas de 1.00 s, los errores estándar típicos son de 0.02 s). No se han representado las barras de error de las abcisas (ecuación (6)) porque los valores obtenidos para $\Delta(\text{sen } \theta)$ no llegan al 0.5 % de $\text{sen } \theta$, lo que las hace inapreciables a la escala de la figura. Para $\text{sen } \theta > 0.25$ las aceleraciones experimentales son mayores que la aceleración teórica correspondiente; esto debe atribuirse al deslizamiento que empieza a superponerse a la rodadura cuando el ángulo del plano toma valores grandes].

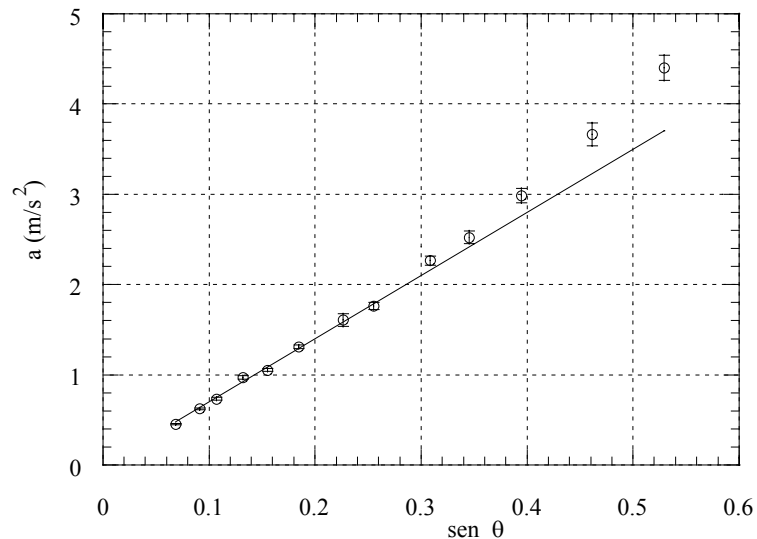


Figura 4. Aceleración de caída de una esfera homogénea en función del seno del ángulo del plano inclinado. (○) Puntos experimentales (superpuestas aparecen las barras de error que representan la incertidumbre en la medida de la aceleración); (—) rodadura sin deslizamiento (ecuación (7)).

b) Cilindro hueco. Se emplea como tal un segmento de tubo metálico, cuyo cociente entre el radio del hueco (radio interior R_i) y el radio del cilindro (radio exterior R_e) es $f = R_i/R_e = 0.95$. Para este sólido, la ecuación (2) se convierte en:

$$a = \frac{g \cdot \text{sen } \theta}{\left[1 + \frac{1+f^2}{2}\right]} \quad (8)$$

Realizar el mismo tratamiento de datos que se ha indicado para la esfera, representando la aceleración teórica -ecuación (8)- y las medidas experimentales de aceleración frente al seno del ángulo.

[La aceleración teórica y las medidas experimentales de un ejemplo práctico aparecen en la figura 5. Igual que en el caso anterior, existe un estrecho ajuste entre ambas hasta $\text{sen } \theta \approx 0.25$. Para ángulos mayores la aceleración medida supera a la teórica, indicando la aparición de deslizamiento añadido a la rodadura].

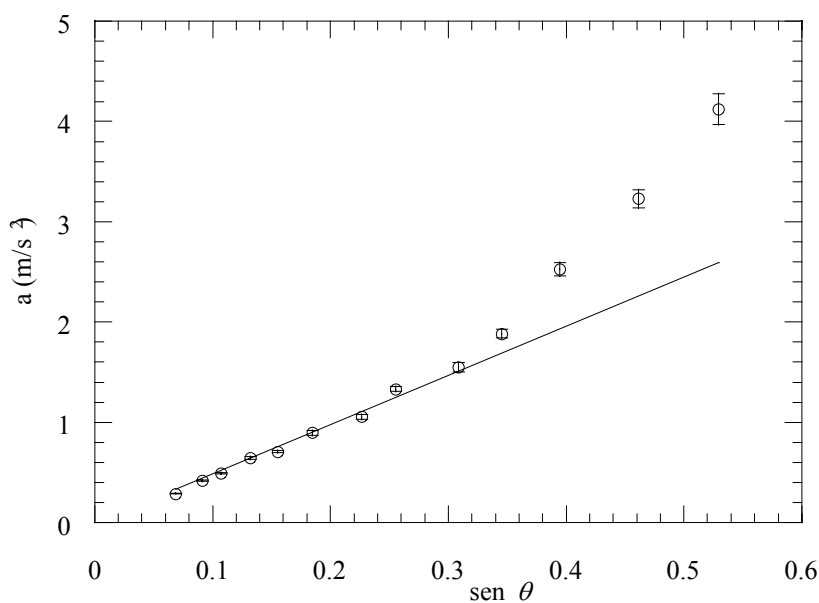


Figura 5. Aceleración de caída de un cilindro hueco en función del seno del ángulo del plano inclinado. (○) Puntos experimentales (superpuestas aparecen las barras de error que representan la incertidumbre en la medida de la aceleración); (—) rodadura sin deslizamiento (ecuación (8)).

5. PREGUNTAS

- 1 Demostrar la ecuación (2).
- 2 Demostrar la ecuación (5).
- 3 Demostrar la ecuación (6).
- 4 Demostrar la ecuación (7).
- 5 Demostrar la ecuación (8).
- 6 Si se dejan caer al mismo tiempo, ¿qué objeto llega antes al final del plano, el cilindro hueco o la esfera?. Dé una explicación de este hecho. ¿Cuál llegaría antes si el cilindro fuese macizo?
- 7 Se dejan caer dos esferas de distinta masa y distinto radio. ¿Cuál de ellas llega primero al final del plano inclinado?
- 8 ¿Puede concluirse, a partir de sus medidas experimentales, que los cuerpos rígidos que ha empleado ruedan sin deslizar?. Explique.
- 9 ¿Puede estimar, a partir de sus medidas experimentales, un valor del coeficiente de rozamiento estático entre la superficie del plano inclinado y los cuerpos utilizados?. Explique.