

Estructuras de acero

Métodos de análisis¹

1. Introducción

La *verificación* de la *resistencia* de las secciones, la *estabilidad* de las barras de la estructura o de los perfiles que las componen, y quizá la *fatiga*, exigen *conocer* de antemano *el reparto de las fuerzas internas² en la estructura*; de aquí se puede deducir el reparto de las tensiones en cualquier sección que se requiera. La expresión «fuerzas internas» designa generalmente y se refiere a las fuerzas axiales, fuerzas cortantes, momentos de flexión, momentos de torsión, etc.

Las fuerzas internas de una *estructura* estáticamente determinada (*isostática*) se pueden hallar basándose sólo en la estática. En una estructura estáticamente indeterminada (*hiperestática*) las ecuaciones de equilibrio estático no bastan para resolverlas; hace falta también conocer algo de las condiciones geométricas bajo carga. En esta fase importa entender las diferencias fundamentales entre estructuras isostáticas e hiperestáticas.

Las *fuerzas internas* de una estructura se pueden determinar, bien por análisis elástico o plástico global. Aunque el *análisis elástico global* puede usarse en todos los casos, el *análisis plástico global* sólo sirve cuando la sección de las barras y el acero satisfacen determinadas condiciones.

Las fuerzas internas se pueden hallar mediante distintos métodos, según se pueda despreciar o no el efecto de las deformaciones en la estructura. En la *teoría de primer orden*, se realizan los cálculos referidos solamente a la *geometría inicial* de la estructura; en tal caso las deformaciones son tan pequeñas que los desplazamientos resultantes afectan poco a la geometría de la estructura y por ello tampoco varían grandemente las fuerzas que actúan en las barras. La *teoría de segundo orden* toma en cuenta la influencia de la deformación de la estructura, y por tanto, debe hacerse referencia a la *geometría deformada bajo carga*.

La teoría de primer orden puede servir, por ejemplo, para el análisis global en los casos en que la estructura está debidamente arriostrada, impedida la deformación horizontal, o si los métodos de cálculo prevén indirectamente los efectos de segundo orden. La teoría de segundo orden sirve para todos los casos sin restricciones.

Cuando se puede aplicar la *teoría de primer orden*, el *comportamiento* de la estructura hecha con un material que obedezca la *ley de Hooke*, es lineal por sí mismo; los desplazamientos –de traslación o rotación de cualquier perfil– varían

¹ *Elementos Estructurales. Tomo 9.* (1999). Instituto Técnico de la Estructura en Acero. San Sebastián

² Otras denominaciones comunes: Solicitaciones o esfuerzos internos, fuerzas de sección, etc.

linealmente con las fuerzas aplicadas; o sea, todo aumento del desplazamiento es proporcional a la fuerza que lo causa. En tales condiciones, se pueden sumar por el *principio de superposición* las tensiones, deformaciones, fuerzas internas y desplazamientos debidos a distintas acciones. De hecho este principio dice que los desplazamientos (fuerzas internas) debidos a varias cargas actuando simultáneamente son iguales a la suma de los desplazamientos (fuerzas internas) debidos a la acción de cada carga por separado. Esto no se aplica si la relación tensión-deformación del material no es lineal, o si la estructura (aunque esté hecha con material que obedezca la ley de Hooke) no se comporta linealmente debido a los cambios de geometría causados por las cargas aplicadas. El principio de superposición, si puede aplicarse, es especialmente útil para determinar la condición más desfavorable de cada barra de una estructura estáticamente indeterminada.

