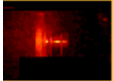


A  
J  
B



L  
e  
c  
c  
i  
o  
n  
e  
s  
d  
e  
F  
í  
s  
i  
c  
a

# FÍSICA

CURSO 2010-2011

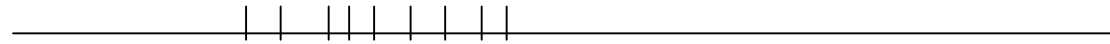
## TEORÍA DE ERRORES

*T  
e  
o  
r  
í  
a  
  
E  
r  
r  
o  
r  
e  
s*

# ERRORES EN LAS MEDIDAS FÍSICAS

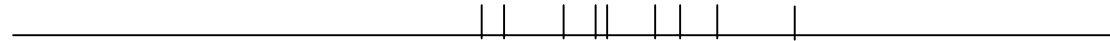
- Clasificación:
- Errores sistemáticos → defectos intrínsecos

↓ Valor verdadero



- Errores accidentales → causas fortuitas, tratamiento estadístico

↓ Valor verdadero



Las distintas medidas de una magnitud afectadas sólo por errores accidentales se distribuyen en torno al “valor verdadero” de una forma estadísticamente predecible.

Cuando los errores en las medidas son accidentales, la mejor aproximación al valor verdadero es la media aritmética de los valores obtenidos.

# DISTRIBUCIÓN GAUSSIANA o NORMAL

Cuando las medidas están afectadas sólo por errores aleatorios

Media aritmética de  $N$  medidas

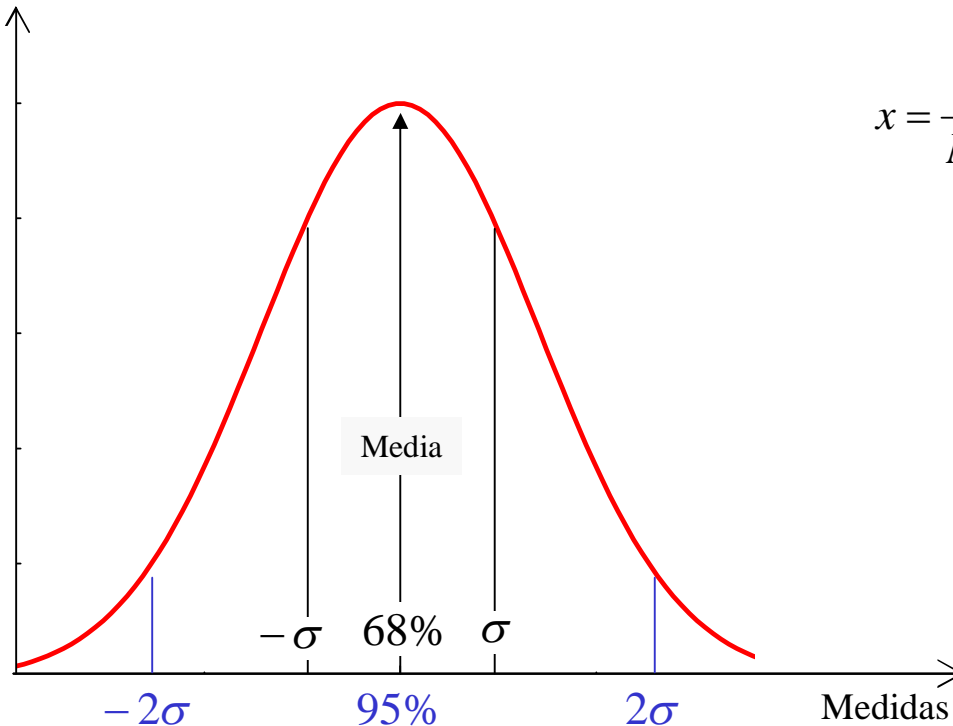
$$x = \frac{1}{N} (x_1 + x_2 + \dots + x_N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

Desviación estándar de población

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - x)^2}{N}}$$

Aceptaremos como estimación del error en una serie de medidas  $\sigma$  ó  $2\sigma$

Número de veces que se presenta una medida



La mayoría de las medidas se concentran alrededor de la media, las medidas más alejadas y extremas son menos frecuentes

Uso de diferencias al cuadrado en los estimadores estadísticos para evitar cancelaciones

# CUALIDADES DE LOS APARATOS DE MEDIDA

RESOLUCIÓN: Es la mínima división de la escala del aparato

Ejemplos: 1 mm en una regla milimetrada;  
0.01 A en cierto amperímetro

SENSIBILIDAD: Es el número de divisiones de la escala que recorre el indicador del aparato cuando la magnitud a medir varía en una unidad.

Ejemplos.: 1 mm<sup>-1</sup> en la regla milimetrada.  
100 A<sup>-1</sup> en el amperímetro.

Umbral de sensibilidad:

variación mínima de la magnitud que no es apreciada por el aparato  
(evidentemente es menor que la resolución)

FIDELIDAD: Es la cualidad del aparato de dar el mismo resultado siempre que se mide la misma magnitud física en las mismas condiciones experimentales y distintas condiciones ambientales del aparato (temperatura, humedad ambiente, tensión de alimentación, ...).

# CUALIDADES DE LOS APARATOS DE MEDIDA

PRECISIÓN: Es la característica que nos indica globalmente el error debido al umbral de sensibilidad y la falta de fidelidad del aparato.

Se expresa ordinariamente como un tanto por ciento del fondo de escala (F.E.). Por ejemplo: un amperímetro de precisión 2% del F.E.

De todas estas características, la **precisión** es la que más completamente indica el error de la medida debido intrínsecamente al aparato, es decir, que no se puede rebajar salvo que midamos con un aparato más preciso

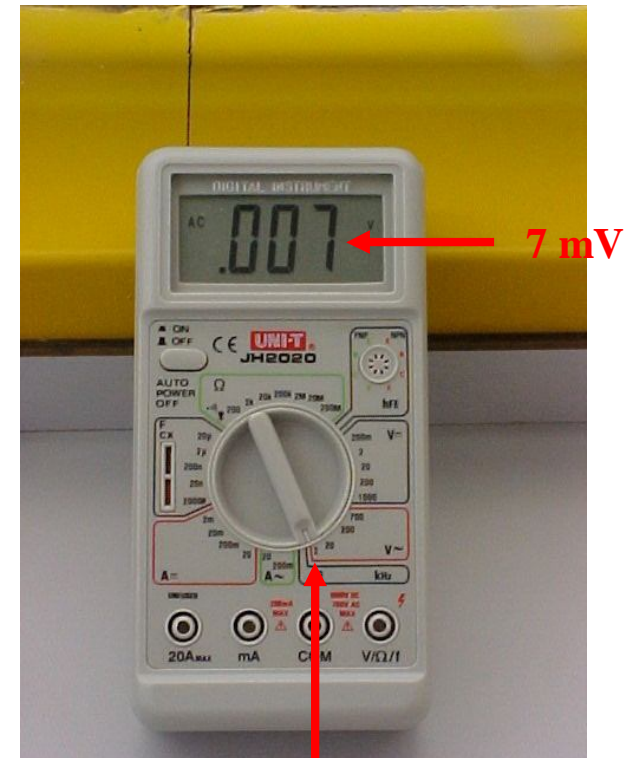
Hay otros errores que afectan circunstancialmente a un aparato, pero que pueden corregirse mediante calibrado, es decir, ajustándolos para que den medidas correctas o corrigiendo sus escalas tras una confrontación con un patrón o un aparato más preciso. Debido a esta circunstancia, es necesario definir otra cualidad.

