En una viga simplemente apoyada AB sometida a una carga q distribuida uniformemente en la semiluz, determinar, aplicando los teoremas de Mohr el ángulo girado por la sección A y la flecha en la sección C.

En principio, se determinan las reacciones y el diagrama de momentos flectores de la viga.

$$\sum M_A = 0$$

$$R_B \cdot l - q \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4} = 0; \rightarrow R_B = \frac{q \cdot l}{8}$$

$$\sum M_B = 0$$

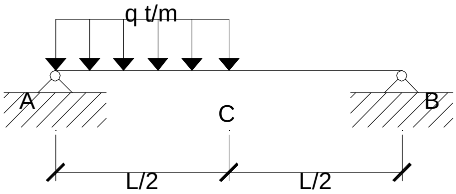
$$R_A \cdot l - q \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{3 \cdot l}{4} = 0; \rightarrow R_A = \frac{3 \cdot q \cdot l}{8}$$

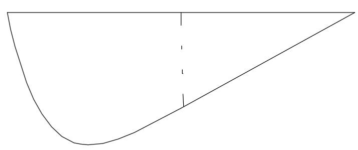
El diagrama de momentos flectores en el intervalo $0 \leq x \leq \frac{l}{2}$ de la viga viene definido por la expresión:

$$M_{AC} = \frac{3 \cdot q \cdot l}{8} \cdot x - \frac{q}{2} \cdot x^2$$

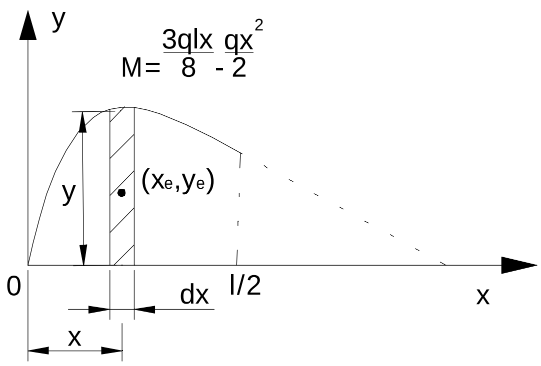
La expresión del momento flector en el segundo tramo es:

$$M_{CB} = \frac{3 \cdot q \cdot l}{8} \cdot x - \frac{q \cdot l}{2} \cdot \left(x - \frac{l}{4} \right)$$





Este ejercicio se va a resolver calculando las superficies y posiciones de los centro de gravedad de las dos superficies diferenciadas en el diagrama de momentos flectores en lugar de utilizar las expresiones analíticas del diagrama de momentos. La coincidencia entre ambos resultados se deja como ejercicio para el alumno.



En principio sólo se va a calcular la posición $\overline{x}$ del centro de gravedad de la rama parabólica del diagrama de momento flectores.

En primer lugar se calcula el área encerrada por la rama parabólica:

$$A = \int_A dA = \int y \cdot dx = \int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{3 \cdot q \cdot l}{8} \cdot x - \frac{q}{2} \cdot x^2 \right) \cdot dx = \left[\frac{3 \cdot q \cdot l}{8} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{q}{2} \cdot \frac{x^3}{3} \right]_0^{\frac{l}{2}} = \frac{5}{192} \cdot q \cdot l^3$$

El momento del elemento diferencial respecto al eje y es $x_e \cdot dA$. Por tanto, el momento del área completa respecto a este eje es:

$$\int_A x_e \cdot dA = \int x \cdot y \cdot dx = \int_0^{\frac{l}{2}} x \cdot \left(\frac{3 \cdot q \cdot l}{8} \cdot x - \frac{q}{2} \cdot x^2 \right) \cdot dx = \left[\frac{3 \cdot q \cdot l}{8} \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{q}{2} \cdot \frac{x^4}{4} \right]_0^{\frac{l}{2}} = \frac{q \cdot l^4}{128}$$

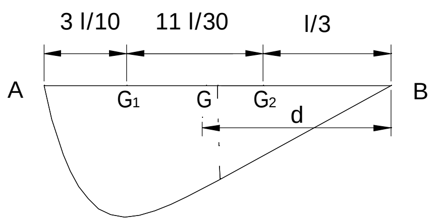
Así, $\overline{x} \cdot A = \int_A x_e \cdot dA$

$$\bar{x} \cdot \frac{5}{192} \cdot q \cdot l^3 = \frac{1}{128} \cdot q \cdot l^4 \rightarrow \bar{x} = \frac{3}{10} \cdot l$$

La distancia desde el centro de gravedad de la superficie triangular G_2 al apoyo B es: $\frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} = \frac{l}{3}$. Por tanto, la separación entre los centros de gravedad G_1 y G_2 de las superficies parabólica y triangular es:

$$l - \frac{3}{10} \cdot l - \frac{1}{3} \cdot l = \frac{11}{30} \cdot l$$

En la siguiente figura se representan estas distancias.



