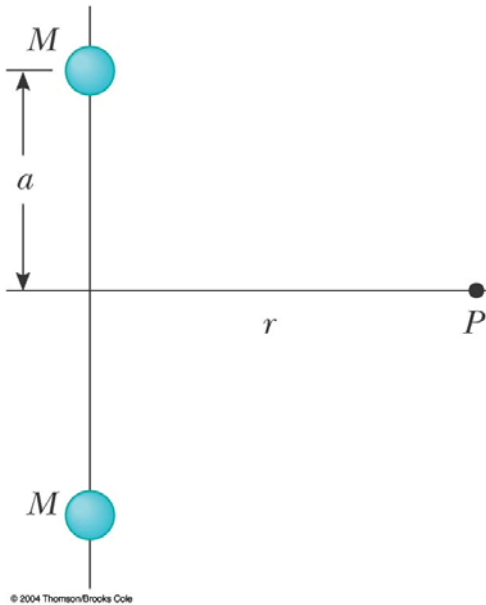
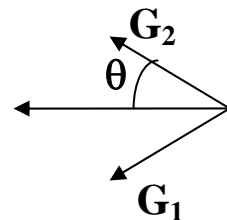


Ejercicios de Gravitación

Serway 13.25: Calcule la magnitud y dirección del campo gravitacional en un punto P sobre la bisectriz perpendicular de la recta que une dos cuerpos de igual masa separados por una distancia 2a, como se muestra en la figura.



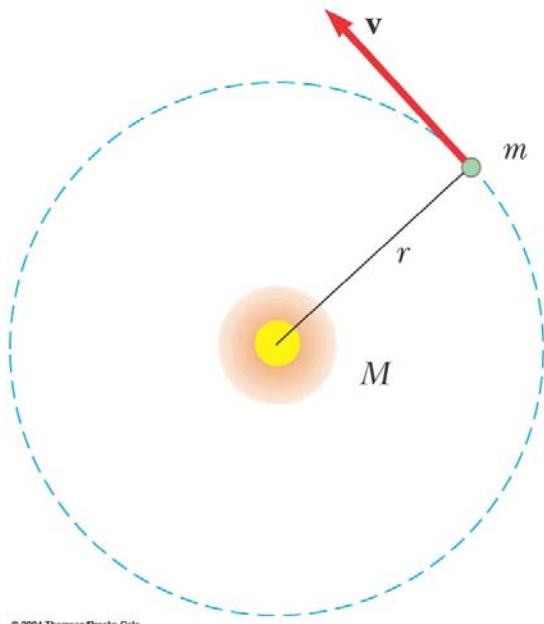
Solución: El campo gravitacional creado por cada masa en el punto P apunta hacia la propia masa M, según se muestra en el dibujo de la derecha. Como las dos son iguales, el campo resultante sólo tiene componente horizontal (eje X).



$$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = 2|\vec{g}_1| \cdot \cos\theta \cdot (-\vec{u}_X) = -2 \cdot \left(G \frac{M}{a^2 + r^2} \right) \cdot \frac{r}{\sqrt{a^2 + r^2}} \vec{u}_X = -2G \frac{M \cdot r}{(a^2 + r^2)^{3/2}} \vec{u}_X$$

donde hemos usado la definición de campo $g = F_G/m$ y la fuerza de la gravitación universal de Newton.

Serway 13.19: Un satélite síncrono (geoestacionario), que siempre permanece en el mismo punto sobre el ecuador de un planeta, se pone en órbita alrededor de Júpiter para estudiar la famosa mancha roja. Júpiter gira alrededor de su eje cada 9.84 h. Utilice la información de la tabla 13.2 para hallar la altitud del satélite.