EXACTITUD: Es la cualidad que indica que un aparato es preciso y está bien calibrado. Sólo un aparato exacto permite medidas exactas, pero la exactitud está siempre limitada por la precisión del aparato.

# CUALIDADES DE LOS APARATOS DE MEDIDA

## ERROR DE CERO

El error más típico que afecta a la exactitud de los aparatos es el “error de cero”. Causado por un defecto de ajuste del aparato, este da una lectura distinta de cero cuando lo que mide vale cero. Es fácilmente corregible reajustando el aparato o corrigiendo numéricamente las lecturas en la cantidad en que difieren el cero real y el de la escala.



Escala 2 V

# CIFRAS SIGNIFICATIVAS

- El número de cifras significativas de una medida es el número de dígitos fiables que dicha medida contiene.
- Ejemplo “dudoso”: tiempo que tarda la luz en recorrer UN MILLÓN de kilómetros...

$$t = \frac{x}{c} = \frac{10^6}{3 \cdot 10^5} = 3.3333333333 \text{ s} \quad ?$$

## Criteria

- Los ceros a la izquierda **no son** significativos, indican la colocación del punto decimal; así, 0.000345 tiene TRES cifras significativas.
- Los ceros a la derecha y después del punto decimal **si son** significativos; como ejemplo, 3.4120 tiene CINCO cifras significativas.
- En números enteros terminados en ceros, éstos pueden ser significativos o no. Debe distinguirse si sólo sirven para localizar el punto decimal o forman parte de la medida.

$3 \cdot 10^2 \text{ kg} \rightarrow$  UNA cifra significativa

$3.0 \cdot 10^2 \text{ kg} \rightarrow$  DOS cifras significativas     $3.00 \cdot 10^2 \text{ kg} \rightarrow$  TRES cifras significativas

El resultado de un cálculo no puede ser más exacto que la cantidad menos exacta que interviene en el mismo.

# ERRORES EN MEDIDAS DIRECTAS

Las medidas directas son las realizadas midiendo una magnitud física por medio de un instrumento y un procedimiento de medida.

Las medidas indirectas son las que se obtienen a través de la medida directa de otra u otras magnitudes relacionadas con ella mediante una fórmula conocida.

Error en **una** medida directa:

En cada medida directa  $x$  se comete el error  $\Delta x$  que impone la resolución del aparato

Este es el ***error absoluto*** de cada medida. La medida se expresa como  $x \pm \Delta x$

Por ejemplo: midiendo una longitud de 22 mm con una regla milimetrada, cometemos un error de 1 mm. Esto debe expresarse como  $(22 \pm 1)$  mm.

Criterio general para expresar el error absoluto:

Ya que el error representa la incertidumbre en el conocimiento de la medida, en general debe expresarse *con UNA sola cifra significativa*.

No obstante, cuando expresamos el error absoluto de una serie de medidas resultado de ciertos cálculos, véase más adelante, se admite expresar el error absoluto con DOS cifras significativas si la primera de ellas es 1.

# ERRORES EN MEDIDAS DIRECTAS

Medida resultante de un conjunto de medidas directas

$x_1$	$\Delta x_1$
$x_2$	$\Delta x_2$
$x_3$	$\Delta x_3$
...	...
$x_N$	$\Delta x_N$

Valor aceptado: media aritmética

$$x = \frac{1}{N}(x_1 + x_2 + \dots + x_N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

Error absoluto de la serie: la mayor de las dos cantidades siguientes:

\* La desviación estándar de los datos

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - x)^2}{N}} \quad \begin{matrix} \sigma \text{ (68\%)} \\ 2\sigma \text{ (95\%)} \end{matrix}$$

\* El valor cuadrático medio de los errores (RMS)

$$\Delta x_{RMS} = \frac{1}{N} \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + \dots + (\Delta x_N)^2}$$

El error absoluto del conjunto será la mayor de las dos cantidades  $\Delta x = \text{MAX}(2\sigma, \Delta x_{RMS})$

Ejemplo: medida del periodo de un péndulo simple

$T = 1.94 \text{ s}$

$T_i \text{ (s)}$	$\Delta T_i$	$(T_i - T)^2$	$\Delta T_i^2$
1,92	0,01	4,00E-04	1,00E-04
1,94	0,01	4,93E-32	1,00E-04
1,96	0,01	4,00E-04	1,00E-04
1,95	0,01	1,00E-04	1,00E-04
1,94	0,01	4,93E-32	1,00E-04
1,93	0,01	1,00E-04	1,00E-04

$\Delta x_{RMS} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ s}$

$\sigma = 0.013 \text{ s}$        $2\sigma = 0.03 \text{ s}$

$T = 1.94 \pm 0.03 \text{ s}$

# ERRORES EN MEDIDAS INDIRECTAS

- La medida indirecta de una magnitud  $x$  se determina a través de la medida de otras con las que mantiene una relación funcional  $x = x(x_1, x_2, \dots, x_N)$

## Ley de propagación del error de Gauss

$$\Delta x = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial x_1} \Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial x_2} \Delta x_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial x}{\partial x_N} \Delta x_N\right)^2}$$

La ley de propagación de Gauss nos da el valor medio del error absoluto de la magnitud medida en forma indirecta a partir de los errores absolutos  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots$

Ejemplo: cálculo de la energía cinética de un cuerpo de masa  $M = (2.14 \pm 0.04)$  kg que se mueve con una velocidad constante  $v = (4.5 \pm 0.1)$  m/s.

$$E_c = \frac{1}{2} M v^2 = 21.6675 \text{ J} \quad (\text{Sin ajustar decimales})$$

$$\Delta E_c = \sqrt{\left[\frac{\partial E_c}{\partial M} \Delta M\right]^2 + \left[\frac{\partial E_c}{\partial v} \Delta v\right]^2} = \sqrt{\left[\frac{v^2}{2} \Delta M\right]^2 + [M v \Delta v]^2} = \sqrt{\left[\frac{4.5^2}{2} \cdot 0.04\right]^2 + [2.14 \cdot 4.5 \cdot 0.1]^2} = 1.088 \text{ J}$$

