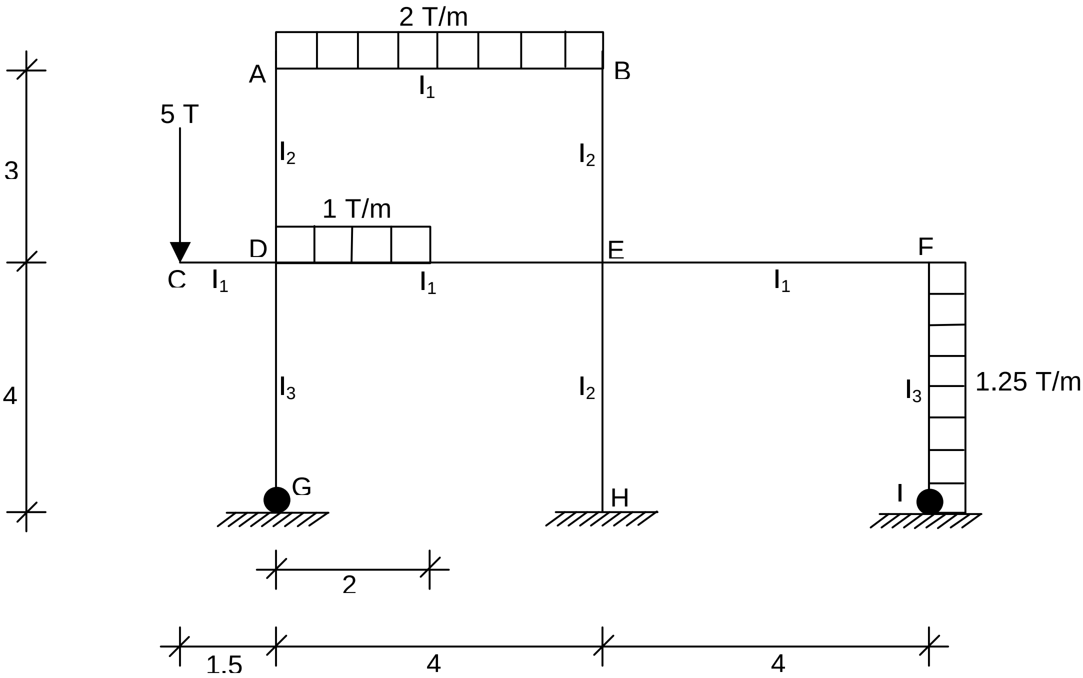
Hallar por el método de Cross los diagramas de momentos flectores y esfuerzos cortantes, así como las reacciones de todas las barras del pórtico de la figura.

Calcular la expresión de la curva de momentos flectores de la barra DE y el ángulo girado en E aplicando el método de superposición.

La relación entre los momentos de inercia de las barras es:

$$I_1 = 2 \cdot I_2 = 3 \cdot I_3$$



(*)

1º. Determinamos los coeficientes elásticos (β_i, K_i y r_i).

– NUDO A

$$K_{AD} = \frac{4 \cdot E \cdot I_2}{l} = \frac{4 \cdot E \cdot I_1}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3} \cdot E \cdot I_1$$

(*) La barra IF está sometida a una carga uniforme de succión, de valor 1.25 T/m

$$K_{AB} = \frac{4 \cdot E \cdot I_1}{l} = \frac{4 \cdot E \cdot I_1}{4} = E \cdot I_1$$

$$\beta_{AB} = \frac{1}{2}$$

$$\beta_{AD} = \frac{1}{2}$$

$$r_{AD} = \frac{K_{AD}}{K_{AD} + K_{AB}} = \frac{2/3}{2/3 + 1} = 0.4$$

$$r_{AB} = \frac{K_{AB}}{K_{AD} + K_{AB}} = \frac{1}{2/3 + 1} = 0.6$$

– NUDO B

$$K_{BA} = \frac{4 \cdot E \cdot I_1}{l} = \frac{4 \cdot E \cdot I_1}{4} = E \cdot I_1$$

$$K_{BE} = \frac{4 \cdot E \cdot I_2}{l} = \frac{4 \cdot E \cdot I_1}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3} \cdot E \cdot I_1$$