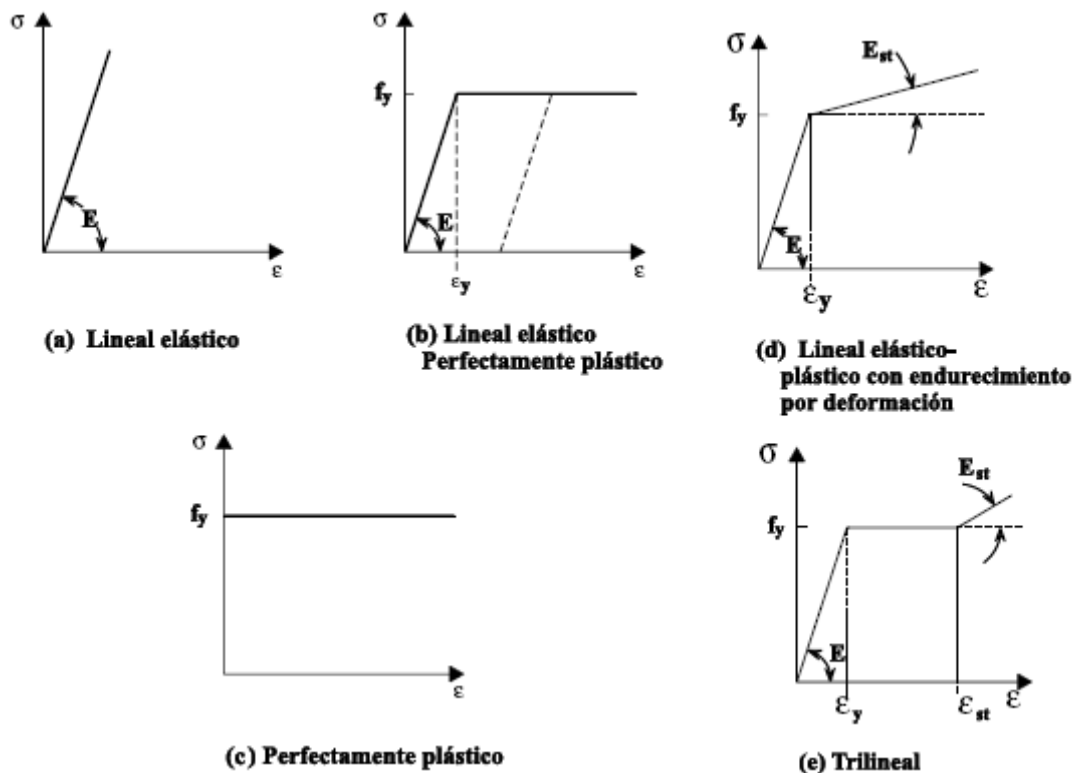
En la práctica, el *análisis elástico global* se emplea generalmente para estudiar la eficacia de servicio de la estructura; es decir, los estados límites pasados los cuales los criterios de servicio especificados dejan de cumplirse (*ELS*). El *análisis plástico global* tiene utilidad particular para investigar los estados causantes de un colapso real de la estructura y para hallar la resistencia a la rotura, o los estados límites máximos (*ELU*).

2. Análisis elástico global

El análisis elástico global supone que el comportamiento de la estructura es elástico, y consiguientemente el del material. Se funda en la hipótesis de que *la deformación del material en carga es lineal*, sea cual sea la tensión; así, se supone que la deformación es proporcional a la tensión, o sea, que el material obedece la ley de Hooke con todas las cargas (figura 1). Evidentemente deben considerarse las propiedades verdaderas del material, especialmente la tensión de fluencia, y posiblemente la resistencia, cuando se estudia si las fuerzas internas exceden o no de la resistencia de las secciones y las barras.

Ya se ha dicho que en el análisis elástico global de estructuras isostáticas, las fuerzas internas se hallan sólo con las ecuaciones de equilibrio estático. *En estructuras hiperestáticas* las fuerzas de las barras deben cumplir las condiciones de equilibrio y producir deformaciones compatibles con la continuidad elástica de la estructura y con las condiciones de apoyo. Las *ecuaciones de equilibrio* no bastan para hallar fuerzas desconocidas y necesitan el suplemento de relaciones geométricas simples entre las deformaciones de la estructura. Estas relaciones se denominan *condiciones de compatibilidad* porque aseguran que sean compatibles las deformaciones geométricas de la estructura deformada.

También se requiere que los tipos de unión elegidos sean capaces de mantener, prácticamente sin cambios, el ángulo inicial entre las barras unidas, es decir, se presume que las *uniones* sean *rígidas*.



Figuras 1a-1e. Diagramas σ - ϵ

Cuando se pueda aplicar la *teoría de primer orden*, las condiciones de equilibrio y compatibilidad se expresan con referencia a la *configuración inicial de la estructura* (sin deformación).

Las tensiones resultantes y los componentes de la reacción se pueden hallar mediante dos métodos generales. El primero es el *método de flexibilidad*, en el que se liberan fuerzas para que la estructura sea estáticamente determinada; las incógnitas son las fuerzas. Estas se hallan asumiendo que la estructura liberada experimenta deformaciones irregulares que se corrigen aplicando las fuerzas adicionales que convenga (figura 2a).