Expresamos el error con 2 cifras significativas al ser la primera un 1  $\Delta E_c = 1.1 \text{ J}$

Ajustamos el resultado al mismo orden decimal que el error:  $E_c = (21.7 \pm 1.1) \text{ J}$

# ERRORES EN MEDIDAS INDIRECTAS

Valor máximo del error en medidas indirectas

- Si supusiéramos que de todas las variables que intervienen en la magnitud  $x$  sólo una de ellas,  $x_i$ , influye en el error  $\Delta x$  por haber sido todas las demás medidas sin error alguno, la ley de propagación del error nos daría:

$$\Delta x = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial x_i} \Delta x_i\right)^2} = \left|\frac{\partial x}{\partial x_i}\right| \Delta x_i$$

Pero realmente no hay ninguna variable que sea medida sin error, por lo que podemos considerar que el error máximo en la medida indirecta será la suma de una serie de términos de error individual de la forma expresada en la ecuación anterior:

$$\Delta x = \left|\frac{\partial x}{\partial x_1}\right| \Delta x_1 + \left|\frac{\partial x}{\partial x_2}\right| \Delta x_2 + \dots + \left|\frac{\partial x}{\partial x_N}\right| \Delta x_N$$

Salvo que se indique expresamente lo contrario, debe preferirse expresar los resultados de las medidas acompañados de su error máximo, dado por la ecuación inmediata anterior en lugar del error medio dado por la fórmula de Gauss.

El anterior ejemplo de la energía cinética, si se usa el error máximo, da como resultado  $E_c = (21.7 \pm 1.5) \text{J}$  (compruébese)

# ERRORES EN MEDIDAS INDIRECTAS

Caso particular que se presenta con frecuencia:

- La función consta exclusivamente de productos y/o cocientes

$$x = x_1^a \cdot x_2^b \cdot \dots \cdot x_N^n$$

Derivadas parciales

$$\frac{\partial x}{\partial x_1} = a \cdot \frac{x}{x_1}$$

$$\frac{\partial x}{\partial x_2} = b \cdot \frac{x}{x_2}$$

$$\frac{\partial x}{\partial x_N} = n \cdot \frac{x}{x_N}$$

Error máximo (expresado como **error relativo**, es decir, como cociente entre el error y la magnitud)

$$\frac{\Delta x}{x} = \left| a \frac{\Delta x_1}{x_1} \right| + \left| b \frac{\Delta x_2}{x_2} \right| + \dots + \left| n \frac{\Delta x_N}{x_N} \right|$$

Ejemplo: error cometido en el cálculo de una fuerza centrípeta  $F = M \frac{v^2}{R}$   $\frac{\Delta F}{F} = \frac{\Delta M}{M} + 2 \frac{\Delta v}{v} + \frac{\Delta R}{R}$

# ERRORES EN MEDIDAS INDIRECTAS

## Cálculo del error en la media empleando la ley de propagación de Gauss

Consideramos  $x_1, x_2, \dots, x_N$  (las  $N$  medidas realizadas de una magnitud, cada una afectada de un error individual  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_N$ ), como medidas directas a partir de las cuales **se obtendrá la media como medida indirecta**, siendo la relación funcional entre ellas

$$x = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

Obsérvese que 
$$\left| \frac{\partial x}{\partial x_i} \right| = \frac{\Delta x_i}{N}$$

Valor medio del error:

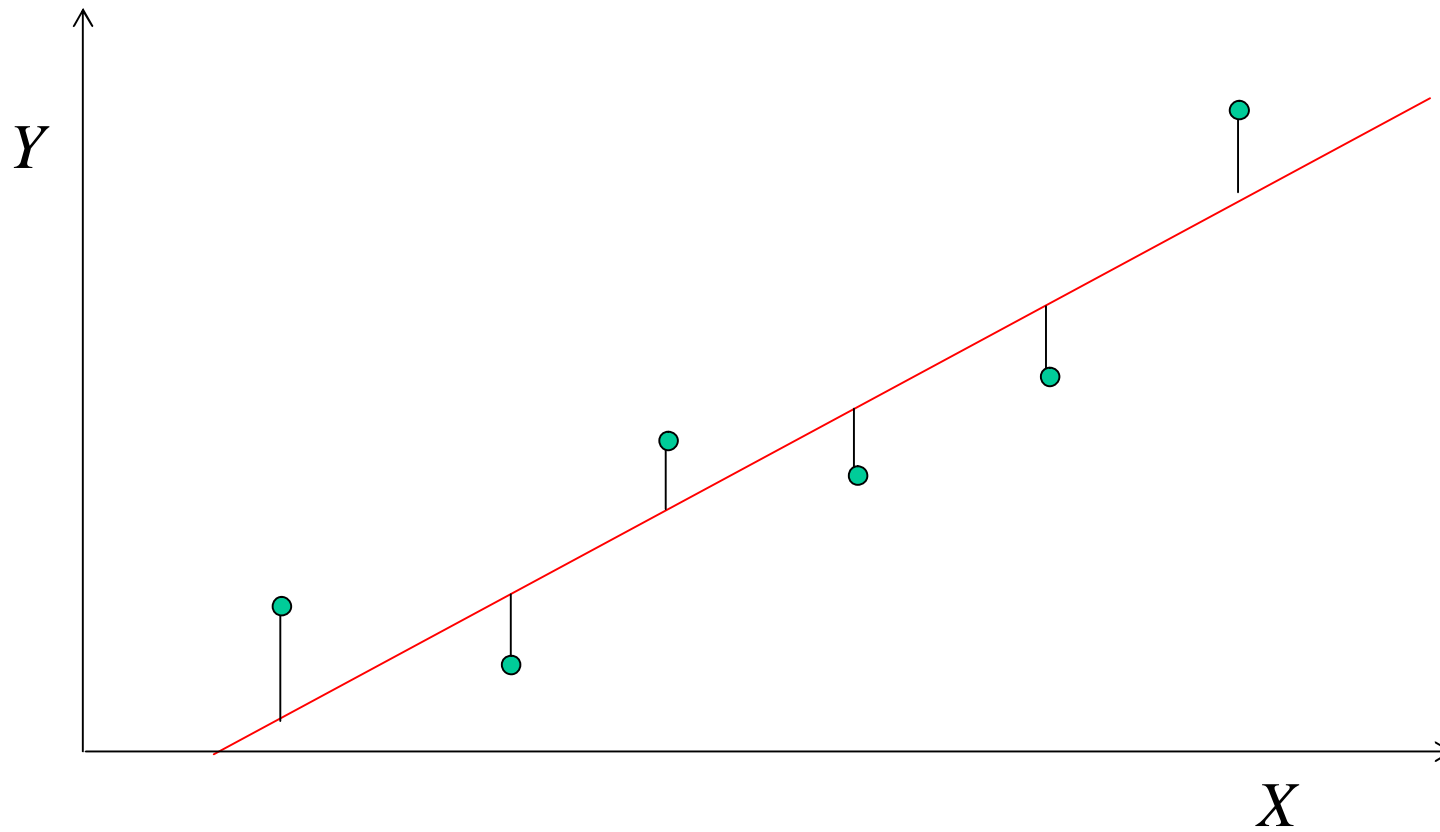
$$\Delta x = \sqrt{\left( \frac{\partial x}{\partial x_1} \Delta x_1 \right)^2 + \left( \frac{\partial x}{\partial x_2} \Delta x_2 \right)^2 + \dots + \left( \frac{\partial x}{\partial x_N} \Delta x_N \right)^2}$$