$$\beta_{BA} = \frac{1}{2}$$

$$\beta_{BE} = \frac{1}{2}$$

$$r_{BA} = \frac{K_{BA}}{K_{BA} + K_{BE}} = \frac{1}{1 + 2/3} = 0.6$$

$$r_{BE} = \frac{K_{BE}}{K_{BA} + K_{BE}} = \frac{2/3}{1 + 2/3} = 0.4$$

– NUDO D

$$K_{DA} = \frac{4 \cdot E \cdot I_2}{l} = \frac{4 \cdot E \cdot I_1}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3} \cdot E \cdot I_1$$

$$\beta_{DA} = \frac{1}{2}$$

$$K_{DC} = 0$$

$$\beta_{DC} = 0$$

$$K_{DE} = \frac{4 \cdot E \cdot I_1}{l} = \frac{4 \cdot E \cdot I_1}{4} = E \cdot I_1$$

$$\beta_{DE} = \frac{1}{2}$$

$$K_{DG} = \frac{3 \cdot E \cdot I_3}{l} = \frac{3 \cdot E \cdot I_1}{4 \cdot 3} = \frac{1}{4} \cdot E \cdot I_1$$

$$\beta_{DG} = 0$$

$$r_{DA} = \frac{K_{DA}}{K_{DA} + K_{DC} + K_{DE} + K_{DG}} = \frac{2/3}{2/3 + 0 + 1 + 1/4} = 0.35$$

$$r_{DC} = 0$$

$$r_{DE} = \frac{K_{DE}}{K_{DA} + K_{DC} + K_{DE} + K_{DG}} = \frac{1}{2/3 + 0 + 1 + 1/4} = 0.52$$

$$r_{DG} = \frac{K_{DG}}{K_{DA} + K_{DC} + K_{DE} + K_{DG}} = \frac{1/4}{2/3 + 0 + 1 + 1/4} = 0.13$$

– NUDO E

$$K_{ED} = \frac{4 \cdot E \cdot I_1}{l} = \frac{4 \cdot E \cdot I_1}{4} = E \cdot I_1$$

$$\beta_{ED} = \frac{1}{2}$$

$$\beta_{EB} = \frac{1}{2}$$

$$K_{EF} = \frac{4 \cdot E \cdot I_1}{l} = \frac{4 \cdot E \cdot I_1}{4} = E \cdot I_1$$

$$\beta_{EF} = \frac{1}{2}$$

$$K_{EH} = \frac{4 \cdot E \cdot I_2}{l} = \frac{4 \cdot E \cdot I_1}{2 \cdot 4} = \frac{1}{2} \cdot E \cdot I_1$$

$$\beta_{EH} = \frac{1}{2}$$

$$r_{ED} = \frac{K_{ED}}{K_{ED} + K_{EB} + K_{EF} + K_{EH}} = \frac{1}{1 + 2/3 + 1 + 1/2} = 0.315$$

$$r_{EB} = \frac{K_{EB}}{K_{ED} + K_{EB} + K_{EF} + K_{EH}} = \frac{2/3}{1 + 2/3 + 1 + 1/2} = 0.21$$

$$r_{EF} = \frac{K_{EF}}{K_{ED} + K_{EB} + K_{EF} + K_{EH}} = \frac{1}{1 + 2/3 + 1 + 1/2} = 0.315$$

$$r_{EH} = \frac{K_{EH}}{K_{ED} + K_{EB} + K_{EF} + K_{EH}} = \frac{1/2}{1 + 2/3 + 1 + 1/2} = 0.16$$

– NUDO F

$$K_{FE} = \frac{4 \cdot E \cdot I_1}{l} = \frac{4 \cdot E \cdot I_1}{4} = E \cdot I_1$$

$$\beta_{FE} = \frac{1}{2}$$

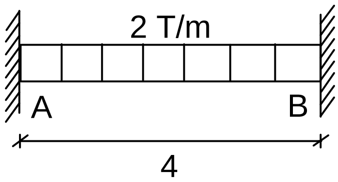
$$K_{FI} = \frac{3 \cdot E \cdot I_3}{l} = \frac{3 \cdot E \cdot I_1}{4 \cdot 3} = \frac{1}{4} \cdot E \cdot I_1$$

$$\beta_{FI} = 0$$

$$r_{FE} = \frac{K_{FE}}{K_{FE} + K_{FI}} = \frac{1}{1 + 1/4} = 0.80$$

$$r_{FI} = \frac{K_{FI}}{K_{FE} + K_{FI}} = \frac{1/4}{1 + 1/4} = 0.20$$

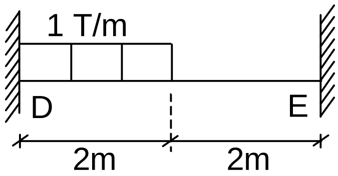
2º. Calculamos los momentos y pares de empotramiento.