Solución: Consideramos una órbita circular del satélite, con *un periodo de revolución que debe ser igual a la duración del día de Júpiter (9.84h)*. Esto es

$$T = 9.84h \cdot \frac{3600\text{segundos}}{1h} = 35424\text{segundos}$$

Sabemos que en la trayectoria circular se igualan la fuerza centrífuga y la fuerza gravitatoria, luego

$$F_G = G \frac{Mm}{r^2} = F_C = m \frac{v^2}{r} = m \frac{(\omega \cdot r)^2}{r}$$

de donde

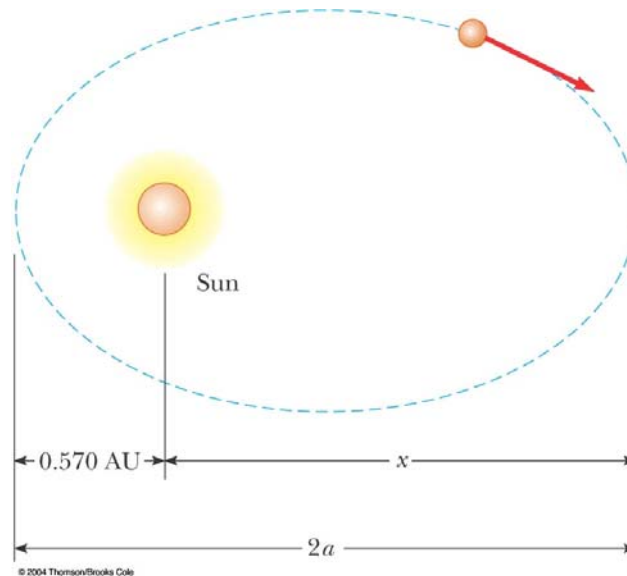
$$r = \frac{GM}{(\omega \cdot r)^2} \rightarrow r^3 = \frac{GM}{\omega^2} = \frac{GM}{(2\pi/T)^2} = T^2 \frac{GM}{4\pi^2}$$

que no es sino la 3ª ley de Kepler para la órbita circular (a=r). Sustituimos el periodo T y los datos $M = M_J = 1.90 \cdot 10^{27} \text{ kg}$, $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$

y resulta **$r = 1.59 \cdot 10^8 \text{ m} = 2.27 \cdot R_J$**

($R_J = 7E7 \text{ m}$)

Serway 13.17: El cometa Halley se aproxima al Sol a una distancia de 0.57 UA, y su periodo es de 75.6 años (UA= Unidad Astronómica = $1.5 \cdot 10^{11}$ m es la distancia media entre la Tierra y el Sol). ¿A qué distancia se alejará del Sol el cometa antes de que empiece su viaje de regreso?

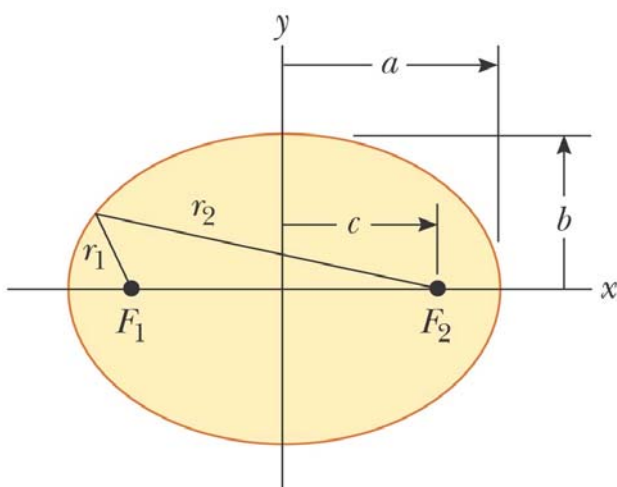


Solución: Recordamos que la tercera ley de Kepler relaciona el periodo orbital, uno de los datos del enunciado, con el semieje mayor **a** de la órbita.