$$\Delta x = \sqrt{\left( \frac{1}{N} \Delta x_1 \right)^2 + \left( \frac{1}{N} \Delta x_2 \right)^2 + \dots + \left( \frac{1}{N} \Delta x_N \right)^2} = \frac{1}{N} \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + \dots + (\Delta x_N)^2} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + \dots + (\Delta x_N)^2}{N}} = \frac{\Delta x_{RMS}}{\sqrt{N}}$$

Valor máximo del error:

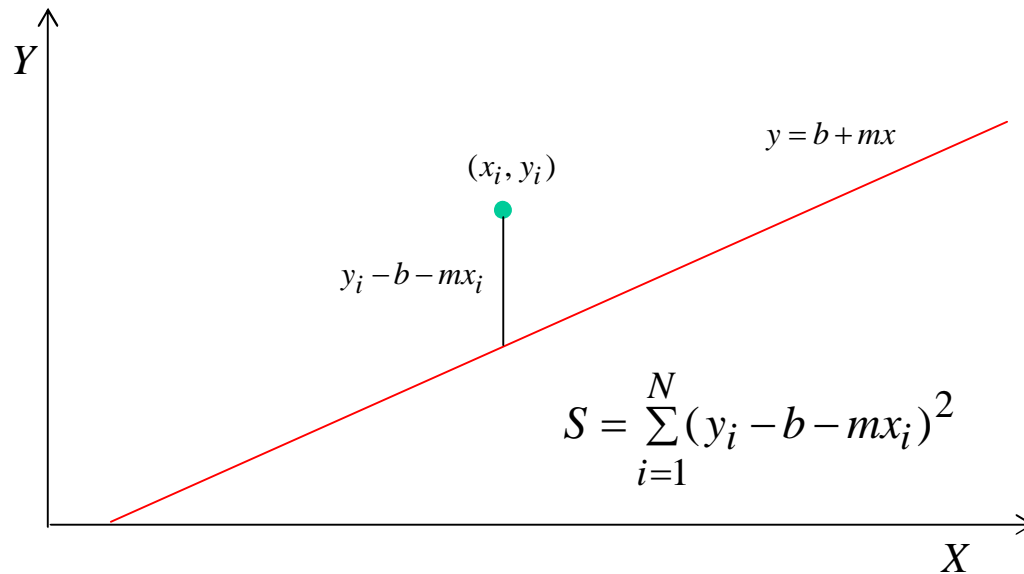
$$\Delta x = \left| \frac{\partial x}{\partial x_1} \right| \Delta x_1 + \left| \frac{\partial x}{\partial x_2} \right| \Delta x_2 + \dots + \left| \frac{\partial x}{\partial x_N} \right| \Delta x_N = \frac{1}{N} (\Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_N)$$

## MÉTODO DE MÍNIMOS CUADRADOS



## MÉTODO DE MÍNIMOS CUADRADOS

## Ajuste lineal



$$bN + m \sum_{i=1}^N x_i = \sum_{i=1}^N y_i$$

$$b \sum_{i=1}^N x_i + m \sum_{i=1}^N x_i^2 = \sum_{i=1}^N x_i y_i$$

CRITERIO: Minimizar S

$$\frac{\partial S}{\partial m} = 0 \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 0$$

Sistema de ecuaciones a resolver

## MÉTODO DE MÍNIMOS CUADRADOS

$$m = \frac{\sum x \sum y - N \sum xy}{(\sum x)^2 - N \sum x^2}$$

$$b = \frac{\sum x \sum xy - \sum y \sum x^2}{(\sum x)^2 - N \sum x^2}$$

## DESVIACIONES (ERRORES EN LOS DATOS)

$$\sigma_x = \frac{\sum \Delta x}{N}$$

$$\sigma_y = \frac{\sum \Delta y}{N}$$

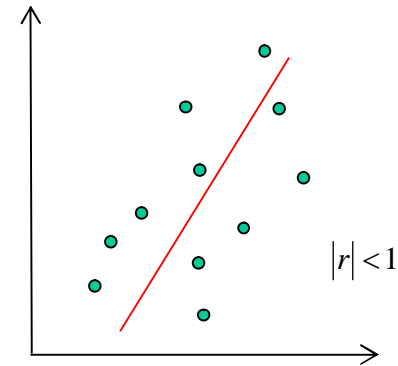
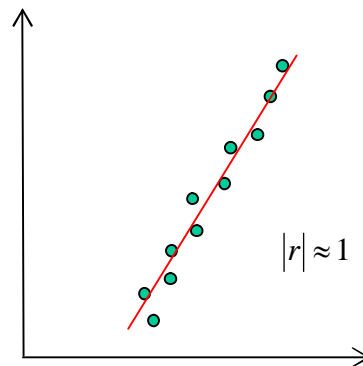
$$\sigma = \sqrt{\sigma_y^2 + m^2 \sigma_x^2}$$

$$\Delta m = \sqrt{\frac{N \sigma^2}{N \sum x^2 - (\sum x)^2}}$$

$$\Delta b = \sqrt{\frac{\sigma^2 \sum x^2}{N \sum x^2 - (\sum x)^2}}$$

Coeficiente de correlación

$$r = \frac{\sum xy - \frac{\sum x \sum y}{N}}{\sqrt{\left(\sum x^2 - \frac{1}{N}(\sum x)^2\right) \left(\sum y^2 - \frac{1}{N}(\sum y)^2\right)}}$$



# MÉTODO DE MÍNIMOS CUADRADOS

Ejemplo: ajuste lineal de datos x, y  $y = b + mx$

x	$\Delta x$	y	$\Delta y$	xy	$x^2$	$y^2$
134	10	5	2	670,0	17956,0	25,0
178	10	6	2	1068,0	31684,0	36,0
317	10	12	2	3804,0	100489,0	144,0
440	10	16	2	7040,0	193600,0	256,0
523	10	19	2	9937,0	273529,0	361,0
589	10	21	2	12369,0	346921,0	441,0
694	10	25	2	17350,0	481636,0	625,0
759	10	28	2	21252,0	576081,0	784,0
934	10	34	2	31756,0	872356,0	1156,0
1115	10	41	2	45715,0	1243225,0	1681,0
<b>5683</b>	<b>100</b>	<b>207</b>	<b>20</b>	<b>150961</b>	<b>4137477</b>	<b>5509</b>

