Determinar el ancho b de una viga de sección rectangular, de canto h=20 cm, con el criterio de que la flecha en el extremo del voladizo sea d_c=1 cm. La carga es de 2.5 t/m, y el módulo de elasticidad vale E=2x10^6 kg/cm^2.

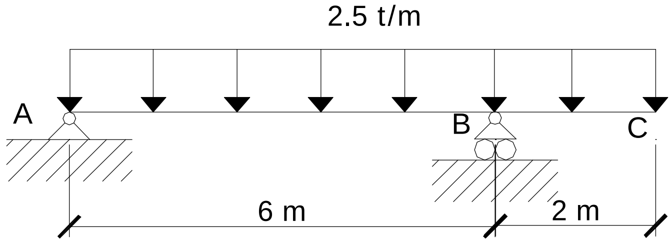

Figura 1. Viga biapoyada con un voladizo.

La deformada de la viga se muestra en la figura 2:

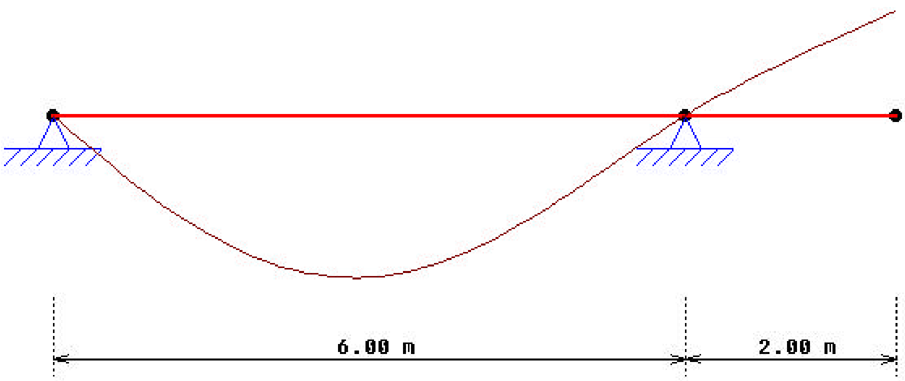

Figura 2. Deformada real de la viga.

Forzando el diagrama para facilitar su estudio, se tiene:

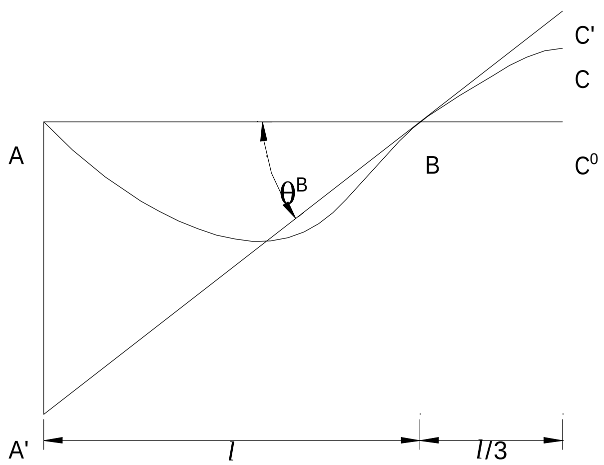

Figura 3. Análisis del problema.

En primer lugar se calcula el ángulo girado por B. Para ello se aplica Mohr entre A y B.

$$\theta_B = \frac{AA'}{L} = \frac{\delta_{AB}}{L} = \frac{\dfrac{\int_0^L M \cdot x \cdot dx}{E \cdot I}}{L} \qquad [1]$$

Para obtener el momento, se analiza el esquema de la figura 4. Para hacer más genéricos los cálculos, los valores numéricos se sustituyen por su variable representativa. Así, q=2.5 t/m y L=6 m.