$$M_A = M_B = -\frac{q \cdot l^2}{12} = -\frac{2 \cdot 4^2}{12} = -2.67\ T \cdot m$$

$$m_A = +2.67\ T \cdot m$$

$$m_B = -2.67\ T \cdot m$$



$$M_D = -\frac{q \cdot c^3}{12 \cdot l^2} \cdot \left(l - 3 \cdot b + \frac{12 \cdot a \cdot b^2}{c^2} \right)$$

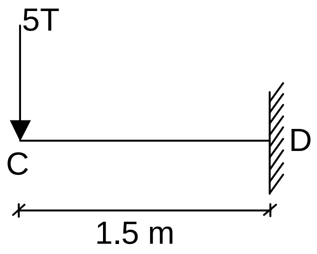
$$M_E = -\frac{q \cdot c^3}{12 \cdot l^2} \cdot \left(l - 3 \cdot a + \frac{12 \cdot a^2 \cdot b}{c^2} \right)$$

q=1 a=1 b=3 c=2 l=4

$$M_D = -\frac{1 \cdot 2^3}{12 \cdot 4^2} \cdot \left(4 - 3 \cdot 3 + \frac{12 \cdot 1 \cdot 3^2}{2^2} \right) = -0.92$$

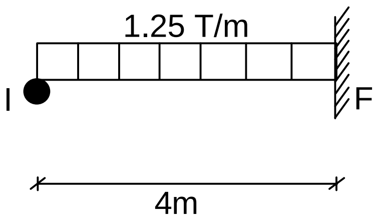
$$M_E = -\frac{1 \cdot 2^3}{12 \cdot 4^2} \cdot \left(4 - 3 \cdot 1 + \frac{12 \cdot 1^2 \cdot 3}{2^2} \right) = -0.42$$