\* Pendiente

\* Ordenada en el origen

\* Barras de error

$$\sigma_x = \frac{\sum \Delta x}{N} \quad \sigma_y = \frac{\sum \Delta y}{N} \quad \sigma = \sqrt{\sigma_y^2 + m^2 \sigma_x^2}$$

$$m = \frac{\sum x \sum y - N \sum xy}{(\sum x)^2 - N \sum x^2}$$

$$b = \frac{\sum x \sum xy - \sum y \sum x^2}{(\sum x)^2 - N \sum x^2}$$

$$\Delta m = \sqrt{\frac{N \sigma^2}{N \sum x^2 - (\sum x)^2}}$$

$$\Delta b = \sqrt{\frac{\sigma^2 \sum x^2}{N \sum x^2 - (\sum x)^2}}$$

$m = 0,037$

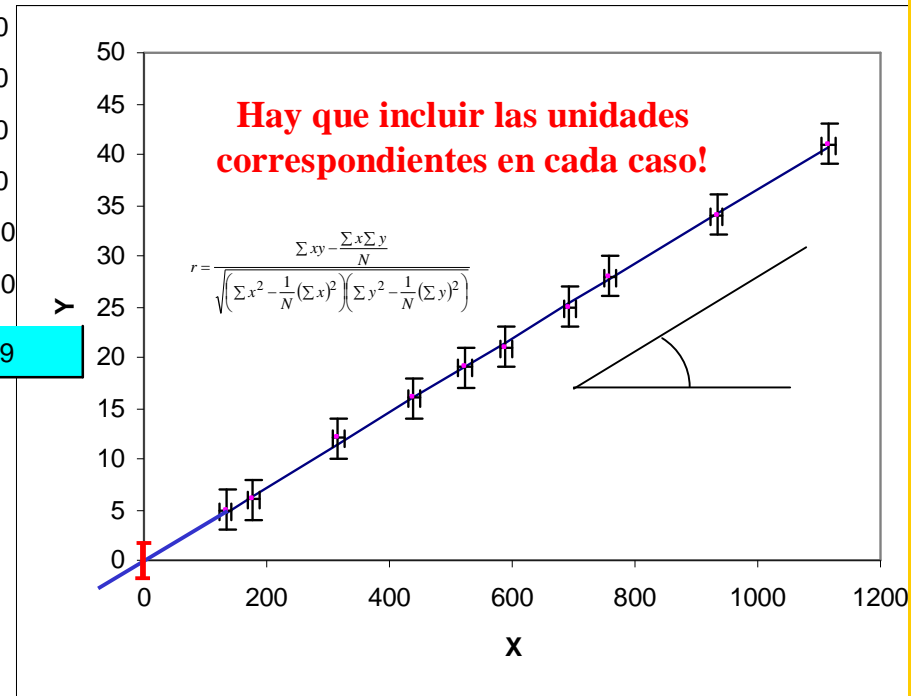
$b = -0,2$

$\Delta m = 0,002$

$\Delta b = 1,4$

---

$r = 0,99961$



# MÉTODO DE MÍNIMOS CUADRADOS

Ejemplo 2: ajuste de datos x, 1/y (linealización)  $\frac{1}{y} = b + mx$   $\Delta(1/y) = \left| \frac{\partial(1/y)}{\partial y} \right| \Delta y = \frac{\Delta y}{y^2}$

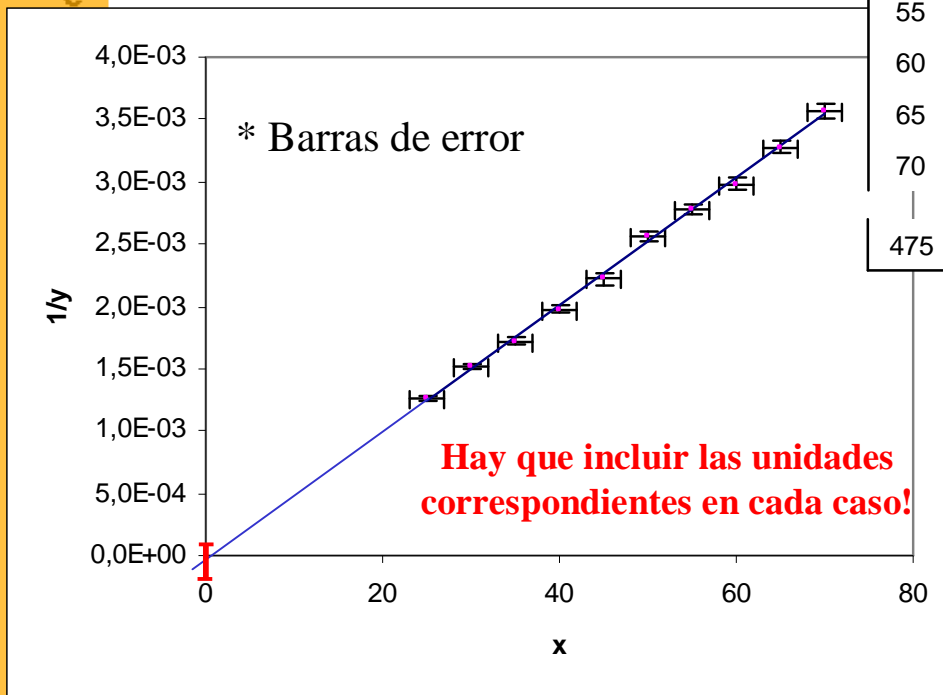
\* Pendiente  $m = \frac{\sum x \sum y - N \sum xy}{(\sum x)^2 - N \sum x^2}$   
 $\Delta m = \sqrt{\frac{N \sigma^2}{N \sum x^2 - (\sum x)^2}}$

$\sigma_x = \frac{\sum \Delta x}{N}$   $\sigma_y = \frac{\sum \Delta y}{N}$   $\sigma = \sqrt{\sigma_y^2 + m^2 \sigma_x^2}$

\* Ordenada en el origen

$b = \frac{\sum x \sum xy - \sum y \sum x^2}{(\sum x)^2 - N \sum x^2}$   $\Delta b = \sqrt{\frac{\sigma^2 \sum x^2}{N \sum x^2 - (\sum x)^2}}$

x	Δx	y	Δy	1/y	Δ(1/y)	x(1/y)	x^2	(1/y)^2
25	2	790	10	1,27E-03	1,60E-05	0,0316	625	1,60E-06
30	2	660	10	1,52E-03	2,30E-05	0,0455	900	2,30E-06
35	2	580	10	1,72E-03	2,97E-05	0,0603	1225	2,97E-06
40	2	505	10	1,98E-03	3,92E-05	0,0792	1600	3,92E-06
45	2	450	10	2,22E-03	4,94E-05	0,1000	2025	4,94E-06
50	2	390	5	2,56E-03	3,29E-05	0,1282	2500	6,57E-06
55	2	360	5	2,78E-03	3,86E-05	0,1528	3025	7,72E-06
60	2	335	5	2,99E-03	4,46E-05	0,1791	3600	8,91E-06
65	2	305	5	3,28E-03	5,37E-05	0,2131	4225	1,07E-05
70	2	280	5	3,57E-03	6,38E-05	0,2500	4900	1,28E-05
475	20			2,39E-02	3,91E-04	1,2399	24625	6,24E-05