El segundo planteamiento es el *método de rigidez*, en el que se restringe la deformación para impedir el movimiento de las uniones, determinándose las fuerzas necesarias para originar la restricción; entonces se permite que se produzcan desplazamientos en las uniones hasta que hayan desaparecido las restricciones ficticias. Una vez que se conocen los desplazamientos, se hallan las fuerzas presentes en la estructura por superposición de los efectos de los desplazamientos separados (figura 2b).

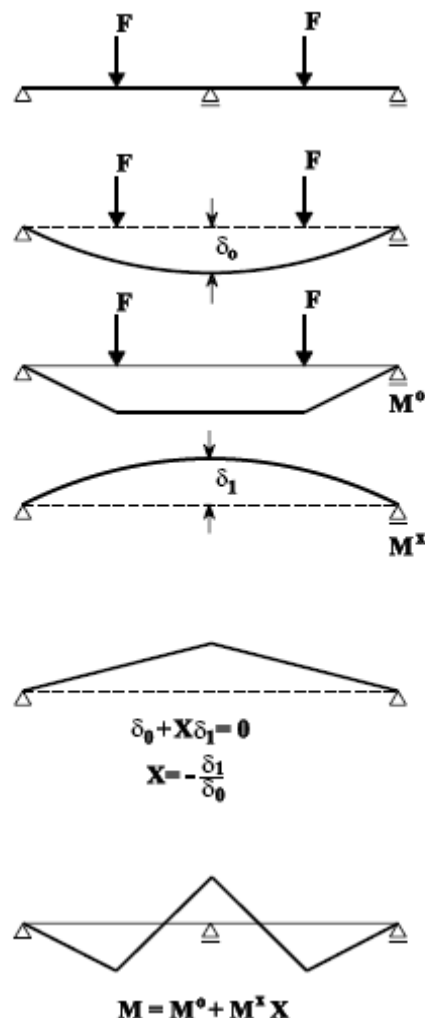
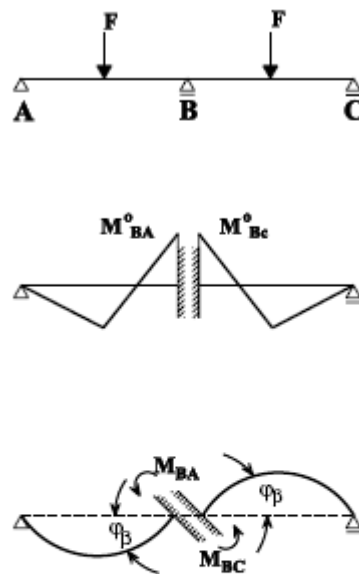


Figura 2a. Ejemplos de aplicación de la flexibilidad

La estructura se puede analizar bien por el método de fuerzas o por el de los desplazamientos. La solución en el *método de fuerzas* consiste en hallar las fuerzas necesarias para restaurar la regularidad de la geometría; el análisis consiste en despejar varias ecuaciones simultáneas, tantas como fuerzas desconocidas, que son las que hay que liberar para hacer la estructura estáticamente determinada. En el *método de los desplazamientos* las incógnitas son los posibles desplazamientos y rotaciones de las uniones. El número de fuerzas de restricción que se añadan a la estructura es igual al número de desplazamientos posibles de las uniones, e igualmente, el análisis se hace despejando un sistema de ecuaciones.

Quando sea necesario contar con los efectos de segundo orden (alinealidad geométrica), se aplicará la *teoría de segundo orden* consistente en *cálculos iterativos*. Como en este caso no se permite el principio de superposición, debe acudirse a un reparto de cargas especificado, que se incrementa por pasos mediante un multiplicador de carga (figura 3). Se escogen incrementos tan pequeños que permitan suponer un comportamiento lineal durante este aumento de la carga.