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM_S} \right) a^3, \text{ donde } G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2 \text{ y } M_S = 1.99 \cdot 10^{30} \text{ kg (de la Tabla 13.2)}$$

$$T = 75.6 \text{ años} \cdot \frac{360 \text{ días}}{1 \text{ año}} \cdot \frac{24 \times 3600 \text{ segundos}}{1 \text{ día}} = 2.35 \cdot 10^9 \text{ segundos}$$

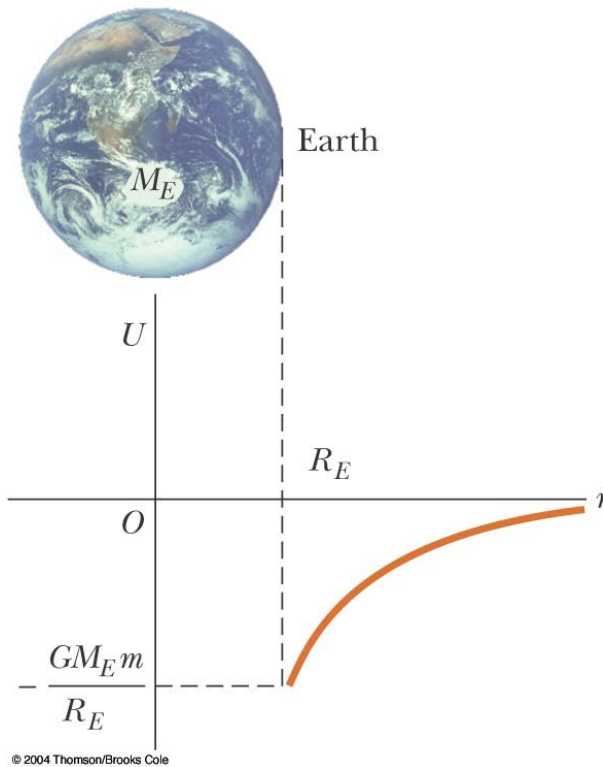
De ahí podemos obtener la distancia **a**, que está referida al centro de la elipse (ver figura). Despejando se obtiene **a = 17.7 UA**



Ya que el Sol está en uno de los focos, la distancia que nos preguntan es **a+c**. Por otro lado nos dicen que la distancia mínima entre el cometa y el Sol es 0.57 UA, que debe ser **a-c**. Con todo ello se obtiene **c = 17.1 UA** y **a+c = 34.8 UA**

Serway 13.28: En la superficie de la Tierra, un proyectil es lanzado verticalmente hacia arriba a una rapidez de 10 km/s. ¿A qué altura subirá? No haga caso de la resistencia del aire ni de la rotación de la Tierra.

Solución: Siendo la fuerza gravitatoria conservativa, cabe plantear la conservación de la energía total del proyectil en su ascenso. Consideramos entonces un instante inicial justo tras el lanzamiento (con velocidad V_0) y un instante final cuando se detiene ($V=0$) antes de caer de vuelta. Así,



$$E_{TOT}^{INICIO} = (E_C + E_P)^{INICIO} = \frac{1}{2}mV_0^2 - G\frac{M_E m}{R_E}$$

$$= E_{TOT}^{FINAL} = (E_C + E_P)^{FINAL} = 0 - G\frac{M_E m}{r_F}$$

De donde

$$\frac{1}{2}mV_0^2 = GM_E m \left(\frac{1}{R_E} - \frac{1}{r_F} \right) \rightarrow$$

$$r_F = \frac{R_E}{\left(1 - \frac{V_0^2 R_E}{2GM_E} \right)} = 4.96 \times R_E$$

Para este cálculo hemos usado datos de G y de la tabla 13.2, además de $V_0 = 10^4$ m/s.