$m = 0,000051$   $b = -0,00004$   
 $\Delta m = 0,000002$   $\Delta b = 0,00012$

$r = 0,99915$

$$r = \frac{\sum xy - \frac{\sum x \sum y}{N}}{\sqrt{\left(\sum x^2 - \frac{1}{N}(\sum x)^2\right) \left(\sum y^2 - \frac{1}{N}(\sum y)^2\right)}}$$

### Ejemplo 3

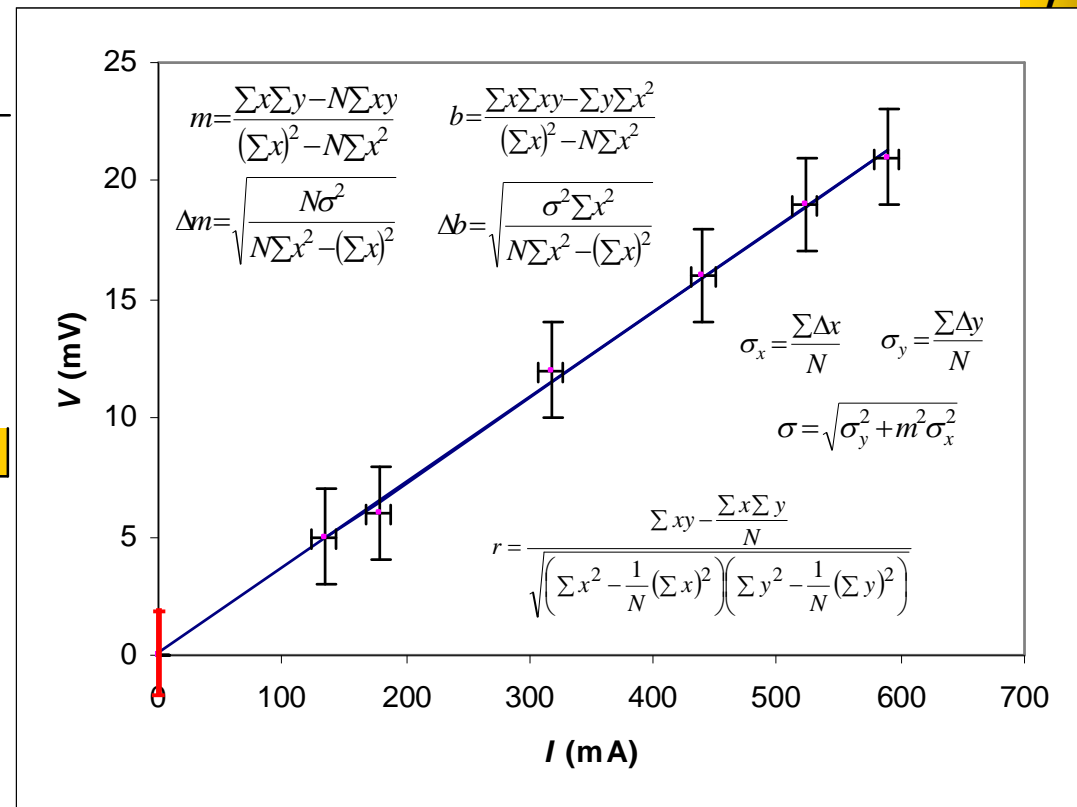
Se quiere medir la resistencia eléctrica de un conductor metálico, para lo cual se llevan a cabo medidas de diferencia de potencial entre sus extremos (voltaje  $V$ , unidad SI voltio) en función de la corriente que circula por él (intensidad  $I$ , unidad SI amperio). Se espera que el conductor metálico obedezca la ley de Ohm:  $V = IR$ , donde  $R$  es la resistencia eléctrica, que debe expresarse en ohmios  $\Omega$  ( $1 \Omega = 1 \text{ V}/1 \text{ A}$ ). En la tabla T1.8 se presentan las medidas, con los voltajes medidos en mV y las intensidades en mA. Se acompañan los errores correspondientes en las mismas unidades. Determine la resistencia eléctrica del conductor.

Para resolver el problema haremos un ajuste de mínimos cuadrados representado la intensidad de corriente en abscisas y el voltaje en ordenadas. Según la ley de Ohm, la pendiente de la recta obtenida ha de ser igual a la resistencia eléctrica del conductor.

$I$ (mA)	$\Delta I$	$V$ (mV)	$\Delta V$	$xy$	$x^2$	$y^2$
$x$	$\Delta x$	$y$	$\Delta y$			
134	10	5	2	670	17956	25
178	10	6	2	1068	31684	36
317	10	12	2	3804	100489	144
440	10	16	2	7040	193600	256
523	10	19	2	9937	273529	361
589	10	21	2	12369	346921	441
2181	60	79	12	34888	964179	1263

$m =$	0,036 $\Omega$	$b =$	0,1 mV
$\Delta m =$	0,005 $\Omega$	$\Delta b =$	2,0 mV

$r = 0,99865$



### Ejemplo 4

Se ha usado un sistema que puede considerarse un péndulo simple con objeto de medir la aceleración de la gravedad. El procedimiento empleado consiste en medir el periodo de oscilación  $T$  para varias longitudes diferentes  $L$ , y usar la relación entre el periodo, la longitud del péndulo y la aceleración de la gravedad:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Utilice el método de mínimos cuadrados, transformando convenientemente la ecuación anterior, para obtener la aceleración de la gravedad de acuerdo con los datos presentados en la tabla T1.9. Las longitudes están medidas con  $\pm 1$  cm y los periodos con  $\pm 0.02$  s.

La transformación necesaria para resolver el problema es linealizar la ecuación del periodo del péndulo:  $L = \frac{g}{4\pi^2} T^2$

Realizando un ajuste de  $L$  frente a  $T^2$  obtendremos una recta cuya pendiente es  $g/4\pi^2$ , de la cual obtendremos un valor para  $g$ .