$$M_{BA} = \beta_{BA} \varphi_B \quad M_{BC} = \beta_{BC} \varphi_B$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow M_{BA}^0 + \beta_{BA} \varphi_B + M_{BC}^0 + \beta_{BC} \varphi_B = 0 \Rightarrow$$

$$\varphi_B = - \frac{\sum M_{Bi}^0}{\sum \beta_{Bi}}$$

$$M_{BA} = M_{BA}^0 + \beta_{BA} \varphi_B$$

$$M_{BC} = M_{BC}^0 + \beta_{BC} \varphi_B$$

Figura 2b. Ejemplos de aplicación del método de la rigidez

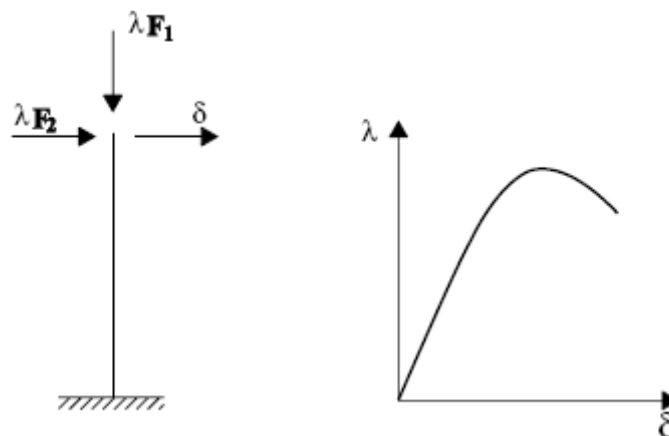


Figura 3. Ejemplo de la teoría de segundo orden

La configuración deformada que se obtiene al acabar cada aumento especificado de la carga es la geometría de referencia para el siguiente paso. Así pues, la teoría elástica de segundo orden consiste en resolver una sucesión de análisis de primer orden de una estructura cuya geometría cambia en cada paso con respecto a los anteriores. Estos cálculos pronto se hacen inmanejables a mano y se necesitan programas informáticos. Estos programas suelen fundarse en el método de rigidez –

llamado de desplazamiento— por ser más fácil definir la estructura determinada cinemáticamente, que sirve de geometría de referencia.

Casi todos los códigos y normas permiten hallar las fuerzas internas de las estructuras de geometría regular no lineal mediante análisis elástico que luego se amplía, si es necesario, para incluir los efectos de la inestabilidad. Este planteamiento parece incompatible con el rigor teórico al no ser aplicable el principio de superposición, pero ofrece al calculista la posibilidad de valerse de programas normalizados de análisis de pórticos, o sea, elásticos lineales, al menos en el anteproyecto.

Los códigos y normas permiten en ciertas circunstancias una *redistribución limitada de los momentos*. Es decir, se puede modificar el diagrama del momento elástico de un 5 a un 15% del pico del momento elástico, siempre que los momentos y cortantes que resulten del cálculo permanezcan en equilibrio con las cargas exteriores aplicadas (figura 4). Por lo tanto, aunque se mantenga de hecho el equilibrio, se viola un tanto la compatibilidad elástica de la estructura. Puede pensarse que este concepto de redistribución de momentos es un reconocimiento muy limitado del potencial que existe dentro de las estructuras hiperestáticas para soportar cargas superiores a las que requiere la plena resistencia a la flexión de las barras sólo en el punto más crítico. Se llama la atención sobre el hecho de que esto sólo es posible si no se descarga después de alcanzarse la máxima resistencia local; por lo tanto se requiere cierta ductilidad en el comportamiento de la sección transversal, que explica el motivo para limitar el proceso a los perfiles compactos.