$$m_D = 0.92\ T \cdot m$$
$$m_E = -0.42\ T \cdot m$$



$$M_C = 0$$
$$M_D = -P \cdot l = -5 \cdot 1.5 = -7.5\ T \cdot m$$

$$m_D = -7.5\ T \cdot m$$

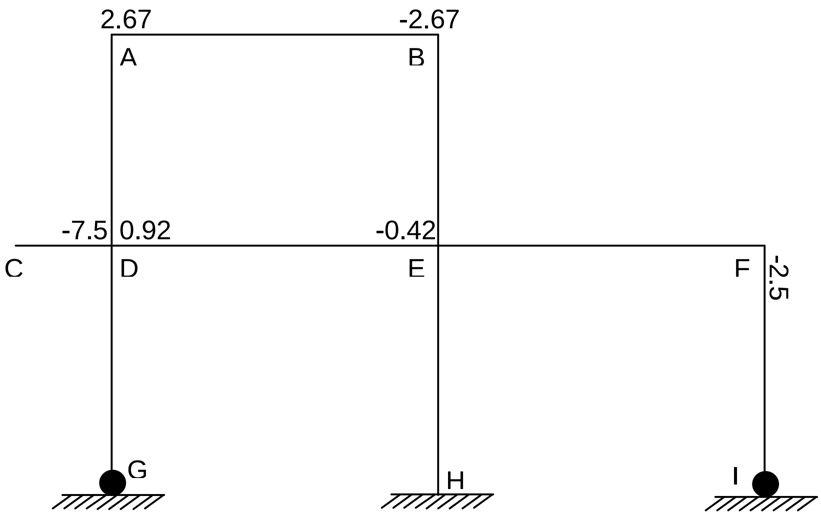


$$M_I = 0$$

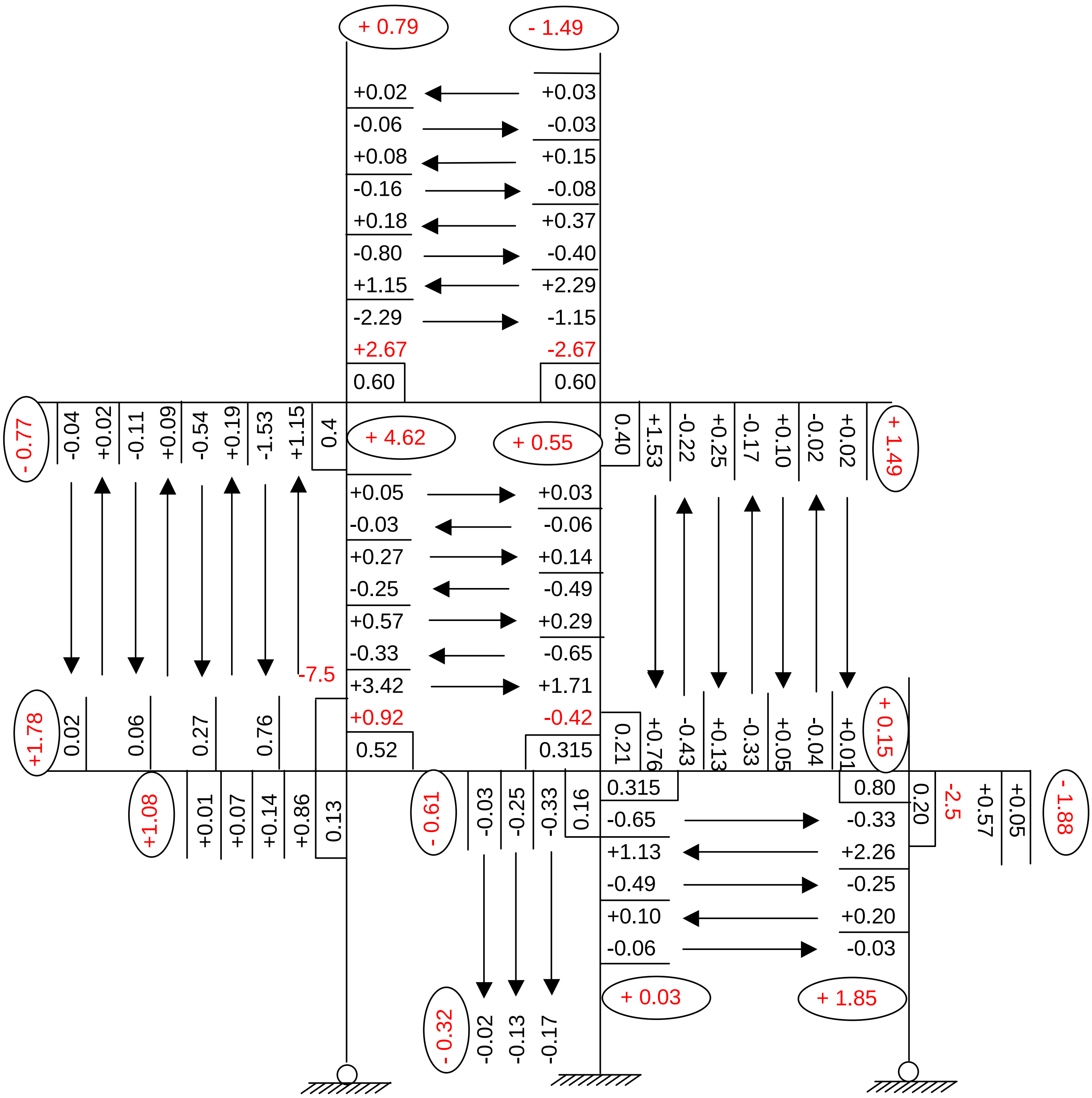
$$M_F = -\frac{q \cdot l^2}{8} = -\frac{1.25 \cdot 4^2}{8} = -2.5\ T \cdot m$$