Los errores cometidos en  $L$  son conocidos directamente; para determinar los errores en  $T^2$  aplicamos la propagación de errores:

$$\Delta(T^2) = \left| \frac{\partial T^2}{\partial T} \right| \Delta T = 2T\Delta T$$

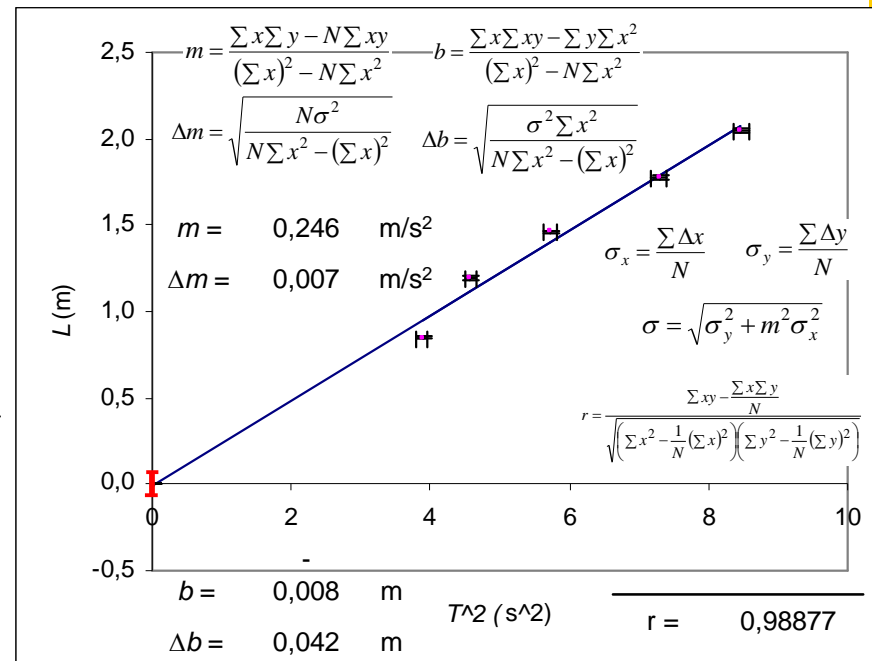
$T$ (s)	$\Delta T$	$L$ (m)	$\Delta L$
1,97	0,02	0,85	0,01
2,14	0,02	1,20	0,01
2,39	0,02	1,46	0,01
2,70	0,02	1,78	0,01
2,91	0,02	2,05	0,01

$g =$	9,7	m/s <sup>2</sup>
$\Delta g =$	0,3	m/s <sup>2</sup>

$T^2$ (s)	$\Delta(T^2)$	$L$ (m)	$\Delta L$
x	$\Delta x$	y	$\Delta y$
3,88	0,08	0,85	0,01
4,58	0,09	1,20	0,01
5,71	0,10	1,46	0,01
7,29	0,11	1,78	0,01
8,47	0,12	2,05	0,01
29,93	0,48	7,33	0,05

xy	x <sup>2</sup>	y <sup>2</sup>
3,30	15,1	0,72
5,47	21,0	1,43
8,34	32,6	2,13
12,94	53,1	3,15
17,36	71,7	4,20
47,4	193,5	11,6



### Ejemplo 5

En un experimento sobre gases se toman los datos de presión  $P$  y volumen  $V$  registrados en la tabla T1.10 y que corresponden a una muestra  $n = (0.100 \pm 0.001)$  moles de gas. Los errores en  $P$  y  $V$  están en las mismas unidades que las magnitudes respectivas. Suponiendo que la muestra cumple la ley de los gases ideales, realice un ajuste de mínimos cuadrados para determinar la temperatura absoluta  $T$  del gas. Ley de los gases ideales:  $PV = nRT$  Constante universal de los gases  $R = 8,314 \text{ J/K.mol}$

$P \text{ (Pa)}$	$\Delta P$	$V \text{ (m}^3\text{)}$	$\Delta V$
2,5E+05	5,0E+03	1,0E-03	5,0E-05
1,7E+05	5,0E+03	1,5E-03	5,0E-05
1,3E+05	5,0E+03	1,8E-03	5,0E-05
9,5E+04	1,0E+03	2,4E-03	5,0E-05
8,0E+04	1,0E+03	3,1E-03	5,0E-05
7,4E+04	1,0E+03	3,4E-03	5,0E-05

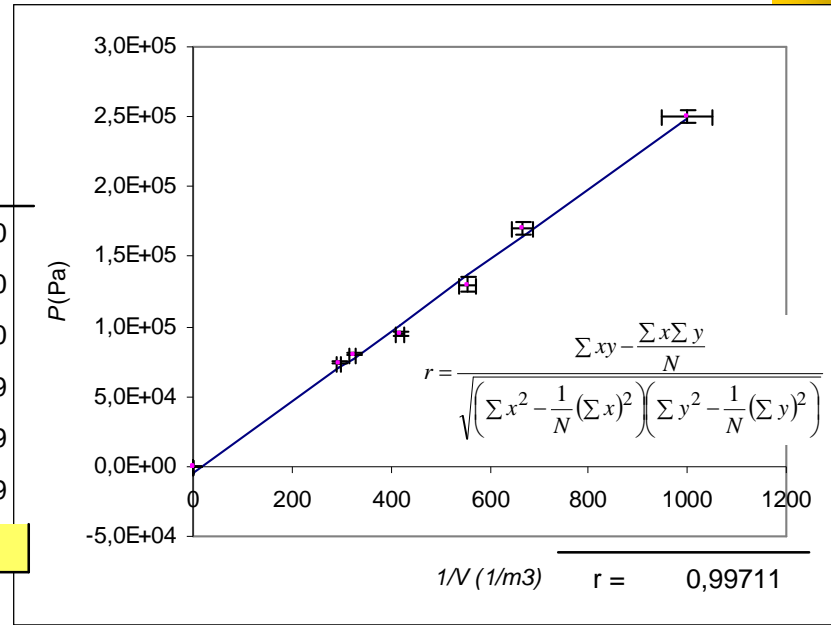
A partir de la ecuación de los gases ideales vemos que  $P = \frac{nRT}{V}$

Por tanto, si representamos  $P$  en ordenadas frente a  $1/V$  en abscisas, la pendiente de la recta resultante será proporcional a la temperatura absoluta  $m = nRT$

Error en  $1/V$   $\Delta(1/V) = \left| \frac{\partial(1/V)}{\partial V} \right| \Delta V = \frac{\Delta V}{V^2}$   $T = \frac{m}{nR}$   $\Delta T = \frac{1}{R} \left( \frac{\Delta m}{n} + \frac{\Delta n}{m^2} \right)$