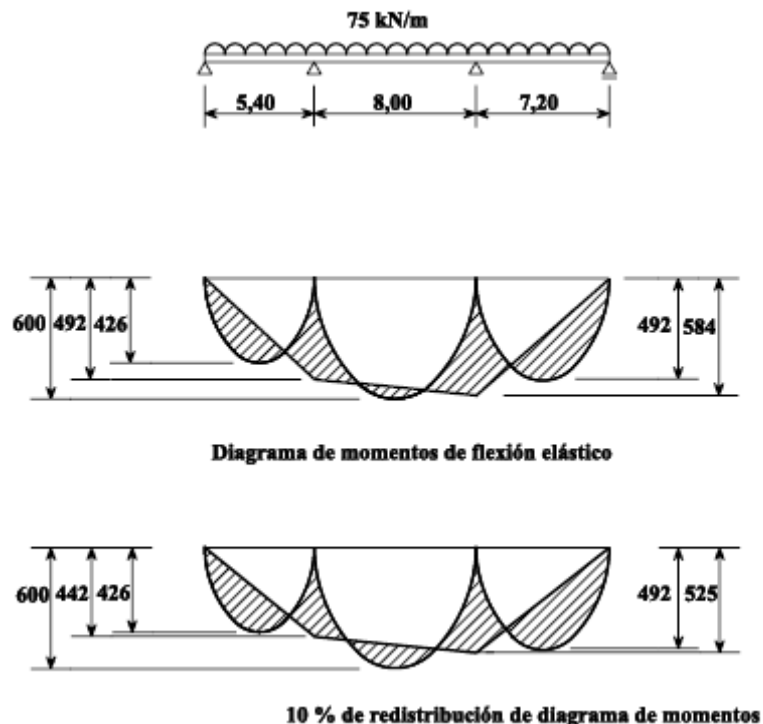


Figura 4. Redistribución del diagrama de momentos.

Se hace hincapié en que puede mantenerse la hipótesis de comportamiento de carga-deformación lineal tanto en el análisis elástico de primer orden como en el de segundo orden, incluso cuando la resistencia de la sección es resistencia plástica.

3. Análisis plástico global

El comportamiento carga-deformación del acero no es infinitamente lineal. La figura 1b representa la relación tensión-deformación de un material ideal perfectamente elástico; se sigue que la ley de Hooke se limita al campo de tensiones $\sigma \leq f_y$, donde f_y , es la tensión de fluencia del material. Más allá, el material cede plásticamente a una tensión constante de $\sigma = f_y$. Si la tensión se reduce en algún punto del campo plástico, el camino de vuelta es una línea recta paralela a la ley de Hooke, cuya inclinación es el módulo de elasticidad E . Tanto E como f_y , y toda la relación tensión-deformación, se suponen iguales en tracción y en compresión.

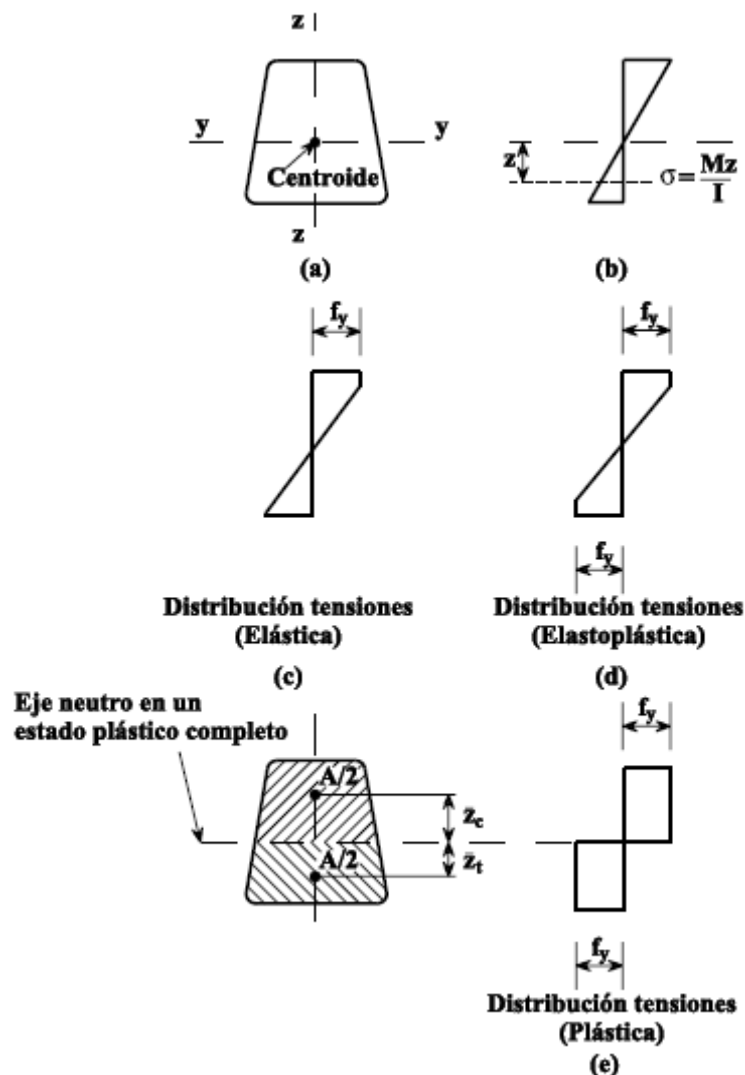


Figura 5. Distribución de tensiones en una sección sometida a un momento flector

La relación tensión-deformación ideal, aunque sólo sea un modelo matemático, se acerca mucho a la conducta del acero dulce estructural, y es también una aproximación razonable a muchos materiales continuamente endurecidos por deformación que se utilizan en ingeniería de estructuras. *Suponer una plasticidad perfecta* después de llegar a la tensión de fluencia, equivale a desprestigiar los efectos del endurecimiento por deformación y *está del lado de la seguridad*.