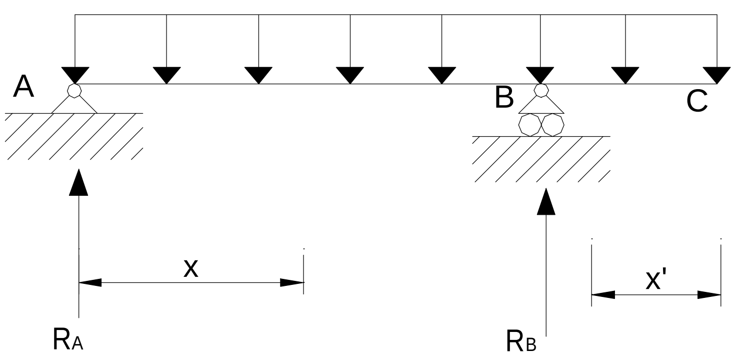

Figura 4. Diagrama para la obtención de momentos.

$$\sum M_B = 0 \rightarrow R_A \cdot L - q \cdot L \cdot \frac{L}{2} + q \cdot \frac{L}{3} \cdot \frac{L}{6} = 0$$

$$R_A = \frac{4}{9} \cdot q \cdot L$$

Por tanto, $M = \frac{4}{9} \cdot q \cdot L \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2}$. Introduciendo este valor en [1], se obtiene el valor de δ_{AB}:

$$\delta_{AB} = \frac{\int_0^L \left(\frac{4}{9} \cdot q \cdot L \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2} \right) \cdot x \cdot dx}{E \cdot I} = \frac{5}{216} \cdot \frac{q \cdot L^4}{E \cdot I}$$

Al ser $\delta_{AB}>0$, el punto A está situado por encima de la tangente en B, y por ello el ángulo girado será en sentido contrario a las agujas del reloj, tal y como se muestra en la figura 2, de valor:

$$\theta_B = -\frac{5}{216}\cdot\frac{q\cdot L^3}{E\cdot I}$$

El enunciado nos da la deformación del punto C. Así, atendiendo a la notación de la figura 3, se tiene:

$$\delta_C = \overline{C_0C} = 1\ \text{cm} = \overline{C_0C'} - \overline{CC'}$$

Al haber calculado el ángulo girado por B (θ_B), la determinación de la magnitud $\overline{C_0C'}$ es sencilla, pues se realiza por triangulación. Así,

$$\overline{C_0C'} = \theta_B\cdot\frac{L}{3} = \frac{5}{648}\cdot\frac{q\cdot L^4}{E\cdot I}$$

Por último, sólo falta calcular la distancia $\overline{CC'}$, y para ello se aplica de nuevo Mohr entre B y C, pues corresponde a la deformada de C respecto a la tangente trazada por B. Así:

$$\delta_{CB} = \frac{\int_0^{L/3} M\cdot x'\cdot dx'}{E\cdot I}$$

Entre B y C el momento se expresa por $M = -\frac{q\cdot x'^2}{2}$

Operando, se tiene:

$$\delta_{CB} = \frac{\int_0^{L/3} \frac{-q\cdot x'^2}{2}\cdot x'\cdot dx'}{E\cdot I} = \frac{-1}{648}\cdot\frac{q\cdot L^4}{E\cdot I}$$

Por tanto,

$$1\ \text{cm} = \frac{5}{648}\cdot\frac{q\cdot L^4}{E\cdot I} - \frac{1}{648}\cdot\frac{q\cdot L^4}{E\cdot I} = \frac{1}{162}\cdot\frac{q\cdot L^4}{E\cdot I}$$

Sustituyendo las variables por sus valores, se tiene:

$q = 2.5$ t/m = 25 kg/cm

$L = 600$ cm

$E = 2 \cdot 10^6$ kg/cm^2

$$I = \frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3 = \frac{1}{12} \cdot b \cdot 20^3$$

Así, despejando la anchura de la sección rectangular *b*, se obtiene:

$$b = \frac{12 \cdot q \cdot L^4}{162 \cdot E \cdot h^3}$$

y dando valores numéricos

$$b = \frac{12 \cdot 25 \cdot 600^4}{162 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 20^3} = 15 \ \text{cm}$$

Por tanto, la sección rectangular buscada tiene de canto 20 cm y de anchura 15 cm.