$$m_i = 0$$
$$m_F = -2.5\ T \cdot m$$

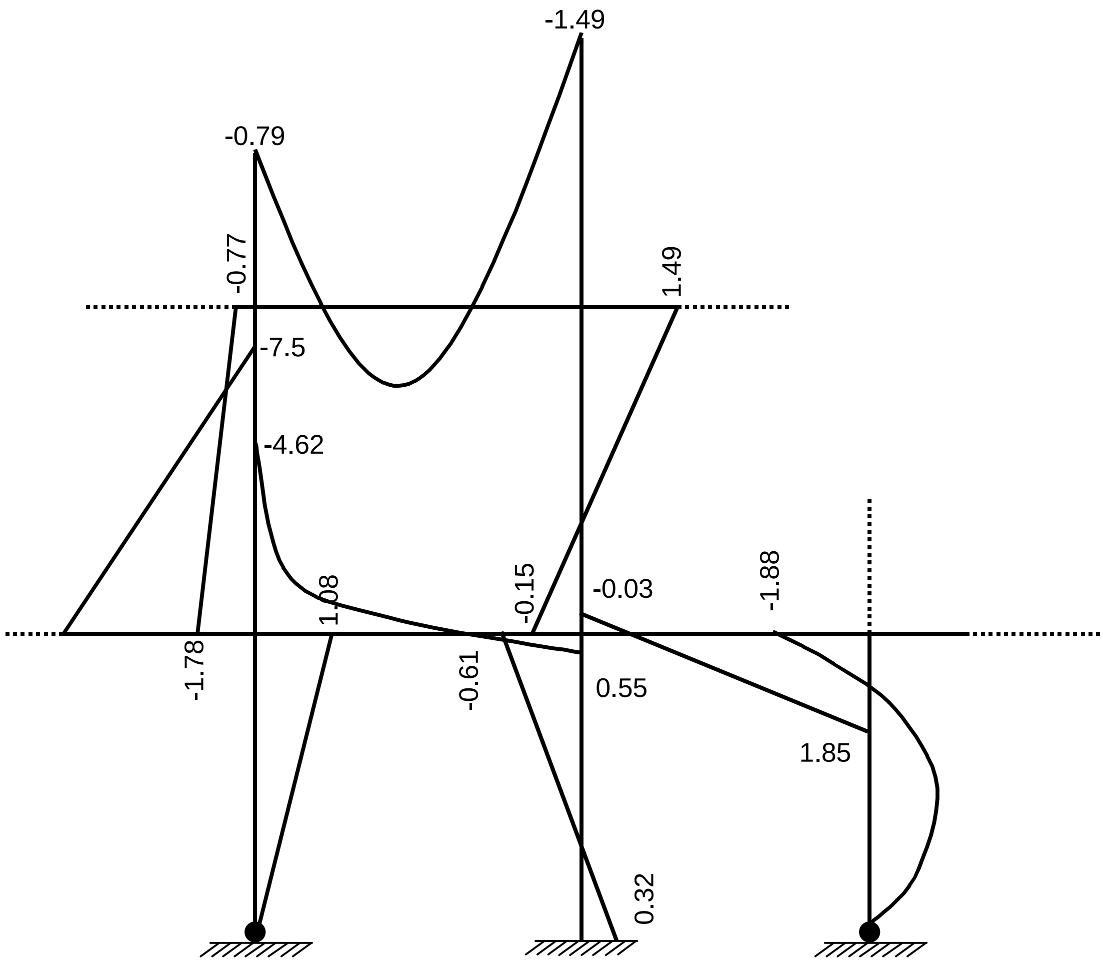
Pares de empotramiento



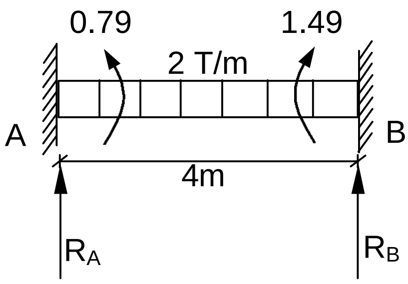
3º . Cross: Transmisiones.



4º. Diagrama de momentos flectores.