$T = 306 \text{ K}$   
 $\Delta T = 11 \text{ K}$

$1/V \text{ (m}^{-3}\text{)}$	$\Delta(1/V)$	$P \text{ (Pa)}$	$\Delta P$			
x	$\Delta x$	y	$\Delta y$	xy	$x^2$	$y^2$
1,0E+03	5,0E+01	2,5E+05	5,0E+03	2,5E+08	1,0E+06	6,3E+10
6,7E+02	2,2E+01	1,7E+05	5,0E+03	1,1E+08	4,4E+05	2,9E+10
5,6E+02	1,5E+01	1,3E+05	5,0E+03	7,2E+07	3,1E+05	1,7E+10
4,2E+02	8,7E+00	9,5E+04	1,0E+03	4,0E+07	1,7E+05	9,0E+09
3,2E+02	5,2E+00	8,0E+04	1,0E+03	2,6E+07	1,0E+05	6,4E+09
2,9E+02	4,3E+00	7,4E+04	1,0E+03	2,2E+07	8,7E+04	5,5E+09
3,3E+03	1,1E+02	8,0E+05	1,8E+04	5,2E+08	2,1E+06	1,3E+11



$$m = \frac{\sum x \sum y - N \sum xy}{(\sum x)^2 - N \sum x^2}$$

$$b = \frac{\sum x \sum xy - \sum y \sum x^2}{(\sum x)^2 - N \sum x^2}$$

$$\sigma_x = \frac{\sum \Delta x}{N} \quad \sigma_y = \frac{\sum \Delta y}{N}$$

$$\Delta m = \sqrt{\frac{N \sigma^2}{N \sum x^2 - (\sum x)^2}} \quad \Delta b = \sqrt{\frac{\sigma^2 \sum x^2}{N \sum x^2 - (\sum x)^2}} \quad \sigma = \sqrt{\sigma_y^2 + m^2 \sigma_x^2}$$

$m = 254 \text{ J} \quad b = -4,8E+03 \text{ Pa}$   
 $\Delta m = 9 \text{ J} \quad \Delta b = 5,4E+03 \text{ Pa}$  21

# AJUSTE MANUAL DE DATOS DE REGRESIÓN

$x$	$\Delta x$	$y$	$\Delta y$
$x_1$	$\Delta x_1$	$y_1$	$\Delta y_1$
$x_2$	$\Delta x_2$	$y_2$	$\Delta y_2$
...		...	
...		...	
$x_n$	$\Delta x_n$	$y_n$	$\Delta y_n$

- 1º) Plotear los puntos experimentales sobre papel milimetrado  
(No es preciso plotear las barras de error, pero hay que tenerlas en cuenta en cálculos posteriores)
- 2º) Trazar una recta de ajuste que deje a ambos lados igual número de puntos
- 3º) Construir un triángulo rectángulo de catetos próximos a los extremos A, B
- 4º) Calcular la pendiente experimental donde

$$m_{\text{exp}} = \frac{N}{D}$$

$$N = N_A - N_B \quad D = D_A - D_B$$

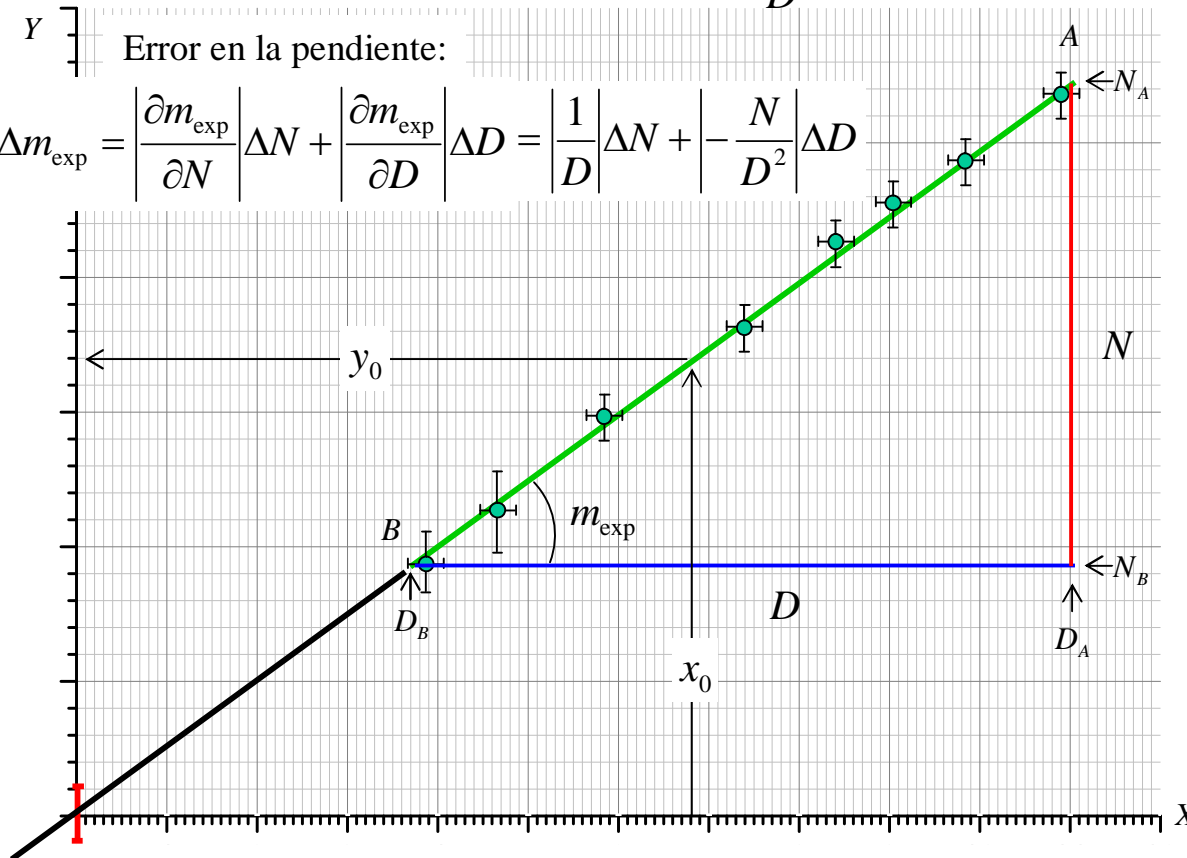
Y } Error en la pendiente:

$$\Delta m_{\text{exp}} = \left| \frac{\partial m_{\text{exp}}}{\partial N} \right| \Delta N + \left| \frac{\partial m_{\text{exp}}}{\partial D} \right| \Delta D = \left| \frac{1}{D} \right| \Delta N + \left| -\frac{N}{D^2} \right| \Delta D$$

$$\Delta N = \Delta N_A + \Delta N_B$$

$$\Delta D = \Delta D_A + \Delta D_B$$

(Como errores  $N_A, N_B$  se aceptan los de los puntos experimentales más próximos)



- 5º) Ordenada en el origen

Se toma una abscisa  $x_0$  dentro de nuestro rango de datos, se mide el valor  $y_0$  que le corresponde, y se calcula  $b$  y su error aplicando

$$b = y_0 - m x_0$$

$$\Delta b = \Delta y_0 + x_0 \Delta m + m \Delta x_0$$