Veamos una sección con área A que tenga eje de simetría y experimente una flexión en el plano de simetría (figura 5). Si el momento de flexión es pequeño, la tensión y la deformación varían linealmente a través de la anchura. Al aumentar el momento, la tensión de fluencia llega a una de las fibras superiores, y al aumentarlo más, la tensión de fluencia también llega a la fibra inferior. Si sigue aumentando el momento de flexión, la fluencia se extiende desde las fibras exteriores hacia dentro hasta que se encuentran las dos zonas de fluencia; en este estado se dice que *la sección es totalmente plástica*. El valor del momento máximo, llamado *momento plástico*, se deduce de las condiciones de equilibrio. Puesto que no hay fuerza axial, el eje neutro de la sección transversal la divide en dos áreas iguales $A/2$; la tracción y compresión resultantes son iguales y forman un par igual al momento máximo, o de agotamiento:

$$M_{pl} = 0,5 \cdot A \cdot f_y \cdot (\bar{z}_c + \bar{z}_t) \quad [1]$$

siendo \bar{z}_c y \bar{z}_t , respectivamente, la distancia del centroide de la zona de tensión y compresión respecto al eje neutro, en estado plenamente plástico. En una sección de doble simetría, las distancias \bar{z}_c y \bar{z}_t son iguales, así que $0,5 \cdot A \cdot \bar{z}$ es el primer momento del área S (alrededor del eje de flexión) de media sección, y el momento de agotamiento es:

$$M_{pl} = 2 \cdot S \cdot f_y \quad [2a]$$

$$M_{pl} = W_{pl} \cdot f_y \quad [2b]$$

siendo $W_{pl} = 2 \cdot S$ el módulo de la sección plástica para flexionarse alrededor del eje en cuestión.

El momento flector máximo que dicha sección puede soportar sin superar nunca la tensión de fluencia es:

$$M_{el} = W_{el} \cdot f_y \quad [3]$$

siendo W_{el} el módulo de la sección elástica alrededor del mismo eje; el relativo aumento de resistencia que se obtiene permitiendo la fluencia total de la sección se mide por el factor de forma α :

$$\alpha = \frac{M_{pl}}{M_{el}} = \frac{W_{pl}}{W_{el}} \quad [4]$$

que, por ejemplo, es igual a 1,5 en una sección rectangular, a 1,7 en una sección circular maciza, y varía de 1,12 a 1,18 en perfiles en I, H y U flexionados alrededor de su eje principal “yy”.