5º. Cálculo de reacciones.



$$\sum M_A = 0$$

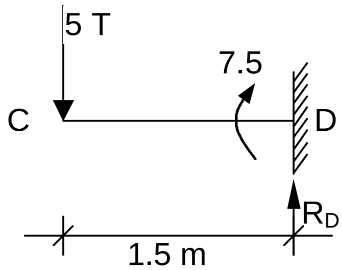
$$R_B \cdot 4 + 0.79 - 1.49 - 2 \cdot 4 \cdot 2 = 0$$

$$R_B = 4.17\ T$$

$$\sum M_B = 0$$

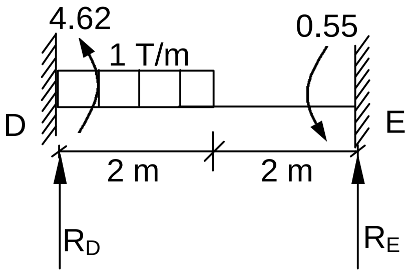
$$R_A \cdot 4 + 1.49 - 0.79 - 2 \cdot 4 \cdot 2 = 0$$

$$R_A = 3.83 \text{ T}$$



$$\sum F_y = 0$$

$$R_D = 5 \text{ T}$$



$$\sum M_D = 0$$

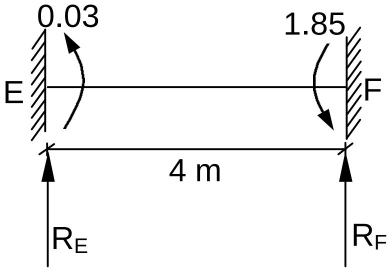
$$R_E \cdot 4 + 4.62 + 0.55 - 2 \cdot 1 \cdot 1 = 0$$

