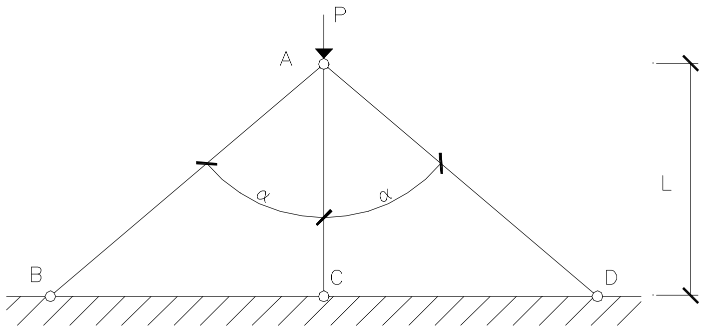
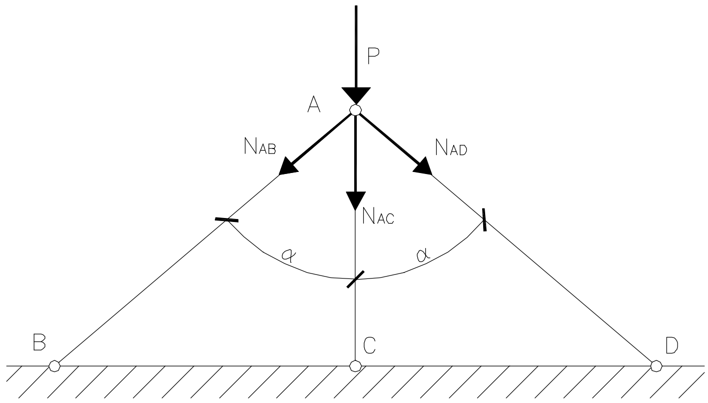
Una estructura articulada simétrica está sometida a la carga P. Siendo las barras de sección circular de radios R_{AB} = R_{AD} = 4 cm, R_{AC} = $2 \cdot \sqrt{2}$ cm, calcular el menor valor de P para el que se produce la rotura de la estructura, indicando en qué barra se inicia la misma.

Datos: L = 2m, α = 60º, E = $2 \cdot 10^6$ kg/cm^2 y la tensión de rotura σ_R = 3000 kg/cm^2.(*)



Del equilibrio del nudo A se obtiene:

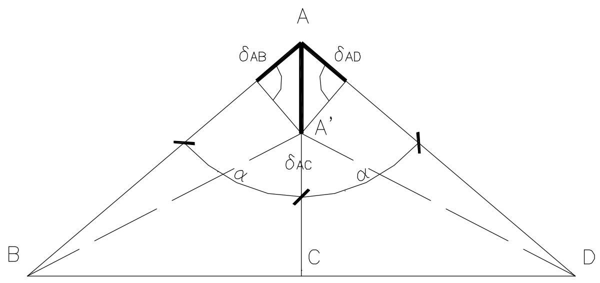
$$N_{AB} \cdot sen\alpha - N_{AD} \cdot sen\alpha = 0$$
$$N_{AB} \cdot \cos\alpha + N_{AD} \cdot \cos\alpha + N_{AC} + P = 0$$



(*) Vázquez, M. (1999) *Resistencia de materiales. Elasticidad. Solicitaciones. Cálculo de estructuras*. Editorial Noela. 4ª edición. Madrid.

Si se analizan las deformaciones de la estructura, se obtiene la relación:

$$\delta_{AB} = \delta_{AC} \cdot \cos\alpha$$



Aplicando la ley de Hooke:

$$\frac{N_{AB} \cdot L_{AB}}{E \cdot A_{AB}} = \frac{N_{AC} \cdot L_{AC}}{E \cdot A_{AC}} \cdot \cos\alpha$$

Teniendo en cuenta que α=60º, L_{AC}=L=200 cm, $L_{AB} = \dfrac{L_{AC}}{\cos 60} = 2 \cdot L = 400\ \text{cm}$, $A_{AB} = \pi \cdot R_{AB}^2 = 16 \cdot \pi\ \text{cm}^2$, $A_{AC} = \pi \cdot R_{AC}^2 = 8 \cdot \pi\ \text{cm}^2$, el sistema de ecuaciones anterior se reduce a:

$$\begin{gathered} N_{AB} = N_{AD} \\ N_{AB} + N_{AC} + P = 0 \\ N_{AC} = 2 \cdot N_{AB} \end{gathered}$$

de donde se obtiene:

$$\begin{gathered} N_{AB} = N_{AD} = -\frac{P}{3} \\ N_{AC} = -\frac{2 \cdot P}{3} \end{gathered}$$

Al ser negativas las fuerzas, las tres barras trabajan a **compresión**.

Las barras AB y AD se romperían a compresión, sin inestabilidad, cuando P alcanzase un valor P^{I} tal que:

$$\sigma_{AB} = \frac{N_{AB}}{A_{AB}} = \frac{\frac{P^{I}}{3}}{A_{AB}} = \sigma_R \rightarrow P^{I} = 3 \cdot \sigma_R \cdot A_{AB} = 3 \cdot 3000 \cdot 16 \cdot \pi = 452389 \text{ kg}$$

Las barras AB y AD se romperían por pandeo al alcanzar su solicititicación N_{AB} o N_{AD} el valor de la carga crítica de Euler, o lo que es lo mismo, cuando P alcanzase un valor P^{II} tal que:

$$N_{AB} = \frac{P^{II}}{3} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{mín}}{L_{AB}^2}$$

Sabiendo que el momento de inercia de la sección es $I = \frac{\pi \cdot R_{AB}^4}{4} = \frac{\pi \cdot 4^4}{4} = 804.25 \text{ cm}^4$, se obtiene la carga P^{II}:

$$P^{II} = \frac{3 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I}{L_{AB}^2} = \frac{3 \cdot \pi^2 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 804.25}{400^2} = 74415 \text{ kg}$$

La barra AC se rompería a compresión, sin inestabilidad, cuando P alcanzase un valor P^{III} tal que:

$$\sigma_{AC} = \frac{N_{AC}}{A_{AC}} = \frac{\frac{2 \cdot P^{III}}{3}}{A_{AC}} = \sigma_R \rightarrow P^{III} = \frac{3 \cdot \sigma_R \cdot A_{AC}}{2} = \frac{3 \cdot 3000 \cdot 8 \cdot \pi}{2} = 113097 \text{ kg}$$

La barra AC se rompería por pandeo cuando P alcanzase un valor P^{IV} tal que:

$$N_{AC} = \frac{2 \cdot P^{IV}}{3} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{mín}}{L_{AB}^2}$$

Sabiendo que el momento de inercia de la sección es $I = \frac{\pi \cdot R_{AC}^4}{4} = \frac{\pi \cdot \left(2 \cdot \sqrt{2}\right)^4}{4} = 50.27\ cm^4$, se obtiene la carga P^{IV}:

$$P^{IV} = \frac{3 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I}{2 \cdot L_{AC}^2} = \frac{3 \cdot \pi^2 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 50.27}{2 \cdot 200^2} = 37208\ kg$$

Al ser P^{IV} la menor de las cargas P, la estructura se rompe cuando se alcance este valor P=37208 kg, debido al pandeo de la barra AC.