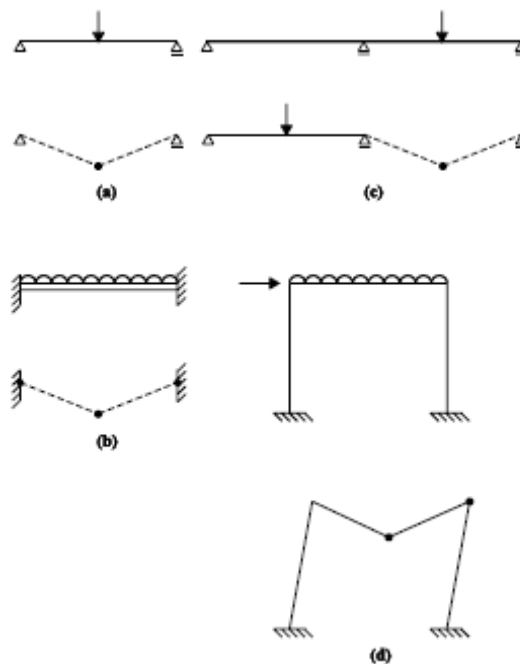


Figura 6. Posibles mecanismos plásticos

Al aumentar la carga sobre una estructura se produce fluencia en algunos puntos y experimenta deformaciones elastoplásticas. Al seguir aumentando la carga la estructura alcanza un estado totalmente plástico en el que se forma un número de secciones plenamente plásticas suficiente para transformar la estructura en un *mecanismo plástico* (figura 6); este mecanismo se colapsa si se sigue cargando. Hay que estudiar el *mecanismo de colapso* y conocer la magnitud de la carga que lo ocasiona para hallar el factor de carga en el análisis. O también, si el factor de carga está especificado, puede calcularse la estructura de modo que la carga de colapso sea igual o mayor que el producto del factor de carga por la carga de servicio de referencia. *El análisis plástico supone, por tanto, además del reparto de tensiones plásticas dentro de la sección (formación de rótulas plásticas), también una redistribución del momento flector suficiente para que se desarrollen todas las rótulas plásticas que hacen falta para que tenga lugar el mecanismo plástico.*

Cuando se forma fluencia en una sección, su valor efectivo de rigidez a la flexión, $E \cdot I$, desciende paulatinamente (figura 7); de hecho, el módulo efectivo del material fluido es cero cuando se presume un comportamiento perfectamente plástico más allá de la fluencia, y de ahí el término de *rótula plástica*. Una vez que se

produce esta rótula, la estructura se comporta, bajo carga adicional, como si se hubiese introducido una rótula real en la sección fluida. La aparición de la primera rótula plástica en la estructura ocasiona la reducción de la hiperestaticidad inicial en un grado; cada rótula plástica adicional tiene el mismo efecto.

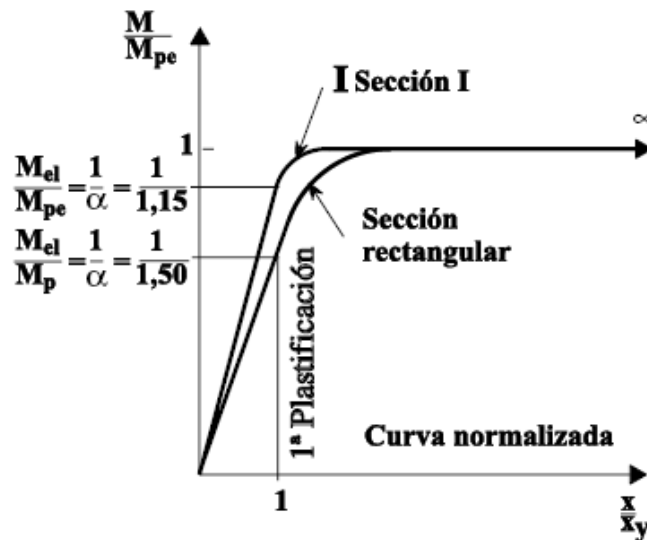


Figura 7. Diagrama momento-curvatura para distintas secciones transversales

El *colapso* se produce cuando se han formado las suficientes rótulas plásticas para que la estructura hiperestática inicial se haga paulatinamente menos hiperestática, y finalmente, se convierta en un mecanismo.

En una estructura isostática, la ganancia de resistencia debida a la plasticidad depende del valor del factor de forma. A la estructura hiperestática le afecta el proceso de redistribución del momento.

Para que una estructura pueda redistribuir tensiones dentro de la sección y entre secciones, no debe ocurrir ninguna otra forma de fallo antes del mecanismo de colapso para que pueda llegar a la carga límite.

Para que se permita el análisis plástico deben cumplirse las siguientes condiciones:

- Que el acero tenga una ductilidad adecuada para que pueda desarrollarse la resistencia plástica de los perfiles (figura 1b-e).
- Que una vez formada la rótula plástica, sea capaz de girar a un momento bastante constante de M_p (figura 7),
- Que la rótula plástica tenga la suficiente capacidad rotatoria, sin pandeo local ni lateral, para permitir la formación del mecanismo de colapso y la correspondiente redistribución de momentos (figura 7).

- Que la carga de la estructura sea predominantemente estática para que un ciclo de fatiga corto (sacudida) no ocasione un fallo.