$$R_E = -0.79 \text{ T}$$

$$\sum M_E = 0$$

$$R_D \cdot 4 - 0.55 - 4.62 - 2 \cdot 1 \cdot 3 = 0$$

$$R_D = 2.79 \text{ T}$$



$$\sum M_E = 0$$

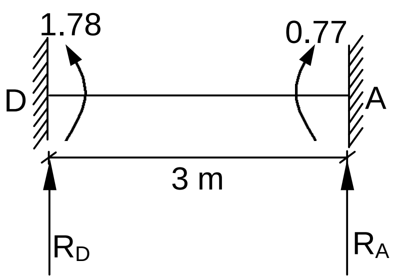
$$R_F \cdot 4 + 0.03 + 1.85 = 0$$

$$R_F = -0.47 \text{ T}$$

$$\sum M_F = 0$$

$$R_E \cdot 4 - 1'85 - 0.03 = 0$$

$$R_F = 0'47\ T$$



$$\sum M_D = 0$$

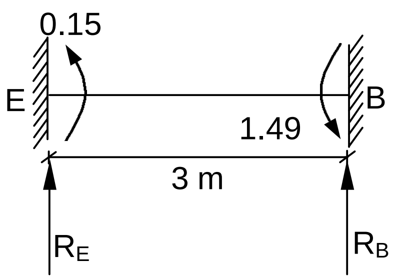
$$R_A \cdot 3 + 1.78 - 0.77 = 0$$

$$R_A = -0.34\ T$$

$$\sum M_A = 0$$

$$R_D \cdot 3 - 1.78 + 0.77 = 0$$

$$R_D = 0.34\ T$$



$$\sum M_B = 0$$

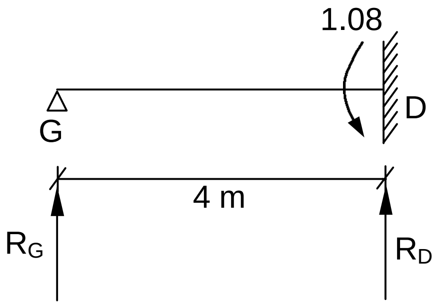
$$R_E \cdot 3 - 0.15 - 1.49 = 0$$

$$R_E = +0.55\ T$$

$$\sum M_E = 0$$

$$R_B \cdot 3 + 0.15 + 1.49 = 0$$

$$R_B = -0.55\ T$$



$$\sum M_G = 0$$

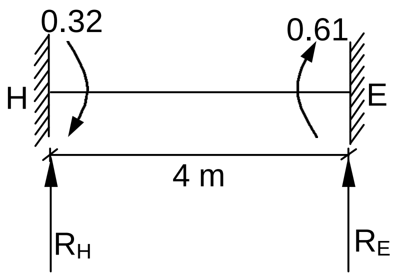
$$R_D \cdot 4 + 1.08 = 0$$

$$R_D = -0.27\ T$$

$$\sum M_D = 0$$

$$R_G \cdot 4 - 1.08 = 0$$

$$R_G = 0.27\ T$$



$$\sum M_H = 0$$

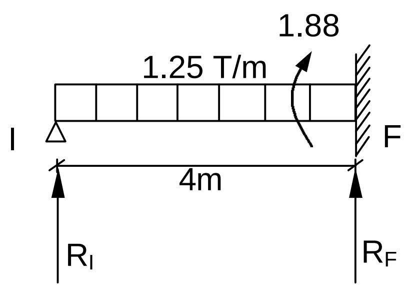
$$R_E \cdot 4 - 0.32 - 0.61 = 0$$

$$R_E = 0.23\ T$$

$$\sum M_E = 0$$

$$R_H \cdot 4 + 0.32 + 0.61 = 0$$

$$R_H = -0.23\ T$$



$$\sum M_I = 0$$

$$R_F \cdot 4 - 1.88 - 1.25 \cdot 4 \cdot 2 = 0$$

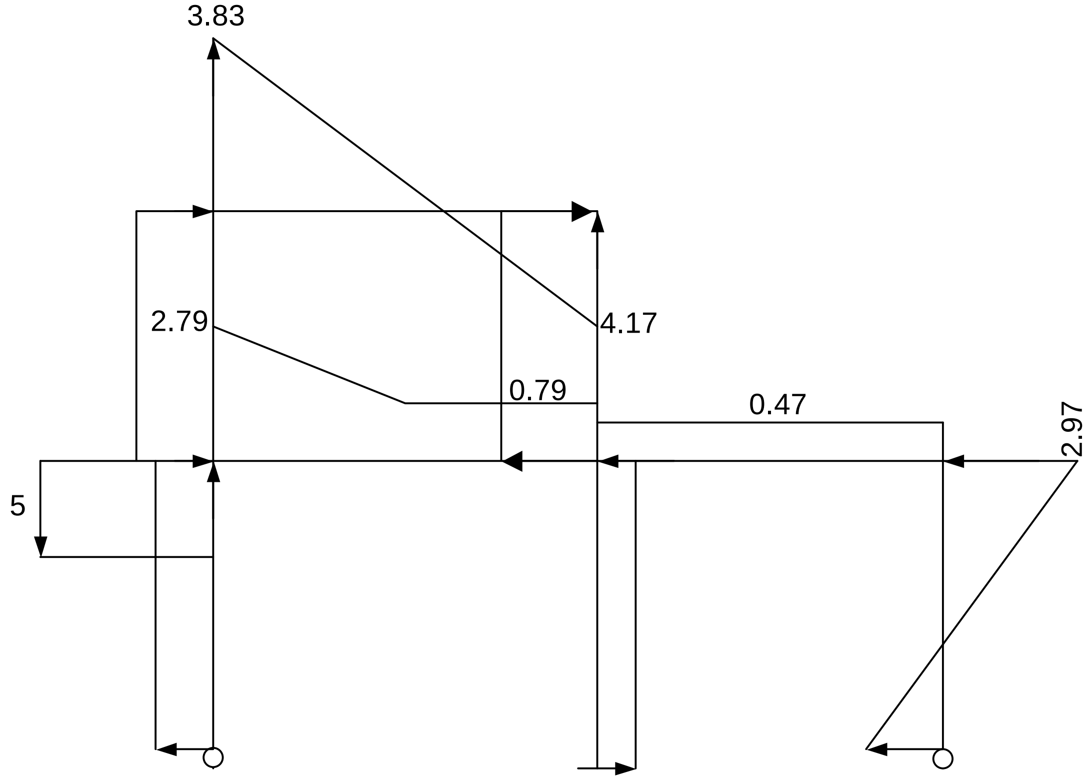
$$R_F = 2.97\ T$$

$$\sum M_F = 0$$

$$R_I \cdot 4 + 1.88 - 1.25 \cdot 4 \cdot 2 = 0$$

$$R_I = 2.03\ T$$

6º. Diagrama de esfuerzo cortante.