Para calcular la posición del centro de gravedad G de toda la superficie encerrada, se toman momentos respecto a G_2, por ejemplo. De este modo se tiene:

$$A_1 \cdot \frac{11}{30} \cdot l = A_T \cdot d_2$$

donde d_2 es la distancia de G a G_2, A_1 el área del tramo parabólico y A_T es el área total.

Para calcular el área de la superficie triangular A_2 próxima a B es necesario determinar el valor del momento flector en l/2. Esto es:

$$M_C = \frac{3 \cdot q \cdot l}{8} \cdot \frac{l}{2} - \frac{q}{2} \cdot \frac{l^2}{4} = \frac{q \cdot l^2}{16}$$

Así se puede determinar el valor de A_2:

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{q \cdot l^2}{16} = \frac{q \cdot l^3}{64}$$

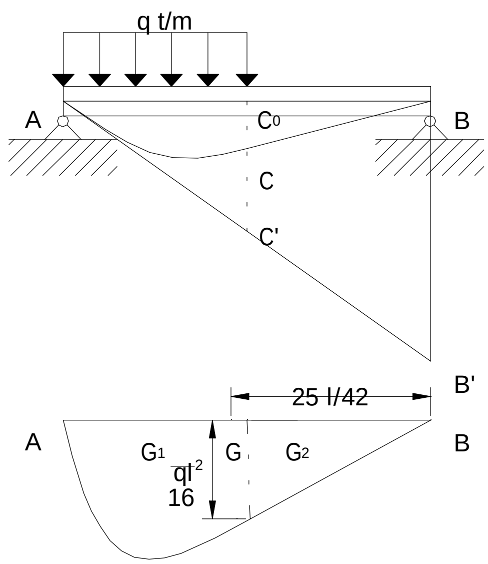
Por tanto, el área total es $A_T = \dfrac{5 \cdot q \cdot l^3}{192} + \dfrac{q \cdot l^3}{64} = \dfrac{q \cdot l^3}{24}$

De este modo se puede calcular d_2:

$$\frac{5 \cdot q \cdot l^3}{192} \cdot \frac{11}{30} \cdot l = \frac{q \cdot l^3}{24} \cdot d_2 \rightarrow d_2 = \frac{11}{48} \cdot l$$

Así, la distancia *d* de G a B es: $\dfrac{11}{48} \cdot l + \dfrac{1}{3} \cdot l = \dfrac{9}{16} \cdot l$

Una vez calculadas las áreas y distancias necesarias para aplicar los teoremas de Mohr, se empieza calculando $\overline{BB'}$.



$$\delta_{B,A} = \overline{BB'} = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \left(\frac{q \cdot l^3}{24} \cdot \frac{9 \cdot l}{16} \right) = \frac{3 \cdot q \cdot l^4}{128 \cdot E \cdot I}$$

El ángulo girado por A viene definido por:

$$\theta_A = tg\theta_A = \frac{\overline{BB'}}{l} = \frac{3 \cdot q \cdot l^3}{128 \cdot E \cdot I}$$

Observando la figura anterior, la flecha en la sección C es:

$$\delta_C = \overline{C_0C} = \overline{C_0C'} \pm \overline{CC'}$$

dependiendo el signo de que el punto C esté situado por encima o por debajo de la tangente en A.

$$\overline{C_0C'} = \theta_A \cdot \frac{l}{2} = \frac{3 \cdot q \cdot l^4}{256 \cdot E \cdot I}$$

Para calcular $\overline{CC'}$ se aplica de nuevo el segundo teorema de Mohr:

$$\delta_C = \overline{CC'} = \delta_{CA} = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \left(\frac{5 \cdot q \cdot l^3}{192}\right) \cdot \left(\frac{l}{2} - \frac{3 \cdot l}{10}\right) = \frac{q \cdot l^4}{192 \cdot E \cdot I}$$

Al ser $\delta_{CA} > 0$, el punto C está situado por encima de la tangente en A, y por consiguiente:

$$\delta_C = \overline{C_0C} = \overline{C_0C'} - \overline{CC'} = \frac{3 \cdot q \cdot l^4}{256 \cdot E \cdot I} - \frac{q \cdot l^4}{192 \cdot E \cdot I} = \frac{5 \cdot q \cdot l^4}{768 \cdot E \cdot I}$$