Para cumplir estas condiciones, hay que poner *límites al tipo de acero y a las proporciones de las barras y secciones transversales*. Actualmente se permite el cálculo plástico para las clases corrientes de acero dulce, mientras que para otras clases se requiere una longitud mínima de la parte horizontal del diagrama de fluencia y una relación mínima entre la resistencia máxima a la tracción y la tensión de fluencia (endurecimiento por deformación). Las proporciones del ala y el alma de las barras que tengan rótulas plásticas deben sujetarse a ciertos límites, que son más estrictos para aceros de clase más alta. *Como la fluencia reduce mucho la rigidez, las barras que tienen rótulas plásticas son especialmente proclives a ser inestables*; por lo tanto, los límites de esbeltez de tales elementos estructurales es muy estricto y obliga a arriostrarlos lateralmente, sobre todo donde están las rótulas plásticas.

Lo anterior supone que la resistencia a la rotura por flexión de un perfil se define solamente por su momento plástico. Sin embargo, la carga axial y la fuerza de cizalla también tienen efecto.

En una estructura sometida a cargas especificadas cuya magnitud aumenta hasta la rotura, la secuencia de formación de rótulas es fija. No obstante, factores tales como el asentamiento, variación de la resistencia del material de las barras, tensiones residuales, efectos térmicos, etc, pueden cambiar la secuencia, pero no lo bastante para afectara la carga de colapso plástico; éste es de hecho estáticamente determinado y no depende de imperfecciones estructurales de ningún tipo.

El análisis plástico se funda en la conducta alinear del material, incluso si los efectos de segundo orden son despreciables. Los *métodos de análisis a mano* se valen de los teoremas fundamentales del cálculo plástico, que suelen despreciar las curvaturas elásticas respecto a las plásticas, y concentran las deformaciones plásticas donde hay rótulas plásticas. Sus métodos son por lo tanto *rígido-plásticos* (figura 1c). Los *métodos informáticos* dependen menos de idealizaciones y son así más realistas en cuanto a las curvaturas y deformaciones causadas por la relación tensión-deformación del material. Estos métodos se llaman *elastoplásticos* y se distinguen del método plástico perfecto, caracterizado por un parte horizontal de la curva de fluencia infinita (figura 1c) o por la leve pendiente de la zona de fluencia (figura 1d) o por el campo de deformación-endurecimiento que sigue a la parte horizontal de la curva de longitud limitada (figura 1e). O bien se pueden adoptar relaciones aún más precisas; los refinados *programas de elementos finitos* actuales permiten extender la fluencia y se valen del concepto de *zonas plásticas* en vez del de rótulas plásticas.

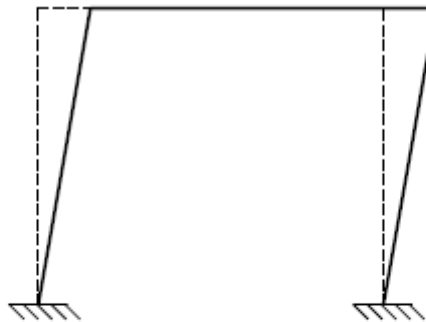
El análisis plástico de segundo orden requiere en general trabajar con programas informáticos, pero la carga de colapso de pórticos arriostrados de varias plantas se puede hallar con las fórmulas de Merchant-Rankine que tienen en cuenta de manera muy sencilla la acción recíproca del pandeo elástico y la fluencia.

Conviene destacar que *por ser el análisis plástico esencialmente alineal, el principio de superposición no es aplicable.*

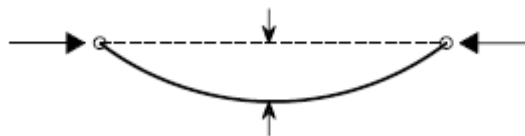
4. Comentarios adicionales

Debe observarse que las hipótesis hechas en el análisis global deben armonizar con la conducta prevista de las *uniones*. Las presunciones hechas en el cálculo de las barras también deben coincidir con el método del análisis global (o ser moderadas respecto al mismo) y la conducta prevista de las uniones.

Los códigos y normas en vigor exigen que el análisis global incorpore la previsión de *tensiones residuales* e *imperfecciones geométricas*, como falta de verticalidad, falta de rectitud, falta de ajuste y las pequeñas excentricidades inevitables que existen en las uniones reales. Pueden aplicarse imperfecciones geométricas apropiadas con valores que reflejan todos los tipos de imperfección (figura 8).



(a) Pórtico



(b) Elemento comprimido

Figura 8. Imperfecciones iniciales