7º. Estudio del momento flector en la barra DE.

$$M_{x1} = \frac{-M_A}{l} \cdot (l - x) + \frac{M_b}{l} \cdot x$$

$$M_{x1} = \frac{-4.62}{4} \cdot (4 - x) + \frac{0.55}{4} \cdot x = -4.62 + 1.15 \cdot x + 0.14 \cdot x = 1.29 \cdot x - 4.62$$

La carga uniforme, al no ocupar todo el vano, origina dos expresiones para los momentos flectores. Una primera parabólica, hasta el centro del vano:

$$M_{x2.1} = \frac{q \cdot b \cdot c}{l} \cdot x - \frac{q}{2}\left[x - \left(a - \frac{c}{2}\right)\right]^2$$

$$M_{x2.1} = \frac{6}{4} \cdot x - \frac{1}{2}\left[x - \left(1 - \frac{2}{2}\right)\right]^2 = 1.5 \cdot x - 0.5 \cdot x^2$$

y una segunda rectilínea, desde el centro del vano hasta el apoyo:

$$M_{x2.2} = \frac{q \cdot a \cdot c}{l} \cdot (l - x)$$

$$M_{x2.2} = \frac{2}{4} \cdot (4 - x) = 2 - 0.5 \cdot x$$

Al superponer ambas curvas de momentos obtendremos dos ramas: Una primera parabólica, hasta el centro del vano:

$$M_x = M_{x1} + M_{x2.1}$$

$$M_x = 1.5 \cdot x - 0.5 \cdot x^2 + 1.29 \cdot x - 4.62$$

$$M_x = -0.5 \cdot x^2 + 2.79 \cdot x - 4.62$$

y una segunda rectilínea, desde el centro del vano hasta el apoyo:

$$M_x = M_{x1} + M_{x2.2}$$

$$M_x = 2 - 0.5 \cdot x + 1.29 \cdot x - 4.62 = 0.79 \cdot x - 2.62$$

Obtención del momento máximo en la barra:

- Hasta el centro del vano $[0 < x \leq 2]$

$$M_x = -0.5 \cdot x^2 + 2.79 \cdot x - 4.62$$

$$M'_x = -x + 2.79 = 0 \rightarrow x = 2.79$$

Como este punto está fuera del intervalo, indica que no existen máximos ni mínimos.

- Desde el centro del vano $[2 < x \leq 4]$

$$M_x = 0.79 \cdot x - 2.62$$

Al ser una recta, tampoco tiene máximos ni mínimos.

Obtención de puntos de corte (o puntos de momento nulo):

- Hasta el centro del vano $[0 < x \leq 2]$

$$M_x = -0.5 \cdot x^2 + 2.79 \cdot x - 4.62 = 0$$

$$x^2 - 5.58 \cdot x + 9.24 = 0$$

No existen en este tramo.

- Desde el centro del vano $[2 < x \leq 4]$

$$M_x = 0.79 \cdot x - 2.62 = 0$$

$$x = 3.32$$

Por tanto, a 3.32 m del apoyo dorsal tenemos un punto de momento nulo. De igual modo sabemos que la curva de momentos flectores consta de dos tramos: Uno parabólico que comienza en –4.62 T·m y termina en el centro del vano, enlazando tangencialmente con un tramo rectilíneo que acaba en +0.55 T·m en el apoyo frontal.

8º. Cálculo del ángulo girado por E en la barra DE.

$$\alpha_1 = \frac{-q \cdot a \cdot b \cdot c}{6 \cdot E \cdot I_1 \cdot l} \cdot \left(1 + a - \frac{c^2}{4 \cdot b}\right) = \frac{-6}{24 \cdot E \cdot I_1} \cdot 4.66 = \frac{-1.16}{E \cdot I_1}$$

$$\alpha_2 = -\frac{l}{6 \cdot E \cdot I_1} \cdot \left(-M_a + 2 \cdot M_b\right) = -\frac{4}{6 \cdot E \cdot I_1} \cdot \left(-4.62 + 2 \cdot 0.55\right) = \frac{2.35}{E \cdot I_1}$$

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = \frac{-1.16}{E \cdot I_1} + \frac{2.35}{E \cdot I_1} \rightarrow \quad \alpha = \frac{1.19}{E \cdot I_1}$$

(unidades en T y m)