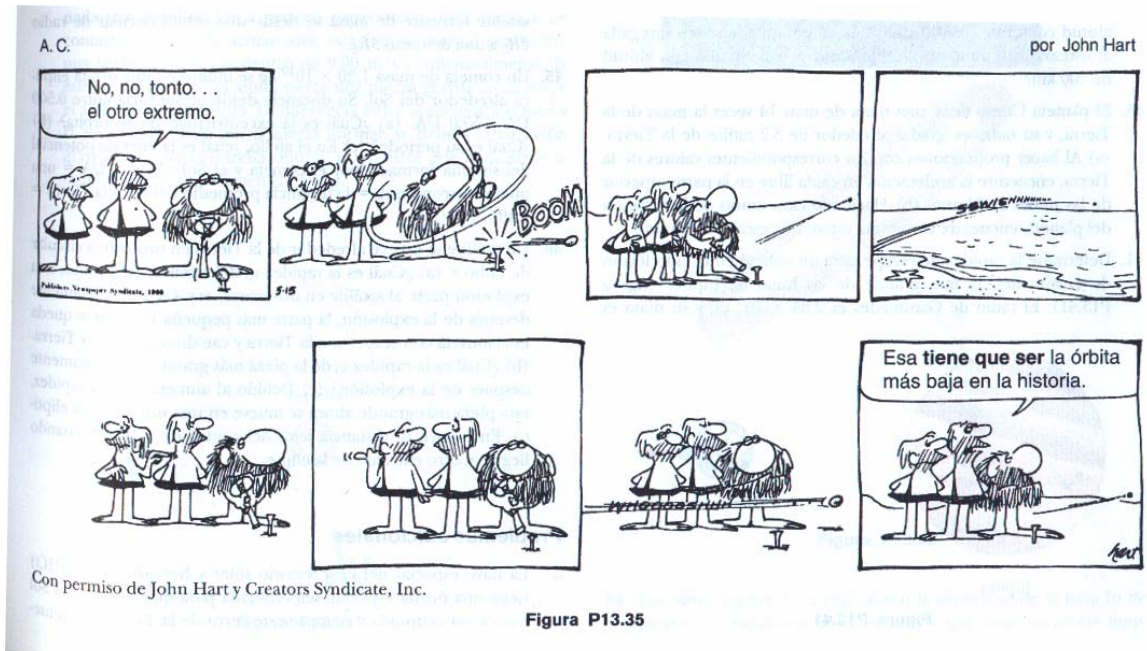
$$R_E = 6.37 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$M_E = 5.98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$$

¿Debe ser esa velocidad mayor o menor que la de escape?

Sugerencia: Problema 13.35



Serway 13.10: La aceleración en caída libre sobre la superficie de la Luna es alrededor de un sexto de la que hay en la superficie de la Tierra. Si el radio de la Luna es de unos $0.25 \cdot R_E$, encuentre la razón entre el promedio de sus densidades, ρ_L/ρ_E .

Solución: En la superficie de un planeta la fuerza o campo gravitatorio es aproximadamente constante y apunta hacia el centro del mismo. De la ley de Newton se obtiene que el valor de \mathbf{g} es $G \cdot M/R^2$. En el caso de Luna y Tierra tenemos que

$$\frac{g_L}{g_E} = \frac{1}{6} = \frac{M_L / R_L^2}{M_E / R_E^2} = \frac{M_L}{M_E} \cdot \left(\frac{R_E}{R_L} \right)^2 = \frac{M_L}{M_E} \cdot 4^2$$

Luego

$$\frac{M_L}{M_E} = \frac{(1/6)}{4^2} = 1/96$$

Por otro lado,

$$\frac{M_L}{M_E} = \frac{\rho_L \cdot V_L}{\rho_E \cdot V_E} = \frac{\rho_L \cdot \left(\frac{4\pi}{3} R_L^3 \right)}{\rho_E \cdot \left(\frac{4\pi}{3} R_E^3 \right)} = \frac{\rho_L}{\rho_E} \cdot \left(\frac{R_L}{R_E} \right)^3 = \frac{\rho_L}{\rho_E} \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^3$$

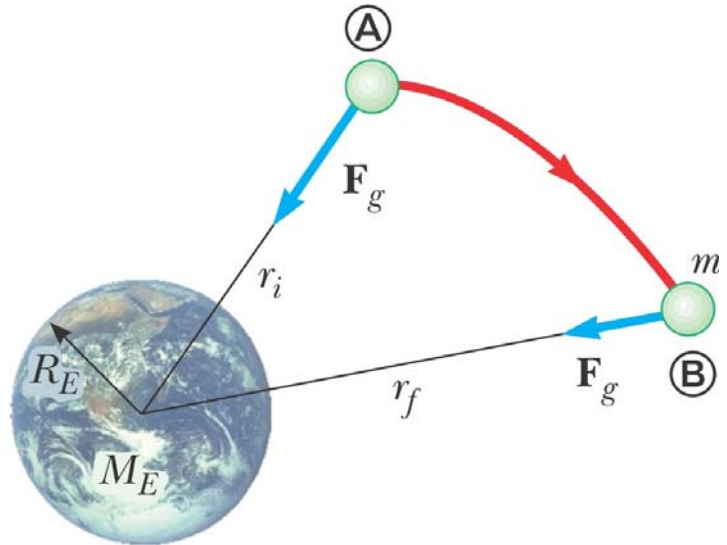
Combinando todo queda finalmente

$$\frac{\rho_L}{\rho_E} = \frac{M_L}{M_E} \cdot 4^3 = \frac{1}{96} \cdot 4^3 = 4/6 = 2/3$$

Serway 13.37: Un satélite de masa 200 kg se coloca en órbita terrestre a una altura de 200 km sobre la superficie. (a) Con una órbita circular, ¿Cuánto tarda el satélite para completar una órbita? (b) ¿Cuál es la rapidez del satélite? (c) ¿Cuál es la mínima energía de entrada necesaria para poner ese satélite en órbita? Desprecie la resistencia del aire pero incluya el efecto de la rotación diaria del planeta.

Solución:

Al considerar las dos dimensiones en el movimiento de los cuerpos celestes se hace conveniente incluir el término centrífugo en la energía potencial gravitatoria. Así podremos emplear una energía potencial efectiva que todavía depende de una sola variable r ,



$$E_{TOT} = E_C + E_P = \frac{1}{2}m(v_r^2 + v_\theta^2) - G \frac{M_E m}{r} = \frac{1}{2}m v_r^2 + \left(\frac{L^2}{2mr^2} - G \frac{M_E m}{r} \right) = E_C' + E_P^{EFEC}$$

donde el momento angular es constante (F_G central) y de valor $L = mrv_\theta = mr^2\omega$

(a) En la órbita circular $r=R = R_E+h$ ($h= 200$ km), $\omega = 2\pi/T$, y el balance de fuerzas

arroja $R^3 = T^2 \frac{GM_E}{4\pi^2}$, luego el periodo T será 5298 s = 1.47 h (unas 16 vueltas al día)

(b) $v_\theta = R \cdot \omega = 7.8 \cdot 10^3$ m/s = 7.8 km/s

(c) Situación Inicial: justo antes del lanzamiento, con $r=R_E$, $T_0= 24$ h

Situación Final: en la órbita circular descrita, con $r=R$, $T= 1.47$ h

$$E_{TOT}^{INIC} = \frac{L_0^2}{2mR_E^2} - G \frac{M_E m}{R_E} = \frac{(mR_E^2 \omega_0)^2}{2mR_E^2} - G \frac{M_E m}{R_E} = 21 \cdot 10^6 \text{ J} - 12.5 \cdot 10^9 \text{ J} = -12.5 \cdot 10^9 \text{ J}$$

$$E_{TOT}^{FINAL} = \frac{L^2}{2mR^2} - G \frac{M_E m}{R} = \frac{(mR^2 \omega)^2}{2mR^2} - G \frac{M_E m}{R} = 6.1 \cdot 10^9 \text{ J} - 12.1 \cdot 10^9 \text{ J} = -6 \cdot 10^9 \text{ J}$$

siendo $\omega = 2\pi/T$. Con estos valores obtenemos la energía necesaria para colocarlo en la órbita;

$$\Delta E = E^{FIN} - E^{INI} = -6 \cdot 10^9 \text{ J} + 12.5 \cdot 10^9 \text{ J} = 6.5 \cdot 10^9 \text{ J}$$

Serway 13.38: Igual excepto que añade ¿En qué lugar de la superficie de la Tierra y en qué dirección debe ser lanzado para reducir al mínimo la energía necesaria)